УДК 539.3: 624.04

© В. В. Карпов, д-р техн. наук, профессор

© Е. А. Кобелев, канд. техн. наук

(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: kobelev.e.a.@lan.spbgasu.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-94-100

© V. V. Karpov, Dr. Sci. Tech., Professor

© E. A. Kobelev, PhD in Sci. Tech.

(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
Saint Petersburg, Russia)

E-mail: kobelev.e.a.@lan.spbgasu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR DEFORMATION OF THREE-LAYER SHELLS

Рассмотрен геометрически нелинейный вариант деформирования упругих оболочек произвольного вида с учетом поперечных сдвигов. Построена новая математическая модель нелинейного деформирования тонкостенных упругих изотропных трехслойных оболочек. Каждый слой оболочки выполнен из разных материалов, но с близкими сдвиговыми модулями. Толщина слоев может быть различной. Возможно усреднение всех трех слоев и рассмотрение деформирования трехслойной оболочки как однослойной с приведенными характеристиками модуля упругости и коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: трехслойная оболочка, геометрическая нелинейность, слой, функционал энергии деформации.

The article presents the study results of geometrically nonlinear deformation of elastic shells of arbitrary type with consideration of transverse shifts. There is constructed a new mathematical model of nonlinear deformation of thin-walled elastic isotropic three-layer shells. Each layer of the shell is made of different materials, but with similar shear modules. The thickness of the layers can be different. Averaging of all three layers becomes possible, and deformation of a three-layer shell as a single-layer shell with the given characteristics of the modulus of elasticity and the Poisson's ratio can be considered.

Keywords: three-layer shell, geometric nonlinearity, layer, deformation energy functional.

На основе общей теории тонких оболочек, разработанной В. В. Новожиловым [1], в работах [2–6] была развита нелинейная теория пластин и оболочек, которая позволяет решать задачи как прочности и устойчивости [7–9], так и динамики тонкостенных конструкций с учетом нелинейных эффектов их деформирования [10, 11].

В настоящее время для повышения весовой эффективности, удельной прочности и жесткости тонкостенных конструкций, особенно в строительстве, судостроении, машиностроении и других отраслях современной техники, широко применяются трехслойные оболочки. Слоисто-неоднородная структура таких оболочек позволяет получить необходимые прочностные и жесткостные характеристики, а также тепло-,

звуко-, виброизоляционные свойства трехслойной конструкции.

Созданию расчетных моделей трехслойных пластин и оболочек посвящены работы многих ученых [12–16]. Широкое внедрение в технике и строительстве композиционных материалов, позволяющих создавать конструкции с уникальными свойствами, значительно усложнило расчетные модели. Среди работ, посвященных математическим моделям для расчета тонкостенных конструкций из композиционных материалов, отметим исследования [17–19].

Создание на основе метода конечных элементов (МКЭ) мощных вычислительных комплексов открывает новые возможности для разработки новых расчетных моделей применительно к анализу напряженно-деформированного состояния

многослойных оболочек с нерегулярной структурой [20–23]. Однако решение задач геометрически нелинейного деформирования трехслойных оболочек МКЭ связано со значительными вычислительными трудностями.

Математические модели для расчета современных тонкостенных трехслойных конструкций должны удовлетворять многим требованиям, в том числе позволять с высокой степенью точности определять напряженно-деформированное состояние и несущую способность конструкции при широком спектре внешних воздействий с учетом конструктивных особенностей слоев [24–26].

Созданию новой математической модели нелинейного деформирования тонкостенных упругих изотропных трехслойных оболочек посвящена настоящая работа.

Рассматриваются трехслойные оболочки произвольного вида. Номера слоев обозначены на рисунке.

