УДК 624.04

© Р. Н. Гузеев, канд. техн. наук, доцент

© Р. О. Копров, магистрант

(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: guzeev.roman@gmail.com,

koprov-roman@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-4-100-105

© R. N. Guzeev, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© R. O. Koprov, undergraduate

(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)

E-mail: guzeev.roman@gmail.com,

koprov-roman@yandex.ru

СВОБОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАНТЫ С ВНЕШНИМ ДЕМПФЕРОМ

FREE NONLINEAR VIBRATION OF THE CABLE WITH EXTERNAL DAMPER

Предложен численный алгоритм анализа нелинейных колебаний ванты с внешним вязким демпфером на основе явного интегрирования уравнений движения. Алгоритм позволяет учитывать как геометрическую нелинейность ванты, так и нелинейности, связанные с демпфером. Выполнен анализ нелинейных свободных колебаний по определению общего декремента колебаний системы с демпфером. Определены оптимальные параметры внешнего вязкого демпфера. Получены зависимости оптимальных параметров демпфирующей системы в зависимости от приведенной координаты установки демпфера.

Ключевые слова: вантовые системы, нелинейные колебания, вязкий демпфер, численный метод.

The numerical analysis for cable nonlinear vibration with external viscous damper based on explicit integration equation of motion is proposed. The algorithm allows taking into account both the geometry non-linearity of the cable and the non-linearity associated with the damper. There has been made an analysis of free nonlinear vibration to determine the total vibration decrement of the system with damper. The optimal parameters for external viscous damper are determined. There have been obtained dependences for damping system optimal parameters in relation to the reduced damper coordinate.

Keywords: cable systems, nonlinear vibrations, viscous damper, numerical method.

Вантовые элементы строительных конструкций подвержены целому ряду воздействий, вызывающих колебания вант [1, 17, 18]. К таким воздействиям можно отнести колебания, вызванные возмущением узлов крепления вант [16]. Кроме того, ванты находятся в ветровом потоке, что может привести к возникновению негативных аэроупругих явлений [3, 9, 14], таких как бафтинг, галопирование. Также для вант возможно возникновение динамической неустойчивости в виде параметрического резонанса [16]. В настоящее время для борьбы с вибрацией вант

используют два подхода: настройку частот колебаний вант вне резонансного диапазона и увеличение демпфирования [17].

Следует отметить, что ванты имеют довольно низкую собственную демпфирующую способность [1]. Демпфирование вантового элемента вызвано трением между составными элементами (проводами и канатами) или в узлах его креплений. Согласно [1] логарифмический декремент варьируется от 0,3 до 1,8 %, в зависимости от используемой технологии.

На практике для увеличения демпфирования на расстоянии x_c от нижнего узла крепления устанавливается демпферное устройство. Такое устройство может быть гидравлическим демпфером, эластомерным демпфером или демпфером сухого трения [2, 10, 11].

Большинство исследователей внешний сосредоточенный демпфер рассматривают как эквивалентный демпфер вязкого трения, в котором сила трения прямо пропорциональна скорости [2, 4–8, 10, 11]. При этом при увеличении вязкости после некоторого значения C_{opt} эффективность демпфера начинает снижаться. При бесконечном увеличении вязкости демпфер превращается в дополнительную опору, что приводит лишь к незначительному смещению частоты без увеличения демпфирования ванта. Определению величины C_{opt} посвящены работы [6, 10, 12, 13], результаты которых приведены в табл. 1.

В большинстве работ ванта рассматривается как струна с сосредоточенным демпфером, причем внутренним трением пренебрегают. При этом волновое уравнение принимает вид

$$T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x - x_c), \quad (1)$$

где $w(x, t)$ — поперечные смещения; T_0 — начальное натяжение струны; C — вязкость демпфера; δ — дельта-функция Дирака.

Следует отметить, что уравнение (1) не учитывает внутреннее демпфирование, геометри-

ческую нелинейность формоизменения ванта, а также провисание ванта.

В настоящей работе для наиболее полного описания динамического поведения ванта была использована явная дискретная схема интегрирования уравнений движения. Данный метод широко используется для исследования динамического поведения нелинейных систем [15]. Для реализации данного подхода ванта разбивается на n элементов с массами m_i в узлах (рис. 1). На каждый узел согласно принципу Даламбера действуют инерционные силы F_a , силы упругости F_{el} и силы демпфирования F_d . Логарифмический декремент определяется по свободным колебаниям, вызванным начальной скоростью в момент времени $t = 0$.

