АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕГКИХ СТАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD FOR CALCULATING THE STABILITY OF ROD ELEMENTS OF LIGHTWEIGHT STEEL STRUCTURES

Предложен аналитически-численный метод расчета стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) на общую устойчивость, в котором редуцированное сечение заменяется на нередуцированное с компенсирующим догрузением фиктивной продольной силой. Зависимость ее от действующей продольной силы с одно- или двухосным эксцентриситетами устанавливается при их совместном действии по фиктивным напряжениям в центре тяжести ослабления наиболее напряженного сечения стержня. При этом учитывается влияние соответствующих поставленной задаче устойчивости (изгибных, изгибно-крутильных или пространственных) перемещений на усилия. Аналитическая часть решения задач устойчивости построена для известных параметров реального ослабления сечения, которое с помощью EN 1993-1-3–2004 в сочетании с алгоритмом «Сечение» определяется численно при совместном действии всех усилий. Для сокращения объема расчетов предложен обратный ход решения задачи устойчивости в безразмерных параметрах. По предельному состоянию стержня в наиболее нагруженном исходном сечении ($\bar{\sigma}_{\max} = 1$) при заданных параметрах усилий (относительных эксцентриситетах продольной силы, учитывающих перемещения) численно определяются редукция сечения и реально действующие усилия. Затем, в зависимости от гибкости стержня, обратным аналитическим решением устанавливается соответствующее нагружение стержня на его опорах. Предложенный быстроедействующий аналитически-численный метод обратного решения задач устойчивости позволяет с высокой точностью получить необходимый для практики проектирования объем данных по влиянию редукции сечения (коэффициенты потери местной устойчивости) на общую устойчивость.

Ключевые слова: стальные тонкостенные стержни, внецентренное сжатие, общая устойчивость, потеря местной устойчивости и формы сечения, редукция сечения.

The article proposes an analytical-numerical method for calculating the rod elements of lightweight steel structures for general stability, in which the reduced section is replaced with the unreduced one with compensating loading with a fictitious longitudinal force. The dependence of this force with uniaxial or biaxial eccentricities on the acting longitudinal force is established when they are combined acting on fictitious stresses in the center of the weakening gravity of the rod most stressed section. Therewith, the effect of displacements corresponding to the stability tasks (bending, bending-torsional or spatial ones) is taken into consideration. The analytical part of the stability problems' solution is constructed for the known parameters of the real abatement of the cross section, which is determined numerically under the combined action of all efforts using the EN 1993-1-3–2004 in combination with the "Cross-section" algorithm. To reduce the volume of calculations, there is proposed a reverse course of solving the stability problem in dimensionless parameters. The section reduction and the actual forces are numerically determined according to the limiting state of the rod in the most loaded initial section ($\bar{\sigma}_{\max} = 1$) at given force parameters (relative eccentricities of the longitudinal force, taking into account displacements). Then, depending on the flexibility of the rod, the corresponding loading of the rod on its supports is specified by the reverse analytical solution.

Keywords: thin-walled steel rods, eccentric compression, general stability, loss of local stability and section shape, section reduction.

Стержневые элементы легких стальных тонкостенных конструкций (ЛСТК) фактически являются тонкостенными стержнями-оболочками, которые в процессе нагружения, как известно, склонны к потере местной устойчивости и формы сечения, что отражено в соответствующих зарубежных¹ и отечественных² нормах проектирования.

Наряду с этим напомним, что в результате холодного формования профилей, изготовления, транспортировки и монтажа ЛСТК их элементы приобретают: упрочнение металла в местахгиба и остаточные напряжения (физические несовершенства); общие и местные погиби, внецентренное приложение продольных усилий в результате расцентровки узлов и др. (геометрические несовершенства). Эти факторы известны и регламентированы в соответствующих нормативных документах при определении предельных состояний ЛСТК.

Однако они при совместном сочетании стимулируют пространственную работу стержневых элементов практически при любом воздействии. В этих условиях фактическое ослабление сечения, вызванное потерей местной устойчивости и формы сечения, всегда будет несимметричным [1]. Следовательно, любое исходное симметричное сечение в рабочем состоянии стержневого элемента также окажется несимметричным, что следует учитывать в расчетах на устойчивость.