Поверхность, разделяющую первый и второй слой, принимаем за координатную поверхность. Начало координат выбирается в точке O координатной поверхности, при этом оси x и y расположены в координатной поверхности, а ось z направляется вдоль нормали к координатной поверхности. В этой координатной поверхности перемещения вдоль осей x, y, z обозначим, соответственно, u, v, w . Толщину k -го слоя обозначим через h_k . Считаем, что сдвиг между слоями отсутствует. Считаем, что справедлива гипотеза о несжимаемости материала, поэтому перемещение в направлении оси z в каждом слое оболочки одинаково и равно w . Перемещения вдоль осей x

и y в k -м слое, отстоящем на z от координатной поверхности оболочки, равны, соответственно, u_k^z, v_k^z . С учетом поперечных сдвигов эти перемещения примут вид

$$u_1^z = u + z\psi_{11}, u_2^z = u + z\psi_{12};$$

$$u_3^z = u + h_2(\psi_{12} - \psi_{13}) + z\psi_{13};$$

$$v_1^z = v + z\psi_{21};$$

$$v_2^z = v + z\psi_{22}, v_3^z = v + h_2(\psi_{22} - \psi_{23}) + z\psi_{23}. \quad (1)$$

Выражения для u_3 и v_3 выбраны таким образом, чтобы перемещения вдоль осей x и y были непрерывными в направлении оси z . Здесь ψ_{1k} и ψ_{2k} — углы поворота нормали в плоскостях xOz и yOz , соответственно, для каждого из слоев. Таким образом, для трехслойной оболочки неизвестными функциями будут $u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_{11}(x, y), \psi_{12}(x, y), \psi_{13}(x, y), \psi_{21}(x, y), \psi_{22}(x, y), \psi_{23}(x, y)$.

Рассмотрим, какой вид будут иметь деформации в слоях оболочки.

Деформации в координатной поверхности для оболочки произвольного вида с учетом геометрической нелинейности [9, 10] будут иметь вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v - k_x w + \frac{1}{2} \theta_1^2;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u - k_y w + \frac{1}{2} \theta_2^2; \quad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} u - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} v + \theta_1 \theta_2.$$

Здесь

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} + k_x u\right); \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} + k_y v\right);$$

$$k_x = \frac{1}{R_1}; k_y = \frac{1}{R_2};$$

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей x и y соответственно; A, B — параметры Ляме оболочки.

Будем рассматривать тонкие оболочки, когда общая толщина оболочки $h = h_1 + h_2 + h_3$ удовлетворяет неравенству $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$, где R это R_1 или R_2 .

Как отмечено в работе [1], большинство реально встречающихся оболочек имеют отношение h/R в пределах $\frac{1}{100} > \frac{h}{R} > \frac{1}{1000}$, так что и рассматриваемые трехслойные оболочки можно считать тонкими.

Общий вид трехслойной оболочки

Известно, что перемещения u и v на порядок меньше, чем w , поэтому примем $\frac{u}{R_1} \approx 0$, $\frac{v}{R_2} \approx 0$, как это было предложено в работе [2]. Поэтому в дальнейшем принимаем

