УДК 624.07

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-5-108-116

© С. О. Чепилко, инженер
(ООО «Институт строительных экспертиз»,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: chep-65@mail.ru

© S. O. Chepilko, engineer
(LLC «Institut stroitelnykh ekspertyz»,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: chep-65@mail.ru

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ В СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ

NONLINEAR CREEP IN A STEEL-REINFORCED CONCRETE BEAM

Рассмотрены вопросы учета нелинейной ползучести в сталежелезобетонных балках на основе интегрального уравнения вязко-упруго-пластичности бетона. Получена разрешающая система нелинейных интегральных уравнений, проведена линеаризация этой системы, выписаны ее асимптотические решения для случая теории упругой наследственности. Проведен анализ учета нелинейной ползучести в сравнении с уравнениями линейной ползучести и мгновенным (кратковременным) нагружением с учетом нелинейной диаграммы бетона $\varepsilon - \sigma$.

Ключевые слова: сталежелезобетонная балка, нелинейная ползучесть.

Problems of taking into account nonlinear creep in steel-reinforced concrete beams are considered basing on the integral equation of viscous-elastic-plasticity of concrete. There has been obtained the resolving system of nonlinear integral equations, a linearization of this system has been carried out, its asymptotic solutions have been written out for the theory of elastic heredity case. The analysis of taking into account nonlinear creep has been performed compared with the linear creep equations and an instantaneous (short-term) loading allowing for concrete's nonlinear diagram.

Keywords: steel-reinforced concrete beam, nonlinear creep.

Данная работа является продолжением [6] и [7], где были рассмотрены вопросы линейной ползучести и учета нелинейной работы бетона при мгновенном нагружении в сталежелезобетонных балках (далее — СЖБ-балках). Стандартный расчет СЖБ-балок проводится в упругой постановке. Однако линейная работа бетона происходит лишь при нагрузках, вызывающих относительно малые напряжения в бетоне — до $0,2-0,3R_b$. При дальнейшем увеличении нагрузки начинает сказываться нелинейность работы бетона: во-первых, при мгновенном (кратковременном) нагружении, когда считается, что напряжения в бетоне удовлетворяют нелинейной диаграмме « $\varepsilon - \sigma$ »; во-вторых, при продолжительном действии нагрузки, когда в бетоне начинаются процессы ползучести и релаксации, действие которых обусловлено появлением неупругих внутренних деформаций, вызванных перекристаллизацией, накоплением микротрещин и другими факторами.

Рассматривается нелинейная ползучесть в СЖБ-балках на основе интегрального уравне-

ния вязко-упруго-пластичности бетона. Учет нелинейной ползучести бетона производится при следующих допущениях:

- 1) СЖБ-балка рассматривается как классическая комплексная балка, т. е. в НДС учитываются только продольные напряжения растяжения-сжатия;
- 2) выполняется гипотеза плоских сечений;
- 3) стальная балка работает упруго;
- 4) СЖБ-балка однопролетная шарнирно опертая;
- 5) параметры СЖБ-балки подобраны так, что бетон сжат в любом сечении;
- 6) бетон однороден и работает без трещин;
- 7) внешние силы растяжения-сжатия отсутствуют.

Принимается локальная система координат в центре тяжести стальной балки (рис. 1). Направления глобальных осей координат совпадают с локальными.

Относительные деформации по условию 2:

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_s(t) - z\kappa(t), \quad (1)$$

Рис. 1. Принятая система координат

где $\varepsilon(z, t)$ — относительная деформация в сечении балки на расстоянии z от начала координат (локальных); $\varepsilon_s(t)$, $\varkappa(t)$ — относительная деформация в центре тяжести стального сечения и кривизна нейтральной оси балки.

Уравнение нелинейной ползучести принимается в виде

$$f(\sigma_b(z, t)) = E_b(t)\varepsilon_b(z, t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) f(\sigma_b(z, \xi)) d\xi, \quad (2)$$

это уравнение вязко-упруго-пластичности бетона ([2, 3]).