Применение быстродействующего аналитически-численного метода [2] к решению такого сорта задач не представляется возможным, поскольку в его аналитической части для стержней, сечения которых не имеют ни одной оси симметрии, постановка бифуркационных задач устойчивости невозможна [3]. А обращение к трудоемким численным методам даст возможность получить только весьма ограниченное количество результатов, далеко не достаточное для разработки практических рекомендаций.

Принимая во внимание изложенное, можно понять, почему практические методы расчета стержневых элементов ЛСТК на устойчивость

при нескольких параметрах нагружения¹ построены с использованием принципа наложения, который в задачах устойчивости недопустим. Следуя EN¹, можно увидеть, что каждому параметру нагружения соответствует своя симметричная редукция сечения, при которой решение частной задачи устойчивости сильно упрощается.

Справедливости ради следует отметить, что затем использование принципа наложения в EN¹ компенсируется коэффициентами совместного действия параметров нагружения, которые, по нашему мнению, подлежат проверке.

В настоящей статье на основе метода упругих решений, следуя методу [4], предложено аналитическое решение задачи устойчивости тонкостенных упругих стержней открытого профиля, какими являются элементы ЛСТК, имеющие несимметричное ослабление (редукцию) сечения. Последнее может быть определено численно с помощью алгоритма «Сечение» при совместном действии усилий в наиболее напряженном сечении [5, 6], которое на этапе решения задачи общей устойчивости будем считать известным.

Для иллюстрации предложенного метода на первом этапе представим аналитическое решение задач устойчивости стержневого элемента с исходным нередуцированным сечением.

1. Аналитический метод расчета на устойчивость стержней с нередуцированным сечением

Рассмотрим выделенный из конструкции с помощью расчетной длины $l_{ef,x}$ или $l_{ef,y}$ ³ стержневой элемент моносимметричного сечения. На рисунке, а $l_{ef,x}$ и $l_{ef,y}$ показаны в совмещенном виде общей длиной l . Следуя практическим методам расчета³, рассмотрим нагружение стержня продольной силой с равными концевыми двухосными эксцентриситетами (см. рисунок, а): в плоскости симметрии e_y^0 ; из этой плоскости e_x^0 . Закрепление стержня в двух главных плоскостях принято шарнирным при отсутствии угла закручивания концевых сечений, которые свободно деформируются.

Пренебрегая малым разгружающим влиянием изгибно-крутильных перемещений u и θ на перемещения в плоскости большей жесткости ($I_x > I_y$) v (см. рисунок, б), согласно [3], представим уравнение равновесия

¹ EN 1993-1-3–2004. Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1–3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. European Committee for Standardization, 2004.

² СП 260.1325800. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутых оцинкованных профилей и гофрированных листов. М., 2016. 116 с.

³ СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. М., 2017. 139 с.

Расчетная схема стержня: а — схема нагружения; б — схема деформирования

$$EI_x v'' + N^o v = -N^o e_{y,v}^o; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} EI_y u'' + N^o \left[u + \theta (e_{y,u}^o - a_y) \right] &= -N^o e_x^o; \\ EI_\omega \theta^{IV} - GI_k \theta'' + N^o (e_{y,u}^o - a_y) u'' + \\ &+ N^o (i_A^2 + 2\beta_y e_{y,u}^o) \theta'' = 0, \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где I_x , I_y , I_ω — осевые и секториальный моменты инерции сечения; I_k — момент инерции чистого кручения; $i_A^2 = i_p^2 + a_y^2$; i_p — полярный радиус инерции; a_y — центр изгиба; $\beta_y = (2I_y)^{-1} \int_A (x^2 + y^2) \cdot y dA - a_y$.

Уравнение (1) соответствует изгибной форме потери устойчивости в плоскости симметрии, а система (2) — изгибно-крутильной. Следуя нормам проектирования³, в первом случае $e_{y,v}^o$ принимается по максимальному моменту, а во втором $e_{y,u}^o$ — по наибольшему моменту в средней трети длины стержня.

