УДК 539.3

© Л. М. Коган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-87-93

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering,
St. Petersburg, Russia)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТОЙКИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

THE IMPROVED BUCKLING THEORY FOR THE COLUMN BEYOND THE ELASTIC LIMIT

Работа рассматривает новый эффект, а именно, самопроизвольный изгиб (вследствие исчезающе малого возмущения) неупругой стойки, центрально сжатой силой, которая меньше критической. На этот эффект ранее внимание не обращали. Вопрос обсуждается на примере шарнирно опертой стойки прямоугольного сечения. При определенном уровне силы, действующей на искривленную вследствие самопроизвольного изгиба стойку, приращение силы вызывает приращение момента неопределенной величины. Такой уровень силы считается критическим. Его вычисление, не учитывающее немонотонный рост напряжений в процессе деформирования стойки, дает критическую силу, в точности равную касательно-модульной.

Ключевые слова: устойчивость, неупругая стойка, новый эффект.

The article considers a new effect, namely, spontaneous bending (due to the vanishingly small disturbance) of an inelastic column when it is centrally compressed by a force that is less than critical. Earlier, no attention was paid to this effect. The problem is discussed on the example of a simply supported column of rectangular cross section. At a certain level of the force applied to the column curved due to spontaneous bending, the force increment causes the moment increment of an indefinite value. This force level is considered to be the critical one. Its calculation, which does not take into account the non-monotonic increase in stresses during the column deformation, gives the critical force exactly equal to the tangent modulus one.

Keywords: stability, column beyond the elastic limit, new effect.

Историческая справка

Начало обсуждаемой теории заложено работами Ф. Энгессера, Ф. С. Ясинского и Т. Кармана.

В 1889 и 1891 г. Энгессер [1, 2] опубликовал свою теорию, заменив в формуле Эйлера модуль упругости E величиной $\bar{E}$, равной касательно-модулю E_k , получил касательно-модульную критическую силу P_k . Этой работой начинается выяснение вопроса о виде величины $\bar{E}$, которую нужно использовать в формуле Эйлера вместо модуля E .

Ясинский обращает внимание на две ошибки Энгессера. В 1892–1893 г. он указывает на зависимость жесткости неупругой стойки от координаты сечения [4, с. 75]¹: «Заменяя в фор-

муле Эйлера постоянный коэффициент E переменным, профессор Энгессер тем самым а priori принимает, что от этого вид формулы Эйлера не изменится. Между тем... переменная величина E изменяет весь характер исходного дифференциального уравнения продольного изгиба и тем самым требует нового интегрирования». В 1895 г. [5] он указывает на другой недочет — неучтенное смещение нейтральной оси относительно геометрического центра сечения, но не выполняет конкретные вычисления.

Ясинский ограничился замечаниями на работы Энгессера, не построил законченную теорию и написал: «Настоящее положение науки не дает нам пока никакой надежды на возможность теоретического разрешения вопроса продольного изгиба при сжимающих напряжениях, превосходящих предел упругости материала» [4]. Он предполагал превращение модуля E в зависимость от координаты величины, что в его время невозможно было учесть.

¹ Излагая историю вопроса, на эту работу не обращают внимание, хотя, по мнению автора статьи, работа объясняет, почему

Энгессер в 1895 г. [3] соглашается с Ясинским относительно смещения нейтральной оси и устанавливает, что $\bar{E}$ есть приведенный модуль упругости $E_{пр}$, вводит тем самым приведенно-модульную критическую силу $P_{пр}$, однако значения $E_{пр}$ для конкретных форм сечения не вычисляет. Замечание Ясинского о зависимости модуля E от координаты остается ему не известным.

Карман в 1910 г. [6] представляет теорию приведенного модуля вместе с вычислением $\bar{E}$ для прямоугольного сечения и двутавра с бесконечно тонкой стенкой. Для сечений другой формы эта величина будет найдена впоследствии другими авторами.