Условия равновесия в сечении СЖБ-балки:

$$\begin{cases} N_b(t) + N_s(t) = 0 \\ M_b(t) + M_s(t) = M_{beam} \end{cases}, \quad (3)$$

где

$$N_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s; \quad (4)$$

$$N_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) dA_b; \quad (5)$$

$$M_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) z dA_s; \quad (6)$$

$$M_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) z dA_b. \quad (7)$$

Нелинейную функцию в выражении (2) перепишем в виде

$$f(\sigma) = \sigma + \delta(\sigma), \quad (8)$$

т. е. функция $f(\sigma)$ представлена в виде линейной σ и нелинейной части $\delta(\sigma)$.

Проведем интегрирование в (4) и (7). Оно дает

$$\begin{aligned} N_s(t) &= \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s = \\ &= \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z \varkappa(t)) dA_s = E_s A_s \varepsilon_s(t). \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) z dA_s =$$

$$= \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z \varkappa(t)) z dA_s = -E_s I_s^0 \varkappa(t), \quad (10)$$

где I_s^0 — момент инерции стального сечения.

Уравнение (2) после подстановки (8) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_b(z, t) &= E_b(t)\varepsilon_b(z, \xi) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi - \\ &- \delta(\sigma_b(z, t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Исходя из полученного выражения для $\sigma_b(z, t)$, можно провести интегрирование в (5) и (7):

$$\begin{aligned} N_b(t) &= \int_{A_b} \sigma_b(z, t) dA_b = \\ &= \int_{A_b} \left(E_b(t) (\varepsilon_s(t) - z \varkappa(t)) + \right. \\ &+ \left. E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi \right) dA_b + \\ &+ \int_{A_b} \left(-\delta(\sigma_b(z, \xi)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi \right) dA_b = \\ &= E_b(t) A_b (\varepsilon_s(t) - z \varkappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_b(\xi) d\xi - \\ &- \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) dA_b + \\ &+ E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \left(\int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, \xi)) dA_b \right) d\xi. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta(t) = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) dA_b; \quad (12)$$

$$\mu(t) = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) z dA_b; \quad (13)$$

$$m(t) = \frac{E_b(t) A_b}{E_s A_s}. \quad (14)$$

Из условия равновесия имеем $N_b(t) = -N_s(t)$, поэтому

$$\begin{aligned} -N_s(t) &= m(t) N_s(t) - m(t) E_s A_s z \varkappa(t) - \\ &- E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi - \\ &- \delta(\sigma_b(t)) A_b + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$N_s(t) - \frac{E_b(t)A_b z_b}{1+m(t)} \chi(t) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi - \\ - \frac{\Delta(t)A_b}{1+m(t)} + \frac{E_b(t)A_b}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \Delta(\xi) d\xi = 0. \quad (15)$$

Перейдем к интегрированию в $M_b(t)$ в представлении (7):

$$M_b(t) = \int_{A_b} \left(E_b(t) (\varepsilon_s(t) - z \chi(t)) + \right. \\ \left. + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi \right) z dA_b + \\ + \int_{A_b} \left(-\delta(\sigma_b(z, \xi)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi \right) z dA_b = \\ = m(t) N_s z_b - E_b(t) \chi(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) + \\ + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) M_b(\xi) d\xi - A_b \mu(t) + \\ + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi.$$

Из условия равновесия для внутренних интегральных моментов

$$M_b(t) = M_{beam} - M_s(t) = M_{beam} + E_s I_s^0 \chi(t).$$

Подстановка и последующие преобразования дают

$$\chi(t) - \frac{m(t)z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) - \\ - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \chi(\xi) d\xi + \frac{A_b \mu(t)}{(EI)_\Sigma} - \\ - \frac{E_b(t)A_b}{(EI)_\Sigma} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi = \\ = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t)\Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma}, \quad (16)$$

где обозначено

$$\Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t K(t, \xi) d\xi = -C(t, t_0) + \frac{1}{E_b(t)} - \frac{1}{E_b(t_0)}; \\ (EI)_\Sigma = E_s I_s^0 + E_b(t) (I_b^0 + A_b z_b^2).$$

Выражение (2) перепишем в виде

$$\sigma_b(z, t) - E_b(t) \left(\frac{N_s(t)}{E_s A_s} - z \chi(t) \right) - \\ - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi +$$

$$+ \delta(\sigma_b(z, t)) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi = 0. \quad (17)$$