Аналитические решения уравнения (1) и системы (2) [7] представлены в работе [8], в соответствии с ними деформационные усилия в наиболее напряженном среднем сечении определяются:

- при изгибе в плоскости симметрии (решение уравнения (1)):

$$M_x = N^o e_{y,v}^o \left[1 + \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{8} \left(1 - \frac{\phi \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right]; \quad (3)$$

- при изгибе из плоскости симметрии в сочетании с кручением (решение системы уравнений (2)):

$$M_y = N^o e_x^o \left\{ \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^o} \right)^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^o} \frac{\phi \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) \eta - 1 \right] \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\eta = \left[\left(1 - \frac{\phi}{\Phi_{cr1}} \right) \left(1 - \frac{\phi}{\Phi_{cr2}} \right) \right]^{-1}$; $\phi = \frac{N^o}{R_y A}$;

$\bar{\lambda}_x = \frac{l_{ef,x}}{i_x} \sqrt{\frac{R_y}{E}}$, $\bar{\lambda}_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y} \sqrt{\frac{R_y}{E}}$ — условные гибкости стержня в плоскости симметрии и из этой плоскости; $\Phi_{cr1} = N_{cr1} / R_y A$, $\Phi_{cr2} = N_{cr2} / R_y A$ — коэффициенты критических сил N_{cr1} и N_{cr2} , которые вытекают из соответствующего решения бифуркационной задачи устойчивости [9] (решение системы уравнений (2)), когда $e_x^o = 0$:

$$\varphi_{cr1,2} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{a}}, \quad (5)$$

где

$$b = \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \left[\frac{I_y (e_{y,u}^0)^2}{1 + \frac{I_y (e_{y,u}^0)^2}{I_\omega}} \times \left(\frac{i_A^2}{(e_{y,u}^0)^2} + \frac{2\beta_y}{e_{y,u}^0} \right) \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right];$$

$$a = \frac{\bar{\lambda}_y^4}{\pi^4} \frac{I_y (e_{y,u}^0)^2}{I_\omega} \times \left[\left(\frac{i_A^2}{(e_{y,u}^0)^2} + \frac{2\beta_y}{e_{y,u}^0} \right) - \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right)^{-1} \right], \quad (6)$$

$k = \sqrt{GI_k (EI_\omega)^{-1}}$ — изгибно-крутильная характеристика.

При относительно малых значениях эксцентриситетов $e_{y,u}^0$, определяемых $(e_{y,u}^0 - a_y)^2 \leq (i_A^2 + 2\beta_y \cdot e_{y,u}^0)$, φ_{cr1} преимущественно характеризует изгибную из плоскости симметрии форму потери устойчивости, а φ_{cr2} — крутильную. С увеличением $e_{y,u}^0$, когда $(e_{y,u}^0 - a_y)^2 > (i_A^2 + 2\beta_y \cdot e_{y,u}^0)$, φ_{cr1} соответствует заданному направлению силы, а φ_{cr2} — обратному.

Используя решения (3) и (4), представим соответствующие предельному состоянию $\bar{\sigma}_{\max} = \sigma_{\max} / R_y = 1$ выражения для максимальных фибровых напряжений, позволяющих определить коэффициенты потери устойчивости при различных формах деформирования.

1. Изгибная форма потери устойчивости ($e_x^0 = 0$) с выделением стержневого элемента из конструкции по l_{efx} :

$$\bar{\sigma}_{\max} = \varphi_{ex} \left[1 + m_{x,v}^0 \left(1 + \frac{0,125 \varphi_{ex} \bar{\lambda}_x^2}{1 - \varphi_{ex} \bar{\lambda}_x^2 / \pi^2} \right) \right] = 1. \quad (7)$$

Коэффициент φ_{ex} можно получить из решения квадратного уравнения, вытекающего из (7):

$$\varphi_{ex}^2 a_{ex} - \varphi_{ex} b_{ex} + 1 = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } a_{ex} = \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} \left[1 - m_{x,v}^0 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \right]; b_{ex} = 1 + m_{x,v}^0 + \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2}.$$

2. Изгибно-крутильная форма потери устойчивости ($e_{y,u}^0 \neq 0, e_x^0 \neq 0$) с выделением стержневого элемента по l_{efy} при $I_x \gg I_y$, когда можно пренебречь влиянием перемещений в плоскости большой жесткости на усилия:

$$\bar{\sigma}_{\max} = \varphi_{yc} (1 + m_{x,u}^0 + m_y^0 K_{d,y}) = 1, \quad (9)$$

где

$$K_{d,y} = 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \right)^{-1} \left[\left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \cdot \frac{\varphi_{yc} \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) \cdot \eta - 1 \right]; \quad (10)$$

$K_{d,y}$ — деформационный коэффициент, учитывающий влияние изгибно-крутильных перемещений на устойчивость.