Теория получила дальнейшее развитие в 1946–1947 гг. благодаря Ф. Р. Шенли [7], который ввел представление о необходимом анализе самого процесса нагружения [8]. Последний влияет на величину критической силы, принимающую некоторое значение между P_k и $P_{пр}$.

Что же касается критической силы, необходимой для расчетной практики, то уже при Шенли первоначально предложенная Энгессером сила P_k широко применялась инженерами, так как она давала величины, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

Анализируя классические результаты, автор предлагаемой работы обратил внимание на недочет, который до сих пор остается незамеченным. Его устранению и посвящена работа.

Уточнение теории. Вычисляя прогибы неупругой стойки, нужно, из-за разной податливости материала при нагружении и разгрузке, рассматривать приведенное сечение и находить изгибающий момент относительно осей этого сечения.

В известной автору научной и учебной литературе [9–12 и др.], определяя критическую силу $P_{пр}$ идеально прямой неупругой центрально сжатой стойки, момент внешних сил вследствие изгиба вычисляют неверно, относительно осей геометрического сечения. В модельной задаче Шенли [7] относительно этих же осей найден момент внутренних сил, что также неправильно.

В результате остается незамеченным изгиб, который создает исчезающе малое возмущение уже при напряжении $\sigma = P/A$, превосходящем лишь предел упругости σ_y , так что мнение о том, что изгиб возможен лишь при сжатии стойки си-

лой, превосходящей P_k [7, 13], оказывается несостоятельным.

Ниже вопрос обсуждается на примере стойки прямоугольного сечения высотой h и шириной b , ее материал обладает линейным упрочнением с касательным модулем E_k .

Самопроизвольный изгиб². Рассмотрим шарнирно опертую прямую стойку, сжатую силой P . Напряжение $\sigma = P/A$ превосходит предел упругости σ_y , который отождествляется с пределом пропорциональности. Стойка сопротивляется изгибу так, как стойка, составленная из двух разных материалов с модулями E и E_k . Изменение напряжений за счет изгиба показано на рис. 1, где a — расстояние до нейтрального волокна, e — смещение центра тяжести приведенного сечения относительно середины сечения. Приравнявая нулю статический момент S_y , имеем

$$-E \cdot ba \left(\frac{h}{2} + e - \frac{a}{2} \right) + E_b (h-a) \left(\frac{h}{2} - e - \frac{h-a}{2} \right) = 0. \quad (1)$$

Переходя к относительным величинам

$$\xi = E_k / E, \quad \bar{a} = a/h, \quad \bar{e} = e/h,$$

получаем связь относительного смещения $\bar{e}$ с относительным расстоянием $\bar{a}$ до нейтрального волокна

$$\bar{e} = \frac{\bar{a} - \bar{a}^2}{2(1 - \bar{a} + \xi \bar{a})} (1 - \xi). \quad (2)$$

Площадь и момент инерции приведенного сечения таковы:

$$A_{пр} = A[1 - \bar{a}(1 - \xi)], \quad (3)$$

$$I_{пр} = I \{ \xi \bar{a} [\bar{a}^2 + 3(1 - \bar{a} + 2\bar{e})^2] + (1 - \bar{a})[(1 - \bar{a})^2 + 3(a - 2\bar{e})^2] \}. \quad (4)$$

² Похожий эффект возникает в железобетонном несимметрично армированном стержне вследствие ползучести бетона, обнаружен В. Д. Харлабом [14] и назван им самопроизвольным продольным изгибом.

Рис. 1

Здесь $A = bh$ и $I = bh^3 / 12$ — геометрические характеристики сечения.