$$\theta_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Теперь запишем выражения деформаций в произвольном слое, отстоящем на z от координатной поверхности, для каждого из трех слоев. Для этого подставим в (2) вместо u и v их выражение (1), при этом считаем z/R малыми и пренебрегаем ими по сравнению с другими членами.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^z &= \varepsilon_x + z\chi_1^{(1)}, \quad \chi_1^{(1)} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_{21}; \\ \varepsilon_{12}^z &= \varepsilon_x + z\chi_1^{(2)}, \quad \chi_1^{(2)} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_{22}; \\ \varepsilon_{13}^z &= \varepsilon_x + z\chi_1^{(3)} + h_2 A_{13}, \quad \chi_1^{(3)} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{13}}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_{23}; \\ A_{13} &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{12} - \psi_{13}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} (\psi_{22} - \psi_{23}); \\ \varepsilon_{21}^z &= \varepsilon_y + z\chi_2^{(1)}, \quad \chi_2^{(1)} = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{21}}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{11}; \\ \varepsilon_{22}^z &= \varepsilon_y + z\chi_2^{(2)}, \quad \chi_2^{(2)} = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{22}}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{12}; \\ \varepsilon_{23}^z &= \varepsilon_y + z\chi_2^{(3)} + h_2 A_{23}, \quad \chi_2^{(3)} = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{23}}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{13}; \\ A_{23} &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{22} - \psi_{23}) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} (\psi_{12} - \psi_{13}); \\ \gamma_{12}^{(1)} &= \gamma_{xy} + z\chi_{12}^{(1)}, \\ \chi_{12}^{(1)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{21}}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \psi_{11} + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{21} \right); \\ \gamma_{12}^{(2)} &= \gamma_{xy} + z\chi_{12}^{(2)}, \\ \chi_{12}^{(2)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{22}}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \psi_{12} + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{22} \right); \\ \gamma_{12}^{(3)} &= \gamma_{xy} + z\chi_{12}^{(3)} + h_2 A_{33}, \\ \chi_{12}^{(3)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_{23}}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_{13}}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \psi_{13} + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_{23} \right); \\ A_{33} &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{22} - \psi_{23}) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} (\psi_{12} - \psi_{13}) + \\ &+ \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial A}{\partial y} (\psi_{12} - \psi_{13}) + \frac{\partial B}{\partial x} (\psi_{22} - \psi_{23}) \right]. \end{aligned}$$

Кроме того, если учитываются поперечные сдвиги, то появятся деформации xOz и yOz для каждого слоя, которые примут вид

$$\begin{aligned} \gamma_{13}^{(1)} &= kf(z)(\psi_{11} - \theta_1); \quad \gamma_{13}^{(2)} = kf(z)(\psi_{12} - \theta_1); \\ \gamma_{13}^{(3)} &= kf(z)(\psi_{13} - \theta_1); \quad \gamma_{23}^{(1)} = kf(z)(\psi_{21} - \theta_2); \\ \gamma_{23}^{(2)} &= kf(z)(\psi_{22} - \theta_2); \quad \gamma_{23}^{(3)} = kf(z)(\psi_{23} - \theta_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $f(z)$ — функция, характеризующая распределение напряжений вдоль оси z [3]. На верхней и нижней поверхностях оболочки эта функция равна нулю. Интеграл от этой функции по суммарной толщине оболочки должен равняться этой толщине, т. е. h . Коэффициент $k = \frac{5}{6}$. Поэтому при вычислении поперечных сил в каждом слое трехслойной оболочки будем брать толщину этого слоя.

Будем считать материал оболочки изотропным и упругим, но с различными характеристиками материала E_k , μ_k в k -м слое.

Запишем физические соотношения (связь напряжений и деформаций) на основе закона Гука. Нормальные напряжения вдоль оси x в каждом слое оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1-\mu_1^2} (\varepsilon_{11}^z + \mu_1 \varepsilon_{21}^z); \\ \sigma_{12} &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} (\varepsilon_{12}^z + \mu_2 \varepsilon_{22}^z); \\ \sigma_{13} &= \frac{E_3}{1-\mu_3^2} (\varepsilon_{13}^z + \mu_3 \varepsilon_{23}^z). \end{aligned} \quad (5)$$

Нормальные напряжения вдоль оси y в каждом слое

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \frac{E_1}{1-\mu_1^2} (\varepsilon_{21}^z + \mu_1 \varepsilon_{11}^z); \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} (\varepsilon_{22}^z + \mu_2 \varepsilon_{12}^z); \\ \sigma_{23} &= \frac{E_3}{1-\mu_3^2} (\varepsilon_{23}^z + \mu_3 \varepsilon_{13}^z). \end{aligned} \quad (6)$$