Для удобства определения φ_{yc} уравнение (9) преобразуем в кубическое:

$$\varphi_{yc}^3 a_{yc} - \varphi_{yc}^2 b_{yc} + \varphi_{yc} c_{yc} - 1 = 0, \quad (11)$$

где $a_{yc} = (k_1 - k_2) / k_3$;

$$b_{yc} = a_{yc} k_4 + k_3^{-1} + k_2 \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \cdot \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2}; c_{yc} = k_1 + k_4 / k_3;$$

$$k_1 = 1 + m_{x,u}^0 + m_y^0; k_2 = m_y^0 \cdot \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \right)^{-1};$$

$$k_3 = \varphi_{cr1} \varphi_{cr2}; k_4 = \varphi_{cr1} + \varphi_{cr2}.$$

В (8), (9) и (11) обозначено: φ_{ex} и φ_{yc} — коэффициенты потери устойчивости по изгибной и изгибно-крутильной формам, которые определяются решением уравнений (8) и (11); $m_{x,v}^0 = e_{y,v}^0 / \rho_x$; $m_{x,u}^0 = e_{y,u}^0 / \rho_x$; $m_y^0 = e_x^0 / \rho_y$ — относительные эксцентриситеты; ρ_x, ρ_y — ядровые расстояния.

3. Пространственная форма потери устойчивости при соотношениях радиусов инерции сечения $1 \leq i_x / i_y \leq 2,5$:

$$\bar{\sigma}_{\max} = \varphi_{пр} (1 + m_{x,u}^0 K_{d,xu} + m_y^0 K_{d,y}) = 1, \quad (12)$$

$$\text{где } K_{d,xu} = 1 + \frac{\varphi_{пр} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{8} \left(1 - \frac{\varphi_{пр} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \right)^{-1}; \quad (13)$$

$K_{d,xu}$ — деформационный коэффициент, учитывающий влияние переменной в плоскости симметрии на устойчивость; $\bar{\lambda}_{x,u} = \bar{\lambda}_y \cdot i_y / i_x$; $K_{d,y}$ — определяются по (10) с заменой φ_{yc} на $\varphi_{пр}$.

Уравнение (12) представим в удобном для определения $\varphi_{пр}$ виде:

$$\varphi_{\text{пр}}^4 a_{\text{пр}} - \varphi_{\text{пр}}^3 b_{\text{пр}} + \varphi_{\text{пр}}^2 c_{\text{пр}} - \varphi_{\text{пр}} d_{\text{пр}} + 1 = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } a_{\text{пр}} = \frac{\bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \frac{1}{k_3} \left(k_1 - k_2 - m_{x,u}^0 \frac{\pi^2}{8} \right);$$

$$b_{\text{пр}} = \frac{k_1 - k_2}{k_3} + \frac{\bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \frac{1}{k_3} \times$$

$$\times \left[\frac{k_4 (k_1 - k_2) +}{+1 - m_{x,u}^0 \frac{\pi^2}{8} + k_2 k_3 \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2}} \right];$$

$$c_{\text{пр}} = \frac{(k_1 - k_2) k_4 + 1}{k_3} + \frac{\bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \times$$

$$\times \left[k_1 - k_2 + \frac{k_4}{k_3} - m_{x,u}^0 \frac{\pi^2}{8} + k_2 \frac{a_y}{e_{y,u}^0} \left(\frac{\bar{\lambda}_y^2}{\bar{\lambda}_{x,u}^2} + 1 \right) \right];$$

$$d_{\text{пр}} = k_1 + \frac{k_4}{k_3} + \frac{\bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2}.$$

Таким образом, для выделенного из конструкции стержневого элемента по «нормативной» модели³, загруженного продольной силой с равными концевыми двухосными эксцентриситетами, в аналитическом виде получены уравнения (8), (11) и (14), решения которых позволяют определить коэффициенты потери устойчивости по всем возможным формам деформирования.

2. Метод расчета на устойчивость стержней с редуцированным сечением

Решения задач устойчивости стержневых элементов с редуцированным сечением будем проводить на ранее принятых моделях с введением в наиболее сжатой зоне ослабления сечения площадью A_0 с координатами центра тяжести x_0 , y_0 , которое, согласно EN¹, распространяется по всей длине стержня.