Пусть изгиб происходит в условиях изменения силы P . Свяжем приращения продольной силы $\delta N = -\delta P$ и изгибающего момента δM с параметрами $\bar{a}$ и $\bar{e}$. Обозначая за $\delta\theta$ приращение угла поворота сечения и применяя гипотезу плоских сечений, имеем:

$$\delta\theta'E \frac{h^2}{2} [\xi \bar{a}^2 - (1 - \bar{a})^2] = \delta P, \quad (5)$$

$$\delta\theta'E \frac{h^3}{2} [\xi \bar{a}^2 (\frac{1}{2} + \bar{e} - \frac{\bar{a}}{3}) + (1 - \bar{a})^2 (\frac{1}{6} - \bar{e} + \frac{\bar{a}}{3})] = \delta M. \quad (6)$$

Здесь моменты в левой и правой частях (6) вычислены относительно центра тяжести приведенного сечения. На это обстоятельство специально обращаем внимание, так как именно оно позволяет обнаружить обсуждаемый эффект.

Пусть напряжение $\sigma > \sigma_y$, сила P постоянна, то есть изгиб вызван исчезающе малым возмущением при $\delta P = 0$. Положение нейтральной линии определяет уравнение

$$\xi \bar{a}^2 - (1 - \bar{a})^2 = 0,$$

которое тождественно с (1) именно при $e = a - h/2$, когда нейтральная линия проходит через центр тяжести приведенного сечения. Относительное расстояние $\bar{a}$, безразмерное смещение $\bar{e}$ и приведенные характеристики в этом случае таковы:

$$\bar{a} = 1(1 + \sqrt{\xi}), \quad (7)$$

$$\bar{e} = (1 - \sqrt{\xi}) / 2(1 + \sqrt{\xi}), \quad (8)$$

$$A_{пр} = \sqrt{\xi} A, \quad I_{пр} = \sqrt{4\xi / (1 + \sqrt{\xi})^2} I. \quad (9)$$

Обратим внимание на различие индексов в уравнениях (3)–(4) и (9). Индексом «пр» помечены характеристики сечения при $\delta P = 0$. Индекс «п» отвечает общему случаю. Отметим также, что смещение $\bar{e}$, найденное согласно (8), одновременно является максимумом выражения (2) по параметру $\bar{a}$, то есть при изгибе в условиях $\delta P > 0$ смещение $\bar{e}$ уменьшается.

Поскольку величины $\bar{a}$, $\bar{e}$ в (7), (8) не зависят от координаты сечения, прогиб w удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба $w'' = -M / EI_{пр}$ прямолинейного стержня постоянного сечения с приведенным моментом инерции $I_{пр}$. Изгиб происходит относительно главных центральных осей приведенного сечения, вызван моментом

$$M = Pe + Pw.$$

Составляющая Pe момента, насколько известно автору, учитывается впервые.

Вводя безразмерный параметр нагрузки $k = \sqrt{Pl^2 / EI}$ и параметр $t_{пр} = \sqrt{I_{пр} / I} = \sqrt{4\xi / (1 + \sqrt{\xi})^2}$, записываем уравнение изгиба в виде:

$$w'' + \frac{k^2 / t_{пр}^2}{l^2} w = - \frac{k^2 / t_{пр}^2}{l^2} e.$$

Граничные условия

$$w(0) = w(l) = 0.$$

Применяя безразмерную координату $\bar{x} = x / l$, имеем:

$$w = e [\frac{1 - \cos k / t_{пр}}{\sin k / t_{пр}} \sin k \bar{x} / t_{пр} + \cos k \bar{x} / t_{пр} - 1]. \quad (10)$$

Таким образом, у идеально прямой стойки при напряжении $\sigma > \sigma_y$ самопроизвольно (вследствие возмущения) возник изгиб. Прогиб не зависит от типа возмущения, но зависит от параметра k , то есть от напряжения σ , при котором возмущение действовало. Появление такого изгиба не является признаком потери устойчивости. Лишь при

$$\sin k / t_{пр} = 0,$$

когда параметр $k = k_{пр} = \pi t_{пр}$, имеем бесконечный прогиб, то есть потерю устойчивости. Критической является приведенно-модульная сила

$$P_{пр} = \frac{\pi^2 EI_{пр}}{l^2}.$$

Такая сила отвечает нагружению, при котором вплоть до $P = P_{пр}$ на стойку наложены связи, препятствующие изгибу. При $P = P_{пр}$ связи сняты и действует возмущение. Возмущение, возникшее при $P < P_{пр}$, переводит стойку в несмежное состояние равновесия, устойчивость которого должна исследоваться.