Уравнения (15), (16) и (17) образуют замкнутую систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для определения $\chi(t)$, $N_s(t)$ и $\sigma_b(t)$:

$$\begin{cases} L_1[\chi(t), N_s(t)] + \alpha_1(t) = 0; \\ L_2[\chi(t), N_s(t)] + \alpha_2(t) = \beta(t); \\ L_3[\chi(t), N_s(t), \sigma_b(z, t)] + \alpha_3(z, t) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь обозначены

$$L_1[\chi(t), N_s(t)] = N_s(t) - \frac{E_b(t)A_b z_b}{1+m(t)} \chi(t) -$$

$$- \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi;$$

$$L_2[\chi(t), N_s(t)] = \chi(t) - \frac{m(t)z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) -$$

$$- \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \chi(\xi) d\xi;$$

$$L_3[\chi(t), N_s(t), \sigma_b(z, t)] =$$

$$= \sigma_b(z, t) - E_b(t) \left(\frac{N_s(t)}{E_s A_s} - z \chi(t) \right) -$$

$$- E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi;$$

$$\alpha_1(t) = - \frac{\Delta(t)A_b}{1+m(t)} + \frac{E_b(t)A_b}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \Delta(\xi) d\xi;$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_b \mu(t)}{(EI)_\Sigma} - \frac{E_b(t)A_b}{(EI)_\Sigma} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi;$$

$$\beta(t) = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t)\Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma};$$

$$\alpha_3(z, t) = \delta(\sigma_b(z, t)) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi.$$

Операторы L_1, L_2, L_3 — линейные. Очевидно, что $\delta(\sigma_b(z, \xi))$ есть малая величина, и если ее принять равной нулю, то система (18) переходит в систему, полученную в [7], т. е. отвечающую линейному уравнению ползучести Маслова–Арутюняна [1].

Рассмотрим использование полученной системы в теории упругой наследственности. В этом случае $E_b(t) = E_b$, и можно из системы (18) достаточно просто получить асимптотическое (стационарное) решение. Произведем в системе (18) предельные переходы по $t \rightarrow \infty$, восполь-

зовавшись сформулированной в [7] теоремой Харлаба (идея такого рода предельного перехода упомянута в [4]). Ядра интегральных операторов и функции, входящие в интегральные уравнения, удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому, переходя к пределу, имеем (символы со звездочкой соответствуют асимптотическим значениям)

$$\begin{aligned} C(t, t_0) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_\infty = \text{const}; \\ \Phi(t, t_0) &= \int_{t_0}^t K(t, \xi) d\xi = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \xi} \left(C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right) d\xi = -C(t, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -C_\infty; \\ \sigma_b^*(z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_b(z, t); \\ \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -C_\infty \sigma_b^*(z); \\ L_1[\varkappa(t), N_s(t)] &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1+m+\varphi}{1+m} N_s^* - \frac{m}{1+m} E_s A_s z_b \varkappa^*; \\ L_2[\varkappa(t), N_s(t)] &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \times \\ &\times \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b}{1+\varphi} (I_b^0 + A_b z_b^2)}{(EI)_\Sigma} \varkappa^* - \frac{m z_b}{(EI)_\Sigma} N_s^*; \\ L_3[\varkappa(t), N_s(t), \sigma_b(z, t)] &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \sigma_b^*(z) - \\ &- E_b \left(\frac{N_s^*}{E_s A_s} - z_b \varkappa^* \right); \\ \beta(t) &= -M_{beam} \frac{1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -M_{beam} \frac{1+\varphi}{(EI)_\Sigma}; \\ \alpha_1(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{(1+\varphi) A_b \Delta^*}{1+m}; \\ \alpha_2(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{(1+\varphi) A_b \mu^*}{(EI)_\Sigma}; \\ \alpha_3(z, t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \delta(\sigma_b^*(z)). \end{aligned}$$

Здесь везде $\varphi = E_b C_\infty$.