Касательные напряжения в плоскости xOy

$$\begin{aligned} \tau_{12}^{(1)} &= \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} \gamma_{12}^{(1)}; \quad \tau_{12}^{(2)} = \frac{E_2}{2(1+\mu_2)} \gamma_{12}^{(2)}; \\ \tau_{12}^{(3)} &= \frac{E_3}{2(1+\mu_3)} \gamma_{12}^{(3)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Касательные напряжения в плоскости xOz

$$\tau_{13}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} \gamma_{13}^{(1)}; \quad \tau_{13}^{(2)} = \frac{E_2}{2(1+\mu_2)} \gamma_{13}^{(2)};$$

$$\tau_{13}^{(3)} = \frac{E_3}{2(1+\mu_3)} \gamma_{13}^{(3)}. \quad (8)$$

Касательные напряжения в плоскости yOz

$$\tau_{23}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} \gamma_{23}^{(1)}; \quad \tau_{23}^{(2)} = \frac{E_2}{2(1+\mu_2)} \gamma_{23}^{(2)}; \quad \tau_{23}^{(3)} = \frac{E_3}{2(1+\mu_3)} \gamma_{23}^{(3)}. \quad (9)$$

Пределы изменения переменной z для первого слоя $-h_1 \leq z \leq 0$, для второго слоя $0 \leq z \leq h_2$, для третьего слоя $-h_2 \leq z \leq h_2 + h_3$.

Полная потенциальная энергия деформации для трехслойной оболочки будет иметь вид $\Theta = \Pi - A$, где

$$A = \int_0^a \int_0^b q w dx dy; \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\int_{-h_1}^0 \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11}^z + \sigma_{21} \varepsilon_{21}^z + \tau_{12}^{(1)} \gamma_{12}^{(1)} + \tau_{13}^{(1)} \gamma_{13}^{(1)} + \tau_{23}^{(1)} \gamma_{23}^{(1)} \right) dz + \int_0^{h_2} \left(\sigma_{12} \varepsilon_{12}^z + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^z + \tau_{12}^{(2)} \gamma_{12}^{(2)} + \tau_{13}^{(2)} \gamma_{13}^{(2)} + \tau_{23}^{(2)} \gamma_{23}^{(2)} \right) dz + \int_{h_2}^{h_2+h_3} \left(\sigma_{13} \varepsilon_{13}^z + \sigma_{23} \varepsilon_{23}^z + \tau_{12}^{(3)} \gamma_{12}^{(3)} + \tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)} \right) dz \right] AB dx dy.$$

Заготовим некоторые соотношения:

$$F_1 = \int_{-h_1}^0 dz = h_1, \quad S_1 = \int_{-h_1}^0 z dz = -\frac{h_1^2}{2}, \quad J_1 = \int_{-h_1}^0 z^2 dz = \frac{h_1^3}{3}; \\ F_2 = \int_0^{h_2} dz = h_2, \quad S_2 = \int_0^{h_2} z dz = \frac{h_2^2}{2}, \quad J_2 = \int_0^{h_2} z^2 dz = \frac{h_2^3}{3}; \\ F_3 = \int_{h_2}^{h_2+h_3} dz = h_3, \quad S_3 = \int_{h_2}^{h_2+h_3} z dz = \frac{1}{2} h_3 (2h_2 + h_3), \\ J_3 = \int_{h_2}^{h_2+h_3} z^2 dz = \frac{1}{3} h_3 (3h_2^2 + 3h_2 h_3 + h_3^2).$$

$$\int_{-h_1}^0 \left(\sigma_{11} \varepsilon_{11}^z + \sigma_{21} \varepsilon_{21}^z + \tau_{12}^{(1)} \gamma_{12}^{(1)} + \tau_{13}^{(1)} \gamma_{13}^{(1)} + \tau_{23}^{(1)} \gamma_{23}^{(1)} \right) dz = \\ = N_x^{(1)} \varepsilon_x + M_x^{(1)} \chi_1^{(1)} + N_{xy}^{(1)} \gamma_{xy} + M_{xy}^{(1)} \chi_{12}^{(1)} + N_y^{(1)} \varepsilon_y + \\ + M_y^{(1)} \chi_2^{(1)} + Q_x^{(1)} (\psi_{11} - \theta_1) + Q_y^{(1)} (\psi_{21} - \theta_2).$$