Итак, представленный анализ обнаружил изгиб уже при напряжении $\sigma > \sigma_y$, то есть задолго до достижения нагрузкой P значения P_k .

Теперь рассмотрим изгиб при увеличивающейся силе P , которая действует на уже изогнутую согласно (10) стойку. Вычисления выполним, избегая математических сложностей.

Пусть δP — приращение силы, приложенное к геометрическому центру тяжести торцевого сечения. В этом сечении возникает момент $\delta M = \delta P e$. Допуская появление разгрузки и учитывая уравнения (8), (9), вычислим приращение напряжения в наименее сжатом волокне сечения:

$$\delta\sigma = - \frac{\delta P}{A_{пр}} + \frac{\delta P e}{I_{пр}} (\frac{h}{2} - e) = - \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2 + 2\xi}{\sqrt{\xi}(1 + \sqrt{\xi})} \frac{\delta P}{A}.$$

Приращение $\delta\sigma$ отрицательно, то есть разгрузка отсутствует.

Пусть разгрузка отсутствует во всех сечениях. Вычислим дополнительный прогиб за счет силы δP . Для упрощения выкладок уравнение (10) начального изгиба, который возник при нагрузке P , заменим приближенным уравнением

$$w = \frac{w_b}{1 - P/P_{пр}} = \frac{Pe}{2EI_{пр}} \frac{(lx - x^2)}{1 - P/P_{пр}} = \frac{ek^2/t_{пр}^2}{2} \frac{\bar{x} - \bar{x}^2}{1 - P/P_{пр}}. \quad (11)$$

Здесь w_b — прогиб, который вызывают моменты Pe по торцам в отсутствие сжатия. Так как прогиб возник в условиях $\delta P = 0$, изгибная жесткость и критическая сила приняты равными $EI_{пр}$ и $P_{пр}$. У рассматриваемой стойки погрешность максимального прогиба от замены точного выражения приближенным не превышает 3 %. Рис. 2, где сопоставлены прогибы, найденные согласно (10) и (11) при $P = 0,95P_{пр}$, подтверждает приемлемость замены.

Вслед за возмущением увеличивается сила: $P = P + \delta P$. Для прогибов δw_b и δw за счет δP искривленной стойки имеем (теперь, по предположению, разгрузка отсутствует, поэтому используются приведенная жесткость EI_k и критическая сила P_k)

$$\delta w_b = \frac{ek^2/t_{пр}^2 (\bar{x} - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^4)}{24} \frac{\delta P}{1 - P/P_{пр} EI_k},$$

$$\delta w = \frac{ek^2/t_{пр}^2 (\bar{x} - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^4)}{24} \frac{1}{1 - P/P_{пр}} \frac{\delta P}{1 - P/P_k EI_k}.$$

Дополнительный момент посередине и дополнительное напряжение в наименее сжатом волокне таковы:

$$\begin{aligned} \delta M &= P\delta w(0,5) = \\ &= \frac{30\delta Pe}{384} \frac{1}{1 - k^2/t_{пр}^2\pi^2} \frac{k^4/(t_{пр}^2 t_k^2)}{1 - k^2/t_k^2\pi^2}, \\ \delta\sigma &= -\frac{\delta P}{A} + \frac{\delta Pe}{I} \frac{h}{2} = \\ &= \left[-1 + \frac{30}{384} \frac{\bar{e}}{1 - k^2/t_k^2\pi^2} \frac{k^4/(t_{пр}^2 t_k^2)}{1 - k^2/t_{пр}^2\pi^2}\right] \frac{\delta P}{A}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $t_k = \sqrt{I_k/I} = \sqrt{\xi}$, $t_{пр} = \sqrt{4\xi/(1+\sqrt{\xi})^2}$.