Система (18) примет вид:

$$\begin{cases} N_s^* - \frac{E_b A_b z_b}{(1+m+\varphi)} \varkappa^* - \frac{(1+\varphi) A_b \Delta^*}{1+m} = 0; \\ \varkappa^* - \frac{m z_b}{(1+\varphi)(EI)_\Sigma} N_s^* + \frac{A_b \mu^*}{(EI)_\Sigma} = -\frac{M_{beam}}{(EI)_\Sigma}; \\ \sigma_b^*(z) - \frac{E_b}{(1+\varphi)} \left(\frac{N_s^*}{E_s A_s} - z_b \varkappa^* \right) + \delta(\sigma_b^*(z)) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь обозначено:

$$(EI)_\Sigma^* = E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi} + \frac{E_b A_b z_b^2}{1+\varphi}.$$

N_s^* и $\varkappa^*$ можно выразить через Δ^* и μ^* :

$$\begin{aligned} \varkappa^* &= -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb,\tau}^*} - \frac{A_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \left(\mu^* - \frac{m}{1+m+\varphi} \Delta^* z_b \right); \\ N_s^* &= -\frac{M E_b A_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} + \\ &+ \frac{A_b}{1+m+\varphi} \left(\left(1+\varphi + \frac{m}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_b A_b z_b^2}{(EI)_{sb,\tau}^*} \right) \Delta^* - \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_b A_b z_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \mu^* \right). \end{aligned}$$

Здесь $(EI)_{sb,\tau}^* = E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi} + \frac{E_b A_b z_b^2}{1+m+\varphi}$ — асимптотическая изгибная жесткость СЖБ-балки в линейном приближении (линейное уравнение ползучести Маслова–Арутюняна). Первые слагаемые в выражениях для N_s^* и $\varkappa^*$ также есть асимптотические решения линейного уравнения Маслова–Арутюняна.

Подстановка N_s^* и $\varkappa^*$ в последнее уравнение системы (19) приводит к решению интегрального уравнения относительно $\sigma_b^*(z)$, что возможно лишь численно. Если задаться определением только напряжения в центре тяжести бетонного сечения (оно близко к среднему напряжению в сечении), то можно ограничиться следующим подходом. Воспользовавшись интегральной теоремой о среднем, имеем

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) dA_b = \frac{1}{A_b} \delta(\sigma_b^*(\xi)) A_b = \\ &= \delta(\sigma_b^*(\xi)) \approx \delta(\sigma_b^*(z_b)) = \delta(\bar{\sigma}_b^*); \\ \mu^* &= \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) z dA_b = \\ &= \delta(\sigma_b^*(\xi)) \xi_b \approx \delta(\sigma_b^*(z_b)) z_b = \delta(\bar{\sigma}_b^*) z_b, \end{aligned}$$

где ξ — некоторая точка бетонного сечения, а $\bar{\sigma}_b^* = \sigma_b^*(z_b)$.

В этом случае из системы (19) можно получить

$$\varkappa^* = -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb,\tau}^*} - \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} \cdot \frac{A_b z_b \delta(\bar{\sigma}_b^*)}{(EI)_{sb,\tau}^*};$$

$$N_s^* = -\frac{M E_b A_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} + \frac{(1+\varphi) A_b \delta(\bar{\sigma}_b^*)}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi}}{(EI)_{sb,\tau}^*};$$

$$\bar{\sigma}_b^* + \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi}}{(EI)_{sb,\tau}^*} \delta(\bar{\sigma}_b^*) - \frac{M E_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} = 0.$$

Последнее нелинейное уравнение легко решается численно, если известен вид функции напряжений $f(\sigma)$.

Более точное решение можно получить, используя квадратурные формулы для интегралов, соответствующих Δ^* и μ^* . Удобным представляется воспользоваться формулой Симпсона. В этом случае будут определяться напряжения в нижних и верхних волокнах бетонного сечения, а также в его центре тяжести.