Чтобы использовать ранее полученные аналитические решения, применим метод упругих решений, в соответствии с которым редуцированное сечение стержня заменяется на исходное нередуцированное и вводится компенсирующее догружение фиктивной продольной силой N_ϕ с равными концевыми двухосными эксцентриситетами x_0 , y_0 . Последняя является следствием действия заданной силы N^0 , поэтому ее зависимость от N^0 может быть определена по фиктивному напряжению в центре тяжести ослабления при их совместном действии.

Используя уравнение (12), соответствующее пространственной форме деформирования, представим эти напряжения в безразмерных параметрах:

$$\bar{\sigma}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0) =$$

$$= \varphi_{\text{пр},ef} \left(1 + m_{x,u}^{0*} \bar{y}_0 K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^{0*} \bar{x}_0 K_{d,y}^* \right) +$$

$$+ \varphi_\phi \left(1 + m_{x,\phi}^0 \bar{y}_0 K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^0 \bar{x}_0 K_{d,y}^* \right), \quad (15)$$

где

$$m_{x,\phi}^0 = \frac{y_0}{\rho_x}; m_{y,\phi}^0 = \frac{x_0}{\rho_y}; \bar{y}_0 = \frac{y_0}{y_*}; \bar{x}_0 = \frac{x_0}{x_*}; \varphi_\phi = \bar{\sigma}_0 \bar{A}_0;$$

$$\bar{A}_0 = \frac{A_0}{A}.$$

Тогда

$$\varphi_\phi = \varphi_{\text{пр},ef} K_\phi, \quad (16)$$

где

$$K_\phi = \left(1 + m_{x,u}^{0*} \bar{y}_0 K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^{0*} \bar{x}_0 K_{d,y}^* \right) \times$$

$$\times \left[1 / \bar{A}_0 - \left(1 + m_{x,\phi}^0 \bar{y}_0 K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^0 \bar{x}_0 K_{d,y}^* \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

Из вида (15) и (17) следует, что дополнительные пространственные деформации, вызванные действием фиктивной силы N_ϕ , стимулируются заданной силой N^0 с ее коэффициентами влияния:

- перемещений v в плоскости симметрии:

$$K_{d,xu}^* = 1 + \frac{\varphi_{\text{пр},ef} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{8} \left(1 - \frac{\varphi_{\text{пр},ef} \bar{\lambda}_{x,u}^2}{\pi^2} \right)^{-1}; \quad (18)$$

- изгибно-крутильных перемещений u и θ :

$$K_{d,y}^* = 1 + \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^{0*}} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \frac{a_y}{e_{y,u}^{0*}} \frac{\varphi_{\text{пр},ef} \bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{\varphi_{\text{пр},ef}}{\varphi_{cr1}} \right) \left(1 - \frac{\varphi_{\text{пр},ef}}{\varphi_{cr2}} \right) \right]^{-1} - 1 \left. \right\} \quad (19)$$

Учитывая изложенное, уравнение (12) для стержневого элемента с редуцированным сечением примет вид

$$\varphi_{\text{пр},ef} \left[\frac{1 + m_{x,u}^{0*} K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^{0*} K_{d,y}^*}{+ K_\phi \left(1 + m_{x,\phi}^0 K_{d,xu}^* + m_{y,\phi}^0 K_{d,y}^* \right)} \right] = 1, \quad (20)$$

и его решение позволит получить коэффициент потери устойчивости $\varphi_{\text{пр},ef}$ по пространственно-деформированной схеме.

При больших гибкостях $\bar{\lambda}_y$ стержней, имеющих близкие по значению моменты инерции сечения $I_x \approx I_y$, нагруженных продольной силой с малыми эксцентриситетами, в частности случайными («центральное» сжатие), коэффициенты $K_{d,y}^*$, φ_{cr1} и φ_{cr2} в (20) следует определять с использованием деформационного эксцентриситета $e_{y,u}^* = e_{y,u}^{o*} \left(1 - \varphi_{пр,ef} \bar{\lambda}_{x,u}^2 / \pi^2\right)^{-1}$.

Изгибно-крутильную устойчивость ($I_x \gg I_y$) можно исследовать решением уравнения (20) при $K_{d,xu}^* = 1$, а изгибную ($e_x^{o*} = K_{d,y}^* = 0$ — симметрично редуцированное сечение) — при $K_{d,xu}^*$ по (18) с заменой $\bar{\lambda}_{x,u}$ на $\bar{\lambda}_x$.