Положив $\delta\sigma = 0$, находим значение $k = k_p$, начиная с которого приращение δP вызывает раз-

Рис. 2

грузку в среднем сечении стойки. На рис. 3 график зависимости $k_p(\xi)$ (кривая 1) сопоставлен с графиком для касательно-модульного значения $k_k(\xi) = \sqrt{\xi}\pi$ (кривая 2). Видим, что разгрузка возникает уже при $P < P_k$. На рис. 4 показана зависимость прогиба w посередине, вычисленного при $k = k_p$ и отнесенного к высоте сечения h , от параметра ξ . Прогиб остается сравнительно небольшим, говорить о потере устойчивости нет оснований.

Устойчивость. К моменту потери устойчивости первоначально прямая стойка постоянного сечения превратилась в искривленную с переменным сечением. Такую возможность, скорее всего, предполагал еще Ясинский.

Далее рассматривается стойка переменной жесткости EI_x с начальным искривлением за счет самопроизвольного изгиба. Ее ось проходит через центры тяжести приведенных сечений. За v обозначено расстояние между осями идеально прямой и искривленной стоек. К торцу стойки в геометрическом центре тяжести приложена сжимающая сила P . Вычисляется дополнительный прогиб вследствие приращения δP .

Традиционная форма дифференциального уравнения изгиба искривленного стержня переменного сечения

$$(EI_x w'')'' + Pw'' = -Pv''$$

неудобна. Используем форму Ржаницына, подчиняя изгиб системе двух уравнений

$$M'' + \frac{P}{EI_x} M = Pv'', \quad w'' = -\frac{M}{EI_x}, \quad (13)$$

вместе с граничными условиями $M(0) = M(l) = 0$, $w(0) = w(l) = 0$, и перейдем к анализу устойчивости.

Приращение δP силы вызывает приращение δM момента и, возможно, приращение δv . Обозначив за $\bar{M} = \delta M / h\delta P$ относительную скорость роста момента, за $\bar{v} = \delta v / h\delta P$ — относительную

Рис. 3

Рис. 4

скорость роста v , запишем первое из уравнений (13) в виде

$$\delta \bar{M}'' + \frac{P}{EI_x} \delta \bar{M} = P \delta \bar{v}'', \quad (14)$$

дополнив его граничными условиями $\bar{M}(0) = \bar{M}(l) = 0$. Использовать второе уравнение (13) нет необходимости. Жесткость $EI_x = i_{\Pi} EI$, а величину i_{Π} определяет параметр $\bar{a}$ (см. рис. 1):

$$i_{\Pi} = \xi \bar{a} [\bar{a}^2 + 3(1 - \bar{a} + 2\bar{e})^2] + (1 - \bar{a}) [(1 - \bar{a})^2 + 3(a - 2\bar{e})^2]. \quad (15)$$

Смещение $\bar{e}$ задано уравнением (2).

Исключая из уравнений (5), (6) величину $\delta \theta'$, получаем зависимость параметра $\bar{a}$ от $\bar{M}$:

$$\frac{\xi \bar{a}^2 (\frac{1}{2} + \bar{e} - \frac{\bar{a}}{3}) + (1 - \bar{a})^2 (\frac{1}{6} - \bar{e} + \frac{\bar{a}}{3})}{\xi \bar{a}^2 - (1 - \bar{a})^2} = \bar{M}. \quad (16)$$

Под критической понимаем нагрузку, при которой скорость $\bar{M}$ становится неопределенной, то есть происходит бифуркация решения уравнения (14), дополненного соответствующими граничными условиями. Момент бифуркации определяется поведением левой части уравнения, поэтому правую часть отбрасываем. Вводя безразмерный параметр k нагрузки, переходя к безразмерной координате $\bar{x} = x/l$, получаем следующую краевую задачу устойчивости:

$$\bar{M}'' + \frac{k^2}{i_{\Pi}(\bar{M})} \bar{M} = 0, \quad \bar{M}(0) = \bar{M}(l) = 0. \quad (17)$$

Критический параметр k вычисляем, применяя подход, предложенный в [15] для решения задач упругой устойчивости. Этот подход сводит задачу к прямому интегрированию уравнения (17) со вспомогательными неоднородными граничными условиями и последующему решению трансцендентного уравнения. Идея такова.