Пусть

$$\sigma|_{z=z_b+h/2} = \sigma_1; \quad \sigma|_{z=z_b} = \sigma_2; \quad \sigma|_{z=z_b-h/2} = \sigma_3;$$

$$\delta(\sigma_1) = \delta_1; \quad \delta(\sigma_2) = \delta_2; \quad \delta(\sigma_3) = \delta_3.$$

В этих обозначениях

$$\Delta^* = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) dA_b = \frac{1}{6}(\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3);$$

$$\mu^* = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) z dA_b =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\delta_1 \left(z_b + \frac{h}{2} \right) + 4\delta_2 \cdot z_b + \delta_3 \cdot \left(z_b - \frac{h}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} (\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3) z_b + \frac{\delta_1 - \delta_3}{12} h = \Delta^* z_b + \frac{\delta_1 - \delta_3}{12} h;$$

$$s_1(\Delta^*, \mu^*) =$$

$$= \frac{m}{1+m+\varphi} \left(\left(1 + \frac{m}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_b A_b z_b^2}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \right) \Delta^* - \frac{E_b A_b z_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \mu^* \right);$$

$$s_2(\Delta^*, \mu^*) = -\frac{E_b A_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \frac{h}{2} \left(\mu^* - \frac{m}{1+m+\varphi} \Delta^* z_b \right).$$

В этих обозначениях система (19) приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} f(\sigma_1^*) - \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} \left(\frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b + \frac{h}{2} \right) - \\ - s_1(\Delta^*, \mu^*) + s_2(\Delta^*, \mu^*) = 0; \\ f(\sigma_2^*) - \frac{M_{beam} E_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} - s_1(\Delta^*, \mu^*) = 0; \\ f(\sigma_3^*) - \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} \left(\frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b - \frac{h}{2} \right) - \\ - s_1(\Delta^*, \mu^*) + s_2(\Delta^*, \mu^*) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

В качестве начального приближения при решении системы (20) можно взять упругое решение. В принятой системе координат

$$\begin{cases} \sigma_1^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \left(\frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b + \frac{h}{2} \right); \\ \sigma_2^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b; \\ \sigma_3^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \left(\frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b - \frac{h}{2} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Вид функции напряжений $f(\sigma)$ можно взять в соответствии с формулой Сарджина зависимости напряжений от относительных деформаций (по Еврокодам¹):

$$\sigma_b(\eta) = R_* \frac{\eta(k-\eta)}{1+(k-2)\eta},$$

где

$$k = \frac{E_b \varepsilon_{b0}}{R_*}; \quad \eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}};$$

ε_{b0} — величина относительной деформации, соответствующая R_* (табличная величина);

$$R_* = \begin{cases} R_{b,ser} & \text{— в расчетах по деформациям;} \\ R_b & \text{— в расчетах по прочности.} \end{cases}$$

В формуле Сарджина функция $\sigma_b(\eta)$ не является нечетной, т. е. несимметрична относительно начала координат, и вид формулы будет меняться при смене знака относительных деформаций. Поскольку предполагается, что бетон сжат в любом сечении, то для отрицательных значений относительных деформаций напряжения должны также быть отрицательными. Таким образом, формулу можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_b(\eta) = R_* \frac{\eta(k+\eta)}{1-(k-2)\eta}, \quad \eta < 0.$$

¹ EN 1992. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings. Brussels: European Committee for Standardization, 2001.

Полагая в (2) интеграл равным 0, имеем

$$f(\sigma_b(z, t)) = E_b(t) \varepsilon_b(z, t).$$

Из формулы Сарджина можно выразить относительные деформации через напряжение:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} = \frac{1}{2} \left(\frac{-\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right) \pm \sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}}{\pm \sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\sigma) = \frac{E_b \varepsilon_{b0}}{2} \left(\frac{-\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right) + \sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}}{+\sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}} \right). \quad (22)$$

В скобках взят корень со знаком «плюс», поскольку в этом случае $f(\sigma)|_{\sigma=0} = 0$ (вторая ветвь не рассматривается).

С учетом (22) функция $\delta(\sigma)$ запишется следующим образом:

$$\delta(\sigma) = \frac{E_b \varepsilon_{b0}}{2} \left(\frac{-\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right) + \sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}}{+\sqrt{\left(k + (k-2)\frac{\sigma}{R_*}\right)^2 + 4\frac{\sigma}{R_*}}} \right) - \sigma. \quad (23)$$

При малых значениях $\left|\frac{\sigma}{R_*}\right| \ll 1$ функция напряжений $f(\sigma)$ имеет «традиционный» вид:

$$\bar{f}(\sigma) \approx \sigma - \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \frac{\sigma^2}{R_*}. \quad (24)$$

При величинах $\left|\frac{\sigma}{R_*}\right| > 0,5$ приближение становится плохим (рис. 2, графики построены для бетона класса В25).