Здесь

$$N_x^{(1)} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_1 \varepsilon_y) F_1 + (\chi_1^{(1)} + \mu_1 \chi_2^{(1)}) S_1 \right]; \\ M_x^{(1)} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_1 \varepsilon_y) S_1 + (\chi_1^{(1)} + \mu_1 \chi_2^{(1)}) J_1 \right]; \quad (12) \\ N_{xy}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} (\gamma_{xy} F_1 + \chi_{12}^{(1)} S_1); \\ Q_x^{(1)} = \frac{E_1 F_1 k}{2(1+\mu_1)} (\psi_{11} - \theta_1); \\ M_{xy}^{(1)} = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} (\gamma_{xy} S_1 + \chi_{12}^{(1)} J_1).$$

Аналогично записываются выражения для $N_y^{(1)}, M_y^{(1)}$ и $Q_y^{(1)}$.

$$\int_0^{h_2} \left(\sigma_{12} \varepsilon_{12}^z + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^z + \tau_{12}^{(2)} \gamma_{12}^{(2)} + \tau_{13}^{(2)} \gamma_{13}^{(2)} + \tau_{23}^{(2)} \gamma_{23}^{(2)} \right) dz = \\ = N_x^{(2)} \varepsilon_x + M_x^{(2)} \chi_1^{(2)} + N_{xy}^{(2)} \gamma_{xy} + M_{xy}^{(2)} \chi_{12}^{(2)} + N_y^{(2)} \varepsilon_y + \\ + M_y^{(2)} \chi_2^{(2)} + Q_x^{(2)} (\psi_{12} - \theta_1) + Q_y^{(2)} (\psi_{22} - \theta_2).$$

Здесь

$$N_x^{(2)} = \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) F_2 + (\chi_1^{(2)} + \mu_2 \chi_2^{(2)}) S_2 \right]; \\ M_x^{(2)} = \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_2 \varepsilon_y) S_2 + (\chi_1^{(2)} + \mu_2 \chi_2^{(2)}) J_2 \right]; \\ N_{xy}^{(2)} = \frac{E_2}{2(1+\mu_2)} (\gamma_{xy} F_2 + \chi_{12}^{(2)} S_2); \quad (13) \\ Q_x^{(2)} = \frac{E_2 F_2 k}{2(1+\mu_2)} (\psi_{12} - \theta_1).$$

Аналогично записываются выражения для $N_y^{(2)}, M_y^{(2)}$ и $Q_y^{(2)}$.

$$\int_{h_2}^{h_2+h_3} \left(\sigma_{13} \varepsilon_{13}^z + \sigma_{23} \varepsilon_{23}^z + \tau_{12}^{(3)} \gamma_{12}^{(3)} + \tau_{13}^{(3)} \gamma_{13}^{(3)} + \tau_{23}^{(3)} \gamma_{23}^{(3)} \right) dz = \\ = N_x^{(3)} (\varepsilon_x + A_{13}) + M_x^{(3)} \chi_1^{(3)} + N_{xy}^{(3)} (\gamma_{xy} + A_{33}) + \\ + M_{xy}^{(3)} \chi_{12}^{(3)} + N_y^{(3)} (\varepsilon_y + A_{23}) + M_y^{(3)} \chi_2^{(3)} + \\ + Q_x^{(3)} (\psi_{13} - \theta_1) + Q_y^{(3)} (\psi_{23} - \theta_2).$$

Здесь

$$N_x^{(3)} = \frac{E_3}{1-\mu_3^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_3 \varepsilon_y + A_{13} + \mu_3 A_{23}) F_3 + \right. \\ \left. + (\chi_1^{(3)} + \mu_3 \chi_2^{(3)}) S_3 \right]; \\ M_x^{(3)} = \frac{E_3}{1-\mu_3^2} \left[(\varepsilon_x + \mu_3 \varepsilon_y + A_{13} + \mu_3 A_{23}) S_3 + \right. \\ \left. + (\chi_1^{(3)} + \mu_3 \chi_2^{(3)}) J_3 \right];$$