В задачах упругой устойчивости перемещения и усилия определяются с точностью до множителя. Это позволяет выбрать некоторую компоненту f решения и задать ее значение в точке x_0 , положив $f(x_0) = C$. Далее какое-либо однородное граничное условие, например условие $g(0) = 0$, заменяется неоднородным условием $f(x_0) = C$. Получается вспомогательная неоднородная краевая задача с неизвестной нагрузкой P , решение которой для каждого P единственно. Вспомогательная задача решается численно, критическая нагрузка P находится из отброшенного граничного условия $g(0) = 0$. Числовое значение C назначается произвольно. По этой причине подход справедлив в линейных задачах.

Применяя подход к рассматриваемой нелинейной задаче, назначать произвольно число C нельзя. Будем уменьшать значение C до тех пор, пока критическая нагрузка не перестанет изменяться.

Вычисления просто выполняются средствами Mathcad, приводят к критическому значению параметра k , которое в точности совпадает с касательно-модульным значением k_k .

Совпадение критических значений k и k_k указывает на то, что напряжения растут немонотонно в процессе деформации искривленного в результате самопроизвольного изгиба стержня. Сначала стержень реагирует на приращение силы как однородный с модулем деформации, равным касательному модулю E_k , напряжения во всех сечениях растут. Затем возникает постепенно увеличивающаяся зона разгрузки. На третьем этапе зона разгрузки уменьшается. В момент потери устойчивости приращение нагрузки разгрузку не вызывает. Такой немонотонный процесс изменения напряжений в представленной работе не учтен. Возможно, его учет несколько увеличит критическую силу.

Заключение. Выше рассмотрен новый эффект, а именно, самопроизвольный изгиб, который вызывает возмущение уже при напряжении сжатия, превосходящем предел упругости σ_y . Появление такого изгиба не связано с потерей устойчивости. На эффект не обращали внимание, вычисляя критическую силу неупругой стойки как силу, при которой у идеально прямой стойки появляется искривленная форма равновесия.

В представленной работе под критической понимается сила, при которой скорость роста приращения δM момента вследствие приращения δP силы становится неопределенной. Критическое значение силы P выявляет анализ искривленной стойки, причем нет необходимости вводить искривление как начальное несовершенство. Оно образуется само, вследствие самопроизвольного изгиба. Критическим оказывается касательно-модульное значение P_K силы.

Библиографический список

1. Engesser F. Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe // *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*. 1889. Vol. 35, No. 4. Pp. 455–462.
2. Engesser F. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe // *Zentralblatt der Bauverwaltung*. 1891. Vol. 11 (49). Pp. 483–486.
3. Engesser F. Über Knickfragen // *Schweizerische Bauzeitung*. 1895. Bd. 26. Pp. 24–26.
4. Ясинский Ф. С. Опыт развития теории продольного изгиба. СПб.: тип. Ю. Н. Эрлих, 1893. 270 с.
5. Ясинский Ф. С. Noch ein Wort zu den "Knickfragen" // *Schweizerische Bauzeitung*. 1895. XXV, № 25. Pp. 172–175. (Русский перевод в кн. Ф. С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 428 с.)
6. Kármán Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit // *Verein Deutscher Ingenieure. Mitteilungen über Forschungsarbeiten*. Berlin, 1910. Heft 81, pp. 1–45.
7. Shanley F. R. Inelastic column theory // *J. Aeronautical Sci.*, 1947. Vol. 14, № 5. Pp. 261–268. (Русский перевод в кн. Шенли Ф. Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М.: Оборонгиз, 1957. 408 с.)
8. Drucker D. C., Onat E. T. On the concept of stability of inelastic systems // *J. Aeron. Sci.* 1954. Vol. 21, № 8. Pp. 543–548.
9. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1961. 679 с.

10. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

11. Bažant Z. P., Cedolin L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. Mineola, NY: Dover Publications, 2003. 1011 p.

12. Galambos T. V., Surovek A. E. *Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008. 381 p.

13. Пановко Я. Г. О современной концепции упруго-пластического продольного изгиба // В кн. Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. С. 92–103.

14. Харлаб В. Д. Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону). СПб.: СПбГАСУ, 2014. 207 с.

15. Казан-Розенцвейг Л. М. Вычисление критических сил в упругих стержнях переменного сечения прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // *Вестник гражданских инженеров*. 2018. № 2 (67). С. 78–86.

References

1. Engesser F. Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*, 1889, vol. 35, no. 4, pp. 455–462.
2. Engesser F. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe. *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1891, vol. 11 (49), pp. 483–486.
3. Engesser F. Über Knickfragen. *Schweizerische Bauzeitung*, 1895, Bd. 26, pp. 24–26.
4. Yasinskiy F. S. *Opyt razvitiya teorii prodol'nogo izgiba* [Experience in the development of the longitudinal bending theory.]. St. Petersburg, Tip. Yu. N. Erlikh Publ., 1893, 270 p.
5. Yasinskiy F. S. Noch ein Wort zu den "Knickfragen". *Schweizerische Bauzeitung*, 1895, XXV, no. 25, pp. 172–175. (Russian transl. in: Yasinskiy F. S. *Izbrannye raboty po ustoychivosti szhatykh sterzhney* [Selected works on the stability of compressed rods. Stability of elastic systems]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1952, 428 p.)
6. Kármán Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit // *Verein Deutscher Ingenieure. Mitteilungen über Forschungsarbeiten*. Berlin, 1910. Heft 81, pp. 1–45.
7. Shanley F. R. Inelastic column theory. *J. Aeronautical Sci.*, 1947, vol. 14, no. 5, pp. 261–268. (Russian transl. in: Shenli F. R. *Analiz vesa i prochnosti samoletnykh konstruktsiy* [Analysis of the weight and stability of the airplane structures]. Moscow, Oborongiz Publ., 1957, 408 p.)
8. Drucker D. C., Onat E. T. On the concept of stability of inelastic systems. *J. Aeron. Sci.*, 1954, vol. 21, no. 8, pp. 543–548.

9. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' uprugikh system* [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 679 p.

10. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 420 p.

11. Bažant Z. P., Cedolin L. *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. Mineola, NY: Dover Publications, 2003, 1011 p.

12. Galambos T. V., Surovek A. E. *Structural stability of steel: concepts and applications for structural engineers*. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2008, 381 p.

13. Panovko Ya. G. *O sovremennoy kontseptsii uprugoplasticheskogo prodol'nogo izgiba* [About the modern concept of elastic-plastic longitudinal bending]. In: *Problemy ustoychivosti v stroitel'noy mekhanike* [Problems

of stability in construction mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1965, pp. 92–103.

14. Kharlab V. D. *Printsipial'nye voprosy lineynoy teorii polzuchesti (s privyazkoy k betonu)* [Principal issues of linear creep theory (with reference to concrete)]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2014, 207 p.

15. Kagan-Rozentsveyg L. M. *Vychislenie kriticheskikh sil v uprugikh sterzhnyakh peremennogo secheniya pryamym integrirovaniem differentsial'nogo uravneniya izgiba* [Calculation of critical forces in elastic rods with variable cross section by means of direct integration of differential bending equation]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2018, no. 2 (67), pp. 78–86.