Следует заметить, что уравнение (20) получено для известных параметров несимметричного ослабления, которые в процессе нагружения подлежат определению, что сильно усложняет решение.

Для сокращения объемов расчетных операций решения такого сорта задач будем проводить обратным методом [8] в такой последовательности.

1. По предельному напряженному состоянию в нередуцированном сечении с заданными деформационными эксцентриситетами $m_{x,u}$, m_y

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = (1 + m_{x,u} + m_y)^{-1} (1 + m_{x,u} \bar{y} + m_y \bar{x}), \quad (21)$$

с помощью, например, EN¹, устанавливаем редукцию сечения (ослабления, вызванные потерей местной устойчивости и формы сечения).

2. Используя алгоритм «Сечение», определяем коэффициент потери устойчивости и параметры фиктивных усилий [8]:

$$\varphi_{пр,ef} = (1 + m_{x,u} + m_y)^{-1} \cdot c_1; \quad (22)$$

$$\varphi_\Phi = (1 + m_{x,u} + m_y)^{-1} \cdot c_{1\Phi};$$

$$m_{x\Phi}^o = c_{2\Phi} / c_{1\Phi}; \quad m_{y\Phi}^o = c_{3\Phi} / c_{1\Phi}, \quad (23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \bar{A}_{ef} - m_{xu} \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c - m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c; \\ c_{1\Phi} &= \bar{A}_o + m_{xu} \frac{\rho_x}{y_*} \bar{y}_c + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{x}_c; \\ c_{2\Phi} &= \bar{y}_c + m_{xu} \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{x,oc}^2 + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{xy,oc}^2; \\ c_{3\Phi} &= \bar{x}_c + m_{xu} \frac{\rho_x}{y_*} \bar{i}_{xy,oc}^2 + m_y \frac{\rho_y}{x_*} \bar{i}_{y,oc}^2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

В (24) обозначено:

$$\bar{A}_{ef} = 1 - \bar{A}_o; \quad \bar{A}_o = \sum_{k=1}^{n_o} \Delta A_{ko}; \quad \bar{y}_c = \sum_{k=1}^{n_o} \bar{y}_{ko} \Delta \bar{A}_k;$$

$$\bar{x}_c = \sum_{k=1}^{n_o} \bar{x}_{ko} \Delta \bar{A}_k; \quad \bar{i}_{x,oc}^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \bar{y}_{ko}^2 \Delta \bar{A}_k;$$

$$\bar{i}_{xy,oc}^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \bar{x}_{ko} \bar{y}_{ko} \Delta \bar{A}_k; \quad \bar{i}_{y,oc}^2 = \sum_{k=1}^{n_o} \bar{x}_{ko}^2 \Delta \bar{A}_k; \quad \bar{x}_{ko} = \frac{x_{ko}}{\rho_y};$$

$$\bar{y}_{ko} = \frac{y_{ko}}{\rho_x}; \quad n_o — \text{число площадок ослабления.}$$

3. По предельному состоянию (20) представим выражение для напряжения в любой точке сечения

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_{пр,ef} \times \left[1 + m_{x,u}^{o*} \bar{y} K_{d,xu}^* + m_y^{o*} \bar{x} K_{d,y}^* + K_\Phi \left(1 + m_{x\Phi}^{o*} \bar{y} K_{d,xu}^* + m_{y\Phi}^{o*} \bar{x} K_{d,y}^* \right) \right], \quad (25)$$

в котором неизвестными являются концевые (недеформационные) относительные эксцентриситеты $m_{x,u}^{o*}$ и m_y^{o*} .

Первый из них можно определить по (25) при $\bar{\sigma}(0,1) = (1 + m_{x,u}) (1 + m_{x,u} + m_y)^{-1}$ для любой назначенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ ($\bar{\lambda}_{x,u} = \bar{\lambda}_y \cdot i_x / i_y$):

$$m_{x,u}^{o*} = \frac{1 + m_{x,u}}{\varphi_{пр,ef} K_{d,xu}^* (1 + m_{x,u} + m_y)} - \left[\frac{1}{K_{d,xu}^*} + \frac{\varphi_\Phi}{\varphi_{пр,ef}} \left(\frac{1}{K_{d,xu}^*} + m_{x\Phi}^{o*} \right) \right], \quad (26)$$

который затем используем ($e_{x,u}^{o*} = m_{x,u}^{o*} \rho_x$) при определении коэффициентов критических сил φ_{cr1} , φ_{cr2} (5) и деформационного коэффициента $K_{d,y}^*$ (19).