$$N_{xy}^{(3)} = \frac{E_3}{1-\mu_3^2} \left[(\gamma_{xy} + A_{23}) F_3 + \chi_{12}^{(3)} S_3 \right]; \quad (14)$$

$$M_{xy}^{(3)} = \frac{E_3}{2(1+\mu_3)} \left[(\gamma_{xy} + A_{23}) S_3 + \chi_{12}^{(3)} J_3 \right];$$

$$Q_x^{(3)} = \frac{E_3 F_3 k}{2(1+\mu_3)} (\psi_{13} - \theta_1).$$

Аналогично записываются выражения для $N_y^{(3)}$, $M_y^{(3)}$ и $Q_y^{(3)}$.

Если характеристики E_k и μ_k (где $k=1, 2, 3$ для отдельных слоев оболочки соответственно) — величины одного порядка, то, согласно [11], для трехслойной оболочки можно применять осредненные значения E и μ

$$\mu = \sum_{k=1}^3 \frac{E_k \mu_k h_k}{1 - \mu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \mu_k^2} \right)^{-1};$$

$$E = \frac{1 - \mu^2}{h} \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1 - \mu_k^2},$$

где $h = h_1 + h_2 + h_3$.

Таким образом, выражение функционала полной потенциальной энергии трехслойной оболочки принимает вид

$$\Theta = \frac{1}{2} \iint_{00}^{ab} \left[\begin{aligned} & (N_x^{(1)} + N_x^{(2)} + N_x^{(3)}) \varepsilon_x + \\ & + N_x^{(3)} A_{13} + \\ & + (N_y^{(1)} + N_y^{(2)} + N_y^{(3)}) \varepsilon_y + \\ & + N_y^{(3)} A_{23} + \\ & + (N_{xy}^{(1)} + N_{xy}^{(2)} + N_{xy}^{(3)}) \gamma_{xy} + \\ & + N_{xy}^{(3)} A_{33} + M_x^{(1)} \chi_1^{(1)} + M_x^{(2)} \chi_1^{(2)} + \\ & + M_x^{(3)} \chi_1^{(3)} + M_y^{(1)} \chi_2^{(1)} + M_y^{(2)} \chi_2^{(2)} + \\ & + M_y^{(3)} \chi_2^{(3)} + M_{xy}^{(1)} \chi_{12}^{(1)} + M_{xy}^{(2)} \chi_{12}^{(2)} + \\ & + M_{xy}^{(3)} \chi_{12}^{(3)} + Q_x^{(1)} (\psi_{11} - \theta_1) + \\ & + Q_x^{(2)} (\psi_{12} - \theta_1) + Q_x^{(3)} (\psi_{13} - \theta_1) + \\ & + Q_y^{(1)} (\psi_{21} - \theta_2) + Q_y^{(2)} (\psi_{22} - \theta_2) + \\ & + Q_y^{(3)} (\psi_{23} - \theta_2) - 2q w \end{aligned} \right] AB dx dy.$$

Если к этому функционалу добавить краевые условия (условия закрепления контура оболочки), то получим математическую модель нелинейного деформирования трехслойной упругой изотропной оболочки.

Библиографический список

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. 2-е изд., доп. и перераб. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
2. Муштаров Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Карпов В. В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения. М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 1999. 105 с.
5. Паймушин В. Н. Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5 (237). С. 135–149.
6. Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 388 с.
7. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
8. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит, 2011. 248 с.
9. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
10. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. Л.: Судостроение, 1987. 316 с.
11. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 215 с.
12. Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций: справочник / под общ. ред. В. Н. Кобелева. М.: Машиностроение, 1984. 304 с.
13. Kreja I. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels // Open Engineering. 2011. Vol. 1 (1). Pp. 59–80. DOI: 10.2478/s13531-011-0005-x.
14. Пухлий В. А., Пухлий К. В. Применение теории трехслойных конструктивно-ортотропных оболочек к расчету НДС рабочих лопаток газотурбинных и комбинированных установок // Теория механизмов и машин. 2019. Т. 17, № 3 (43). С. 86–96. DOI 10.5862/TMM.43.1.
15. Kipiani G. Definition of critical loading on three-layered plate with cuts by transition from static problem to stability problem // Contemporary Problems in Architect and Construction: Selected peer reviewed papers the 6th

International Conference on Contemporary Problems of Architect and Construction, June 24–27, 2014, Ostrava, Czech Republic / Ed. by D. Kubečková, Trans. Tech. Publications, Switzerland. Pp. 143–150.