В работе [5] СЖБ-балка рассматривается по упрощенной модели без учета изгибной жесткости бетонной плиты. Непосредственно в статье взята квадратичная нелинейность, но ничто не мешает использовать функцию напряжений в виде (22). Реализованный в ней подход позволяет сильно упростить анализ, поскольку вместо системы из двух уравнений (относительно $\varkappa(t)$ и $N_s(t)$) рассматривается только одно уравнение относительно $N_s(t)$. Получаемая точность вполне приемлема. Однако в упрощенной модели нельзя дать точную оценку максимальных напряжений в бетоне.

Полученные результаты можно проиллюстрировать примерами.

Рассмотрим следующие СЖБ-балки:

1) пролет 8 м; бетон (два варианта) — классов В10 и В25; бетонное сечение — ширина 1,5 м, высота 0,12 м; стальная балка — двутавр 40Б1 (по ГОСТ Р 57837-2017), $H_s = 0,396$ м, $A_s = 72,16 \cdot 10^{-4}$ м², $I_s = 20\,020 \cdot 10^{-8}$ м⁴;

2) пролет 35 м; бетон (два варианта) — классов В35 и В50; бетонное сечение — ширина 2 м, высота 0,15 м; стальная балка — сварной двутавр, $H_s = 1,006$ м, $A_s = 0,0362$ м², $I_s = 0,00584$ м⁴.

Второй вариант взят из статьи [5] (в статье имеется опечатка — значение момента инерции указано $I_s = 0,0584$ м⁴).

На рис. 3–6 приведены графики напряжений в крайних волокнах в бетонной плите в зависимости от нагрузки для вариантов 1 и 2 соответственно. На рис. 7, 8 — то же для стальных балок. Результаты расчета по линейной и нелинейной теории совмещены. В иллюстративных целях максимальная нагрузка принята заведомо большой.

Величины нагрузки, соответствующие достижению в стальных балках напряжения $R_y = 365$ МПа (предельная нагрузка по упругой работе стальных балок), приведены в таблице, где обозначено: $q_{\text{нелин.расч}}$ — нелинейный расчет для кратковременного нагружения (расчет не приводится); $q_{\text{лини.полз}}$ — линейная ползучесть; $q_{\text{нелин.полз}}$ — нелинейная ползучесть.

Численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

1. Поскольку процессы ползучести достаточно сильно растянуты во времени и при этом происхо-

Рис. 2. Функция напряжений

Рис. 3. Напряжения в бетоне. Балка 40Б1, бетон В10

Рис. 6. Напряжения в бетоне. Балка 100Б, бетон В50

Рис. 4. Напряжения в бетоне. Балка 40Б1, бетон В25

Рис. 7. Напряжения в стальной балке 40Б1

Рис. 5. Напряжения в бетоне. Балка 100Б, бетон В35

Рис. 8. Напряжения в стальной балке 100Б

дит перераспределение внутренних усилий между бетонной плитой и стальной балкой в сторону увеличения напряжений в последней, то имеется некоторый запас по упругой работе стальных балок при кратковременном загрузении. Из таблицы видно,

что эта величина составляет $\approx 10\%$ для первой модельной балки и $\approx 7\%$ для второй. Это обстоятельство важно учитывать для практических применений.

Величины нагрузки, соответствующие предельной нагрузке по упругой работе в стальных балках

Нагрузки, рассчитанные разными способами	Балки 40Б1		Балки 100Б	
	Бетон В10	Бетон В25	Бетон В35	Бетон В50
$q_{\text{нелин.расч}}, \text{ кН}$	60,29	66,58	35,18	36,17
$q_{\text{лин.полз}}, \text{ кН}$	58,20	61,56	34,26	34,94
$q_{\text{нелин.полз}}, \text{ кН}$	54,65	59,60	32,81	33,88

2. Разница в максимальных напряжениях в бетоне в расчетах, учитывающих линейную и нелинейную ползучесть, становится существенной только при высоких уровнях нагружений. При нелинейной работе бетона имеет место выравнивание напряжений в бетонном сечении по высоте. Корректная оценка максимальных напряжений в бетонной части сечения СЖБ-балки при высоких уровнях нагружений может быть проведена только с учетом нелинейной работы бетона как при мгновенном нагружении, так и при длительном, т. е. с учетом нелинейной ползучести.