Силы упругости определяются через полные геометрические соотношения и закон Гука без введения упрощающих соотношений, что позволяет учесть геометрическую нелинейность:

$$F_{el,i} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{h} \right)^2} - 1 \right) EA, \quad (2)$$

где w_{i-1}, w_i — перемещения начального и конечного узла элемента; E — модуль упругости; A — площадь поперечного сечения ванта.

Таким образом, для j -го узла выражение для вертикальной составляющей сил упругости будет иметь вид

$$F_{el,j}^y = F_{el,j} \frac{w_{j+1} - w_j}{h} - F_{el,j-1} \frac{w_j - w_{j-1}}{h}. \quad (3)$$

Таблица 1
Оптимальные постоянные и максимальные коэффициенты демпфирования

№ п/п	Авторы	C_{opt} , кН·с/м	ξ_{max} , %
1	Pacheco и др.	$0,1mL\omega_{01} / (n \frac{x_c}{L})$	$0,52 \frac{x_c}{L}$
2	Uno и др.	$\frac{6,25}{2\pi} \frac{mL\omega_{01}x_c / L}{\sin^2(\pi n x_c / L)}$	$\frac{3,3}{2\pi} \frac{x_c}{L}$
3	Yoneda and Maeda	$\frac{6,25}{2\pi} \frac{mL\omega_{01}n x_c / L}{\sin^2(\pi n x_c / L)}$	$\frac{6,25}{2\pi} \frac{x_c}{L} (0,45 + \frac{x_c}{L})$
4	Kovács	$\frac{1}{2\pi} \frac{mL\omega_{01}}{n x_c / L}$	$0,5 \frac{x_c}{L}$

Рис. 1. Расчетная модель ванта

Сила вязкого демпфирования на единицу длины может быть выражена через постоянную вязкого демпфирования γ :

$$F_{damp} = -\gamma \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4)$$

Величину γ можно определить, зная логарифмический декремент δ или относительный коэффициент вязкого демпфирования ξ . Если m — распределенный по длине собственный вес ванта, а ω_1 — ее основная круговая частота, то γ определяется как

$$\gamma = 2m\omega_1\xi, \text{ или } \gamma = m\omega_1\delta / \pi.$$

Влияние сосредоточенного демпфера учитывалось введением в соответствующем узле дополнительной силы $F_c = CV$.

Начальная скорость принята распределенной по закону $v(x, 0) = V_0 \sin(\pi x)$, где V_0 — амплитуда начальной скорости, равная 1 м/с.

Для каждого шага $i = 0 - N$ явной схемы вычисляются перемещения j -го узла $W_{i,j} = W_{i-1,j} + V_{i,j}\Delta t$. Затем вычисляются узловые силы $P_{i,j}$, используя выражения (2)–(4). Тогда узловые ускорения $A_{i,j} = P_{i,j} / m_j$, что позволяет определить узловые скорости: $V_{i+1,j} = V_{i,j} + A_{i,j}\Delta t$. После этого данная процедура выполняется для следующего шага по времени.

Влияние размера элемента h и шага по времени Δt на сходимость результатов оценивалось по частоте и логарифмическому декременту ванта без демпфера. В дальнейшем использовались следующие соотношения для h и Δt :

$$h = \frac{L}{n}; \Delta t = \frac{h}{50c}, \quad (5)$$

где $n = 200$; c — скорость распространения поперечной волны.

Предложенный численный алгоритм был реализован в среде Matlab.

Численный эксперимент выполнен для ванта с характеристиками, приведенными в табл. 2.

Расчеты выполнены для постоянной демпфирования C , меняющейся от 0 до 1800 кН · с/м. Логарифмический декремент колебаний и относительный коэффициент вязкого демпфирования определялись по затуханию амплитуд колебаний. В результате была построена зависимость коэффициента демпфирования от вязкости C сосредоточенного демпфера (рис. 2) при $x_c = 1,5$ м.

При отсутствии демпфера коэффициент демпфирования равен 0,0016, что соответствует свободным колебаниям ванта с логарифмическим декрементом 0,01. С увеличением вязкости демпфера коэффициент демпфирования увеличивается, достигая максимума $\xi_{opt} = 0,00941$ при $C_{opt} = 480$ кН · с/м. Таким образом, установка демпфера увеличила декремент колебаний ванта в 5,9 раза. При дальнейшем увеличении вязкости эффективность демпфера падает.

Хронограммы свободных колебаний при различных значениях C приведены на рис. 3.