16. Eremeev V. V., Zubov L. M. On instability of a three-layered nonlinear elastic rectangular plate with prestressed middle layer // *Shell Structures: Theory and Applications*. 2017. Vol. 4. Pp. 215–218. DOI: 10.1201/9781315166605-46.

17. Hoang-Nam N., Tan-Y N., Ke V. T., Thanh T. T., Truong-Thinh N., Van-Duc P., Thom V. D. A Finite Element Model for Dynamic Analysis of Triple-Layer Composite Plates with Layers Connected by Shear Connectors Subjected to Moving Load // *Materials*. 2019. Vol. 12, No. 4. Pp. 598–617.

18. Каледин В. О., Аульченко С. М., Миткевич А. Б., Решетникова Е. В., Седова Е. А., Шпакова Ю. В. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2014. 196 с.

19. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрияшин В. А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.

20. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

21. Гришанов А. Н. Эффективный метод построения приближенных решений с применением многосеточных конечных элементов // *Доклады АН ВШ РФ*. 2018. № 3 (40). С. 47–57. DOI: 10.17212/1727-2769-2018-3-47-57.

22. Baculin V. N. Block Based Finite Element Model for Layer Analysis of Stress Strain State of Three-Layered Shells with Irregular Structure // *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53 (4). Pp. 411–417. DOI:10.3103/S0025654418040064.

23. Бакулин В. Н. Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // *Механика твердого тела*. 2018. № 4. С. 66–73. DOI: 10.31857/S057232990000701-1.

24. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 330 с.

25. Жгуты В. М. Геометрически нелинейные математические модели термоползучести оболочек переменной толщины // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 5 (31). С. 43–59. DOI: 10.5862/MCE.31.6.

26. Ustarkhanov O. M., Yusupov A. K., Muselemov Kh. M., Ustarkhanov T. O., Irzaev G. G. Three-Layer Cylindrical Shell with Nonlinear Deformation //

Russian Engineering Research. 2019. Vol. 39, No. 2. Pp. 95–101.

References

1. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. 2-nd ed., revised. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1962, 431 p.

2. Mushtari Kh. M., Galimov K. Z. *Nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [Nonlinear theory of elastic shells]. Kazan, Tatknigoizdat Publ., 1957, 431 p.

3. Vol'mir A. S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 432 p.

4. Karpov V. V. *Geometricheski nelineynye zadachi dlya plastin i obolochek i metody ikh resheniya* [Geometrically nonlinear problems for plates and shells and methods for their solution]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., Moscow, ASV Publ., 1999, 105 p.

5. Paymushin V. N. *Sootnosheniya teorii tonkikh obolochek tipa teorii Timoshenko pri proizvol'nykh peremeshcheniyakh i deformatsiyakh* [Relations of the theory of thin shells of the Timoshenko theory type under arbitrary displacements and deformations]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Applied mechanics and technical physics*, 2014, vol. 55, no. 5 (237), pp. 135–149.

6. Kabrits S. A., et al. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [General nonlinear theory of elastic shells]. St. Petersburg, SPbGU Publ., 2002, 388 p.

7. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of reinforced rotation shells]. In 2 Pts. Pt. 1. *Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Models and algorithms for studying the strength and stability of reinforced shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 288 p.

8. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of reinforced rotation shells]. In 2 Pts. Pt. 2. *Vychislitel'niy eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozeystvii* [Computational experiment under static mechanical influence]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 248 p.