3. Значения максимальных напряжений в стальной балке в расчетах, учитывающих линейную и нелинейную ползучесть, даже при высоких уровнях нагружений отличаются незначительно.

4. В СЖБ-балках в нелинейном расчете первыми всегда начинают «течь» стальные балки. При этом исчерпание несущей способности (в расчете по предельным состояниям) первым происходит в бетоне (достижение предельных относительных деформаций в верхнем волокне μ_{b2}).

5. Поскольку нагрузка, отвечающая пределу упругой работы стальных балок, в случае учета нелинейной ползучести ниже, чем при мгновенном (кратковременном) нагружении, то эту разницу можно считать запасом по кратковременному нагружению.

6. То обстоятельство, что разница в напряжениях (максимальных и средних) в стальной балке в расчетах с учетом линейной и нелинейной ползучести невелика, позволяет делать вывод о приемлемости расчетов стальных балок в составе СЖБ-балок в статически неопределимых системах с использованием МКЭ (SCAD, ЛИРА и т. п.). Для длительных нагрузок достаточно использовать для бетона начальный модуль дефор-

мации вида $E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}$. При этом полученные напряжения в бетонной части сечения будут требовать перерасчета, который можно проводить по моментам или напряжениям в стальной балке из расчета SCAD по формулам настоящей работы.

Библиографический список

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1952. 327 с.
2. Санжаровский Р. С., Манченко М. М. Нелинейная теория ползучести бетона и железобетона и современные нормы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 23–35.
3. Тамразян А. Г., Есаян С. Г. Механика ползучести бетона. М.: МГСУ, 2012. 490 с.
4. Харлаб В. Д. Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону). СПб.: СПбГАСУ, 2014. 207 с.
5. Харлаб В. Д., Козлов К. В. О расчете сталежелезобетонных балок с учетом линейной и нелинейной ползучести бетона // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 3 (50). С. 109–114.
6. Чепилко С. О. Расчет сталежелезобетонной балки при мгновенном нагружении с учетом нелинейности диаграммы ϵ – σ бетона // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 2 (79). С. 85–94.
7. Чепилко С. О. Линейная ползучесть в сталежелезобетонных балках // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 6 (77). С. 157–165.

References

1. Arutyunyan N. Kh. *Nekotorye voprosy teorii polzuchesti* [Some issues of the creep theory]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1952, 327 p.
2. Sanzharovskiy R. S., Manchenko M. M. *Nelineynaya teoriya polzuchesti betona i zhelezobetona i sovremennyye normy* [Nonlinear theory of creep of concrete and reinforced concrete and modern standards]. *Stroitel'naya*

mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering designs and structures, 2017, no. 1, pp. 23–35.

3. Tamrazyan A. G., Esayan S. G. *Mekhanika polzuchesti betona* [Mechanics of concrete creep]. Moscow, MGSU Publ., 2012, 490 p.

4. Kharlab V. D. *Printsipial'nye voprosy lineynoy teorii polzuchesti (s privyazkoy k betonu)* [Fundamental questions of linear creep theory (with relation to concrete)]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2014, 207 p.

5. Kharlab V. D., Kozlov K. V. *O raschete stalezhelezobetonnykh balok s uchedom lineynoy i nelineynoy polzuchesti betona* [About calculation of composite steel-concrete beams taking into account the linear and nonlinear creep of concrete]. *Vestnik grazhdanskikh*

inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2015, no. 3 (50), pp. 109–114.

6. Chepilko S. O. *Raschet stalezhelezobetonnoy balki pri mgnovennom zagruzhении s uchedom nelineynosti diagrammy ϵ – σ betona* [Calculation of steel-reinforced concrete beam for instant loading taking into account the non-linearity of the concrete diagram ϵ – σ]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 2 (79), pp. 85–94.

7. Chepilko S. O. *Lineynaya polzuchest' v stalezhelezobetonnykh balkakh* [Linear creep in steel-reinforced concrete beams]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 6 (77), pp. 157–165.