Кроме того, было проведено моделирование свободных колебаний ванта для трех разных расстояний демпфера от опоры x_c . Результаты приведены на рис. 4, 5. Также на рис. 4, 5 приведены значения оптимальных постоянных C_{opt} и коэффициентов демпфирования.

Таблица 2

Исходные данные для численного эксперимента

Длина ванта L , м	Погонная масса m , кН/м	Модуль упругости, кН/м ²	Скорость распространения волны c , м/с	Натяжение T_0 , кН	Основная угловая частота ω_1 , рад/с
100,0	94,2	$2,06 \cdot 10^8$	228,1	4905,0	7,169

Рис. 2. График зависимости коэффициента демпфирования от постоянной демпфирования

Рис. 3. График зависимости скорости и перемещений от времени при $x_c = 1,5$ м в середине ваны

Рис. 4. Зависимость C_{opt} от относительной координаты x_c/L Рис. 5. Зависимость максимального коэффициента демпфирования от относительной координаты x_c/L

Результаты, полученные в настоящей работе, близки к значениям, полученным в работах других авторов, относительная разница составляет от 10 до 30 %. Различия в значениях расчетных параметров можно объяснить тем, что в данной работе также были учтены внутренние демпфирование и геометрическая нелинейность ванты. Влияние конструкционного демпфирования выше при величине x_c/L менее 0,01.

Используя полученные данные, принята аппроксимация максимального коэффициента демпфирования в зависимости от относительной координаты положения демпфера:

$$C_{opt} = 0,43 \frac{mL\omega_1}{(x_c/L)^{0,66}}; \quad (6)$$

$$\xi = \xi_s + 0,507 \frac{x_c}{L}, \quad (7)$$

где ξ_s — конструкционный коэффициент демпфирования.

Также хотелось бы отметить, что в дальнейшем для более точной оценки колебаний вантовых элементов необходимо рассмотреть расчетную схему с учетом провисания, это позволит приблизиться к реальной работе вантового элемента.

Выводы

1. Разработан алгоритм анализа колебаний вантового элемента, основанный на явном интегрировании уравнений движения. Основные соотношения алгоритма позволяют учесть геометрическую нелинейность ванты, а также любые другие виды нелинейности при установке внешнего сосредоточенного демпфера.

2. Выполненные расчеты показали существование оптимальной настройки внешнего сосредоточенного вязкого демпфера.

3. На основе выполненных численных экспериментов установлена зависимость оптимальной вязкости демпфера и оптимального относительного коэффициента вязкого демпфирования от относительной координаты положения демпфера.

4. Разработанная методика может быть использована при проектировании эффективной системы гашения колебаний вантовых элементов конструкций.

Библиографический список

1. Caetano E. Cable vibrations in cable-stayed bridges. Zürich: IABSE-AIPC-IVBH, 2007. 188 p.
2. Cheng S., Darivandi N., Ghrib F. The design of an optimal viscous damper for a bridge stay cable using energy-based approach // Journal of Sound and Vibration. 2010. № 22 (329). Pp. 4689–4704.
3. Demartino C., Ricciardelli F. Aerodynamic stability of ice-accreted bridge cables // Journal of Fluids and Structures. 2015. Vol. 52. Pp. 81–100.
4. Fujino Y., Hoang N. Design formulas for damping of a stay cable with a damper // Journal of Structural Engineering. 2008. № 2 (134). Pp. 269–278.
5. Javanbakht M., Cheng S., Ghrib F. Control-oriented model for the dynamic response of a damped cable // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 442. Pp. 249–267.
6. Kovács I. Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung // Die Bautechnik. 1982. Vol. 10. Pp. 325–332.
7. Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper // Journal of Applied Mechanics. 2000. № 4 (67). Pp. 772–776.

8. Lazar I. F., Neild S. A., Wagg D. J. Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers // *Engineering Structures*. 2016. Vol. 122. Pp. 62–71.

9. Matsumoto M., Shiraishi N., Shirato H. Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1992. № 1–3 (43). Pp. 2011–2022.

10. Pacheco M., Fujino Y., Sulekh A. Estimation Curve for Modal Damping in Stay Cables with Viscous Damper // *Journal of Structural Engineering*. 1993. № 6 (119). Pp. 1961–1979.

11. Shi X., Zhu S. Dynamic characteristics of stay cables with inerter dampers // *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 423. Pp. 287–305.

12. Uno K., Kitagawa S., Tsutsumi H., Inoue A., Nakaya S. A Simple Method of Designing Cable Vibration Dampers of Cable-stayed Bridges // *Journal of Structural Engineering*. 1991. Vol. 37A. Pp. 789–798.