А второй — по $\bar{\sigma}(1,0) = (1 + m_y) (1 + m_{x,u} + m_y)^{-1}$:

$$m_y^{o*} = \frac{1 + m_y}{\varphi_{пр,ef} K_{d,y}^* (1 + m_{x,u} + m_y)} - \left[\frac{1}{K_{d,y}^*} + \frac{\varphi_\Phi}{\varphi_{пр,ef}} \left(\frac{1}{K_{d,y}^*} + m_{y\Phi}^{o*} \right) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, по предельному состоянию ($\bar{\sigma}_{\max} = 1$) с заданными деформационными относительными эксцентриситетами $m_{x,u}$ и m_y обратным аналитически-численным методом расчета можно определить соответствующие условия нагружения стержня с редуцированным $\varphi_{пр,ef}$, $m_{x,u}^{o*}$

m_y^{o*} и нередуцированным $\varphi_{пр}$, $m_{x,u}^o$, m_y^o сечениями для любого значения $\bar{\lambda}_y$. Выполнив необходимый для практики проектирования объем таких расчетов, можно построить зависимости $\varphi_{пр,ef}$ от $m_{x,u}^{o*}$, m_y^{o*} и $\varphi_{пр}$ от $m_{x,u}^o$, m_y^o для различных значений $\bar{\lambda}_y$. При этом, сопоставляя значения $\varphi_{пр,ef}$ и $\varphi_{пр}$, когда $m_{x,u}^{o*} = m_{x,u}^o$, $m_y^{o*} = m_y^o$, влияние редукции сечения на устойчивость можно оценить коэффициентом потери местной устойчивости $\varphi_{loc} = \varphi_{пр,ef} / \varphi_{пр}$.

Принимая $K_{d,xu}^* = K_{d,y}^* = 1$, получим φ_{loc} применительно к прочности стержневых элементов при одновременном трехпараметрическом загрузении [10].

Выводы

Предложен аналитический метод расчета стержневых элементов ЛСТК, который при обратном решении задач общей устойчивости позволяет сократить время расчета на несколько порядков относительно существующих. По заданным силовым факторам численно определяются редукция сечения и фактическое загрузение деформационными усилиями стержня в наиболее напряженном сечении, по которым аналитическим методом устанавливается соответствующее загрузение стержня продольной силой с двухосными эксцентриситетами.

1. Результаты расчета таким методом являются более достоверными по следующим причинам:

- редукция сечения и общая устойчивость определяются при совместном действии всех усилий, а в нормах проектирования (EN 1993-1-3-2004, СП 260.1325800.2016) — при раздельном их действии;

- аналитическое решение задачи пространственной устойчивости выделенных из конструкции симметрично нагруженных стержней с редуцированным открытым профилем обладает высокой точностью;

- фиктивная сила, являющаяся результатом действия заданной, в рамках аналитического решения полностью компенсирует редукцию сечения.

2. В практических методах расчета редукцию сечения можно учесть коэффициентом потери местной устойчивости φ_{loc} . Тогда проверка общей устойчивости приобретает традиционный вид:

$$\frac{N}{\gamma_c R_y \varphi_{loc} \varphi_A} \leq 1, \quad (28)$$

где φ — коэффициент потери общей устойчивости стержня с нередуцированным сечением.