9. Grigolyuk E. I., Kabanov V. V. *Ustoychivost' obolochek* [Stability of shells]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 359 p.

10. Pertsev A. K., Platonov E. G. *Dinamika obolochek i plastin* [Dynamics of shells and plates]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1987, 316 p.

11. Grigolyuk E. I., Chulkov P. P. *Ustoychivost' i kolebaniya trekhslonnykh obolochek* [Stability and vibrations of three-layer shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973, 215 p.

12. Kobelev V. N., Kovarskiy L. M., Timofeev S. I. *Raschet trekhslonnykh konstruktsey* [Calculation of three-layer structures]. Ed. by Kobelev V. N. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 304 p.
13. Kreja I. A. Literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Open Engineering*, 2011, vol. 1 (1), pp. DOI: 10.2478/s13531-011-0005-x.
14. Pukhliy V. A., Pukhliy K. V. *Primenenie teorii trekhslonnykh konstruktivno-ortotropnykh obolochek k raschetu NDS rabochikh lopatok gazoturbinnnykh i kombinirovannykh ustanovok* [Application of the theory of three-layer structural-orthotropic shells to the calculation of the SSS of working blades of gas turbine and combined installations]. *Teoriya mekhanizmov i mashin – Theory of mechanisms and machines*, 2019, vol. 17, no. 3 (43), pp. 86–96. DOI 10.5862/TMM.43.1.
15. Kipiani G. *Definition of critical loading on three-layered plate with cuts by transition from static problem to stability problem. Contemporary problems in architect and construction*. Proc. of the 6-th International conference on contemporary problems of architect and construction, June 24–27, 2014, Ostrava, Czech Republic, pp. 143–150.
16. Ereemeev V. V., Zubov L. M. On instability of a three-layered nonlinear elastic rectangular plate with pre-stressed middle layer. *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp. 215–218. DOI: 10.1201/9781315166605-46.
17. Hoang-Nam N., et al. A finite element model for dynamic analysis of triple-layer composite plates with layers connected by shear connectors subjected to moving load. *Materials*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 598–617.
18. Kaledin V. O., et al. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolocheknykh konstruktsey iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 196 p.
19. Solomonov Yu. S., Georgievskiy V. P., Nedbay A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014, 408 p.
20. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsey* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 392 p.
21. Grishanov A. N. *Effektivniy metod postroeniya priblizhennykh resheniy s primeneniem mnogosetochnykh konechnykh elementov* [Effective method for constructing approximate solutions using multigrid finite elements]. *Doklady AN VSh RF – Reports of the Russian Higher School of Economics*, 2018, no. 3 (40), pp. 47–57. DOI: 10.17212/1727-2769-2018-3-47-57.
22. Baculin V. N. Block based finite element model for layer analysis of stress strain state of three-layered shells with irregular structure. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53 (4), pp. 411–417. DOI: 10.3103/S0025654418040064.
23. Bakulin V. N. *Blochnaya konechno-elementnaya model' dlya posloynogo analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhslonnykh obolochek s neregulyarnoy strukturoy* [Block finite element model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with irregular structure]. *Mekhanika verdogo tela – Solid body mechanics*, 2018, no. 4, pp. 66–73. DOI: 10.31857/S057232990000701-1.
24. Karpov V. V. *Matematicheskoe modelirovanie, algoritmy issledovaniya modeli, vychislitel'nyy eksperiment v teorii obolochek* [Mathematical modeling, model research algorithms, computational experiment in shell theory]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2006, 330 p.
25. Zhgutov V. M. *Geometricheski nelineynye matematicheskie modeli termopolzuchesti obolochek peremennoy tolshchiny* [Geometrically nonlinear mathematical models of thermal creep of shells of variable thickness]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Engineering construction journal*, 2012, no. 5 (31), pp. 43–59. DOI: 10.5862/MCE.31.6.
26. Ustarkhanov O. M., et al. Three-layer cylindrical shell with nonlinear deformation. *Russian Engineering Research*, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 95–101.