13. Yoneda M., Maeda K. A Study on Practical Estimation Method for Structural Damping of Stay Cables with Dampers // *Proceedings of Canada-Japan Workshop on Bridge Aerodynamics*. Ottawa, 1989. Pp. 119–128.

14. Зылев В. Б., Штейн А. В., Григорьев Н. А. Аэродинамическое демпфирование при колебаниях вантовых систем // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 1. С. 44–48.

15. Зылев В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: Инженер, 1999. 144 с.

16. Кадисов Г. М. Динамика вантового автодорожного моста // *Вестник Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии*. 2015. № 6 (46). С. 58–64.

17. Корнеев М. М. Стальные мосты. Киев, 2003. 547 с.

18. Петропавловский А. А., Крыльцов Е. И., Богданов Н. Н., Иосилевский Л. И., Стрелецкий Н. Н., Потапкин А. А., Фридкин В. М., Кравцов М. М. Вантовые мосты / под ред. А. А. Петропавловского. М.: Транспорт, 1985. 224 с.

References

1. Caetano E. *Cable vibrations in cable-stayed bridges*. Zürich: IABSE-AIPC-IVBH Publ., 2007, 188 p.

2. Cheng S., Darivandi N., Ghrib F. The design of an optimal viscous damper for a bridge stay cable using energy-based approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, no. 22 (329), pp. 4689–4704.

3. Demartino C., Ricciardelli F. Aerodynamic stability of ice-accreted bridge cables. *Journal of Fluids and Structures*, 2015, vol. 52, pp. 81–100.

4. Fujino Y., Hoang N. Design formulas for damping of a stay cable with a damper. *Journal of Structural Engineering*, 2008, no. 2 (134), pp. 269–278.

5. Javanbakht M., Cheng S., Ghrib F. Control-oriented model for the dynamic response of a damped cable. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, vol. 442, pp. 249–267.

6. Kovács I. Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildämpfung. *Die Bautechnik*, 1982, vol. 10, pp. 325–332.

7. Krenk S. Vibrations of a taut cable with an external damper. *Journal of Applied Mechanics*, 2000, no. 4 (67), pp. 772–776.

8. Lazar I. F., Neild S. A., Wagg D. J. Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures*, 2016, vol. 122, pp. 62–71.

9. Matsumoto M., Shiraishi N., Shirato H. Rain-wind induced vibration of cables of cable-stayed bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1992, no. 1–3 (43), pp. 2011–2022.

10. Pacheco M., Fujino Y., Sulekh A. Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper. *Journal of Structural Engineering*, 1993, no. 6 (119), pp. 1961–1979.

11. Shi X., Zhu S. Dynamic characteristics of stay cables with inerter dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, vol. 423, pp. 287–305.

12. Uno K., Kitagawa S., Tsutsumi H., Inoue A., Nakaya S. A simple method of designing cable vibration dampers of cable-stayed bridges. *Journal of Structural Engineering*, 1991, vol. 37A, pp. 789–798.

13. Yoneda M., Maeda K. A Study on practical estimation method for structural damping of stay cables with dampers. *Proceedings of Canada-Japan Workshop on Bridge Aerodynamics*. Ottawa, 1989, pp. 119–128.

14. Zylev V. B., Shteyn A. V., Grigor'ev N. A. Aerodinamicheskoe dempfirovanie pri kolebaniyakh vantovykh sistem [Aerodynamic damping during vibrations of cable-stayed systems]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering designs and structures*, 2014, no. 1, pp. 44–48.

15. Zylev V. B. *Vychislitel'nye metody v nelineynoy mekhanike konstruksiy* [Computational methods in nonlinear structural mechanics]. Moscow, Inzhener Publ., 1999, 144 p.

16. Kadisov G. M. *Dinamika vantovogo avtodorozhnogo mosta* [Dynamics of a cable-stayed road bridge]. *Vestnik Sibirskoy gosudarstvennoy avtomobil'no-dorozhnoy akademii – Bulletin of the Siberian State Automobile and Road Academy*, 2015, no. 6 (46), pp. 58–64.

17. Korneev M. M. *Stal'nye mosty* [Steel bridges]. Kiev, 2003, 547 p.

18. Petropavlovskiy A. A., et al. *Vantovye mosty* [Cable-stayed bridges]. Ed. by Petropavlovskiy A. A. Moscow, Transport Publ., 1985, 224 p.