Библиографический список

1. Белый Г. И. Особенности работы стержневых элементов конструкций из оцинкованных гнутых профилей // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 3 (32). С. 99–103.
2. Белый Г. И. О расчете упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме с учетом касательных напряжений и деформации сдвига // Металлические конструкции и испытания сооружений: межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ. 1985. № 62. С. 10–20.
3. Бейлин Е. А. Общие уравнения деформационного расчета и устойчивости тонкостенных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. 1969. № 5. С. 35–41.
4. Белый Г. И. О расчете упругих стержней по деформированной схеме при действии активных и параметрических нагрузок // Механика стержневых систем и сплошных сред: сб. науч. тр. ЛИСИ. 1980. № 32. С. 41–48.
5. Белый Г. И. К расчету на устойчивость стержневых элементов конструкций из тонкостенных холодногнутох профилей // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 3 (56). С. 46–51.
6. Кузнецов А. Ю. Прочность и пространственная устойчивость составных стержневых элементов конструкций из холодногнутох профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2013. 25 с.
7. Бейлин Е. А., Белый Г. И. К деформационному расчету упругих систем, подверженных одновременному действию активных и параметрических нагрузок // Строительная механика и расчет сооружений. 1976. № 3. С. 30–34.
8. Белый Г. И. Развитие методов расчета стержневых элементов стальных конструкций при многопараметрическом загрузении // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 3 (80). С. 43–54.
9. Белый Г. И. Новые положения в инженерной методике расчета на устойчивость стальных стержневых элементов конструкции из холодногнутох профилей // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 2 (61). С. 75–80.
10. Белый Г. И., Смирнов М. О. Совершенствование инженерной методики расчета на прочность стержневых элементов легких стальных тонкостенных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 1 (78). С. 72–81.

References

1. Belyy G. I. *Osobennosti raboty sterzhnevyykh elementov konstruktsiy iz otsinkovannykh gnutykh profiley* [Behavior features of rod elements of constructions from galvanized bent profiles]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2012, no. 3 (32), pp. 99–103.
2. Belyy G. I. *O raschete uprugoplasticheskikh tonkostennykh sterzhney po prostranstvenno-deformirovannoy skheme s uchetom kasatel'nykh napryazheniy i deformatsii sdviga* [On the calculation of elastic-plastic thin-walled rods according to a spatially deformed scheme taking into account tangential stresses and shear deformations]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. LISI «Metallicheskie konstruktsii i ispytaniya sooruzheniy»* [LISI Inter-university themat. coll. of sci. works "Metal structures and testing of structures"]. 1985, no. 62, pp. 10–20.
3. Beylin E. A. *Obshchie uravneniya deformatsionnogo rascheta i ustoychivosti tonkostennykh sterzhney* [General equations of deformation calculation and stability of thin-walled rods]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Construction mechanics and calculation of structures*, 1969, no. 5, pp. 35–41.
4. Belyy G. I. *O raschete uprugikh sterzhney po deformirovannoy skheme pri deystvii aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [On the calculation of elastic rods according to a deformed scheme under the action of active and parametric loads]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. LISI «Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred»* [LISI Inter-university. themat. coll. of sci. works "Mechanics of rod systems and continuous media"]. 1980, no. 32, pp. 41–48.
5. Belyy G. I. *K raschetu na ustoychivost' sterzhnevyykh elementov konstruktsiy iz tonkostennykh kholodnogutykh profiley* [To the calculation of rod element stability of structures made of thin-walled cold-formed profiles]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 3 (56), pp. 46–51.
6. Kuznetsov A. Yu. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' sostavnykh sterzhnevyykh elementov konstruktsiy iz kholodnogutykh profiley. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk* [Strength and spatial stability of composite rod elements of structures made of cold-curved profiles. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2013, 25 p.
7. Beylin E. A., Belyy G. I. *K deformatsionnomu raschetu uprugikh sistem, podverzhennykh odnovremennomu deystviyu aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [On the deformation calculation of elastic systems subjected to simultaneous action of active and parametric loads]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Construction mechanics and calculation of structures*, 1976, no. 3, pp. 30–34.
8. Belyy G. I. *Razvitie metodov rascheta sterzhnevyykh elementov stal'nykh konstruktsiy pri mnogoparametricheskom zagruzhenii* [Development of methods for calculating rod elements of steel structures under multi-parameter loading.]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 3 (80), pp. 43–54.
9. Belyy G. I. *Novye polozeniya v inzhenernoy metodike rascheta na ustoychivost' stal'nykh sterzhnevyykh elementov konstruktsiy iz kholodnogutykh profiley* [New provisions in the engineering calculation procedure on the stability of steel bar elements of structures made of cold-formed profiles.]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 2 (61), pp. 75–80.
10. Belyy G. I., Smirnov M. O. *Sovershenstvovanie inzhenernoy metodiki rascheta na prochnost' sterzhnevyykh elementov legkikh stal'nykh tonkostennykh konstruktsiy* [Improvement of engineering methods for calculating the strength of core elements of light steel thin-walled structures]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2020, no. 1 (78), pp. 72–81.