УДК 539.4

© В. И. Смирнов, д-р техн. наук, профессор
© С. А. Видюшенков, канд. техн. наук, доцент
© С. С. Майер, аспирант
(Петербургский государственный университет
путей сообщения, Санкт-Петербург, Россия)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, baklava@mail.ru,
sergzo@bk.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-2-75-81

© V. I. Smirnov, Dr. Sci. Tech., Professor
© S. A. Vidyushenkov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
© S. S. Maier, post-graduate student
(Emperor Alexander I St. Petersburg State
Transport University, St. Petersburg, Russia)
E-mail: vsmirnov1@gmail.com, baklava@mail.ru,
sergzo@bk.ru

УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ БАЛКИ С ВНУТРЕННЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ МНОГОЦИКЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

FATIGUE FRACTURE OF THE BEAM WITH AN INTERNAL TRANSVERSE CRACK UNDER MULTICYCLE LOADING

Рассматривается балка на сплошном упругом основании с внутренней поперечной трещиной кругового очертания. Поперечное сечение балки имеет форму неравнополочного двутавра. Балка подвергается многократному воздействию сосредоточенной силы. Предлагаемая расчетная схема служит для определения циклической прочности железнодорожных рельсов и установления периодичности их проверки. Получено кинетическое уравнение роста трещины, и дана оценка допустимого количества циклов. Также оценивается критическая нагрузка при однократном статическом воздействии. Полученные результаты сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: круговая трещина, критическая нагрузка, прочность, усталостное разрушение, изгиб балки, уравнение роста трещины.

The article considers the beam on a solid elastic foundation with an internal transverse crack of circular shape. The cross-section of the beam has the form of an uneven I-beam joist. The beam is exposed to multiple effects of concentrated force. The proposed calculation scheme is aimed at determining the cyclical strength of the railway rails and specifying the inspection interval. The kinetic equation of crack growth has been obtained and the allowable number of cycles has been specified. The critical load with a single static impact is also assessed. The results are compared with the available experimental data.

Keywords: circular crack, critical load, strength, fatigue fracture, beam bending, crack growth equation.

Дефекты контактно-усталостного происхождения являются причиной большинства разрушений рельсов. Одни из наиболее опасных дефектов данной группы — внутренние поперечные трещины (ВПТ) в головке рельса. Инициирование и рост этих трещин происходят под влиянием конструктивных и эксплуатационных факторов. При достижении трещиной некоторого критического размера может произойти хрупкое разрушение (излом) рельса. При однократном статическом воздействии рельс с трещиной может выдерживать нагрузки, многократно превышающие эксплуатационные. Однако при циклическом нагружении интенсивное развитие ВПТ может происходить при нагрузках, значи-

тельно меньших однократных силовых воздействий.

Рассмотрим пример приближенного расчета допустимой осевой нагрузки на рельс с ВПТ малого размера, так чтобы можно было пренебречь влиянием границ головки рельса. Малые (короткие) трещины менее изучены, в то время как большие по размерам (30 % и более от площади головки рельса) без труда обнаруживаются дефектоскопом.

При малых размерах макродефекта для оценки прочности балки можно в качестве расчетной схемы использовать бесконечное упругое тело, ослабленное дисковидной трещиной, к берегам которой приложена равномерная нагрузка интенсивности p [1–3]. Трещина радиусом a рас-

положена в плоскости $z = 0$, начало цилиндрической системы координат (r, θ, z) совпадает с центром трещины, ось z направлена вдоль оси балки (рельса). Нормальное напряжение, отвечающее разрушению, ищем в виде разложения в интеграл Фурье — Бесселя [4]:

$$\sigma_z = \int_0^{\infty} B(k) k^3 e^{-kz} [1 + kz] J_0(kr) dk,$$

где

$$B(k) = -\frac{2p}{\pi} \left(\frac{\sin(ka)}{k^4} - a \frac{\cos(ka)}{k^3} \right).$$

Здесь k — параметр преобразования Ханкеля.

Распределение растягивающего напряжения σ_z на продолжении трещины (при $z = 0, r > a$) имеет вид

$$\sigma_z = -\frac{2p}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right].$$

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) получим из выражения

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(r-a)} \sigma_z(r, 0),$$

откуда $K_I = 2p\sqrt{a/\pi}$. Используя критерий Ирвина $K_I \leq K_{Ic}$, найдем предельную (разрушающую) нагрузку

$$p^* = \frac{1}{2} K_{Ic} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (1)$$

где K_{Ic} — вязкость разрушения (критический КИН).

Для определения допустимой нагрузки p , в качестве силовой схемы нагружения рассматриваем рельс как балку на сплошном упругом основании под действием сосредоточенной силы P . Уравнение изгиба имеет вид

$$EI \frac{d^2 w}{dz^2} = M, \quad (2)$$

где M — изгибающий момент; w — прогиб; z — расстояние от рассматриваемого сечения до точки контакта колеса и рельса; I — момент инерции поперечного сечения рельса; E — модуль упругости рельсовой стали ($E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа).

Решением уравнения (2) будет

$$w(z) = \frac{P}{8EI k^3} e^{-kz} (\sin kz + \cos kz),$$

где k — коэффициент относительной жесткости рельсового основания:

$$k = \sqrt{\frac{U}{4EI}}, \quad (3)$$

U — модуль упругости рельсового основания.

Изгибающий момент

$$M(z) = \frac{P}{4k} e^{-kz} (\sin kz - \cos kz)$$

достигает максимума при $z = \pi/(2k)$, и тогда $M_{\max} = Pe^{-\pi/2}/(4k)$.

Наибольшее напряжение в балке

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{\max}}{I} H, \quad (4)$$

где H — расстояние от центра трещины до нейтральной оси (н. о.) рельса (рис. 1).

Приравнявая правые части выражений (1) и (4), находим максимальное значение КИН

$$K_{I \max} = \frac{PH}{2kI} \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\pi/2}. \quad (5)$$

Из выражения (5) можно найти допустимую нагрузку на ось экипажа (в килограммах), $q^* = 2P/g$ ($g = 9,81$ м/с²), то есть

$$q^* = \frac{4kIK_{Ic}}{gH} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\pi/2}. \quad (6)$$

Необходимые для расчета данные приведены в табл. 1, в которой обозначены: S_r — площадь головки рельса; a_n, a_k — начальный и конечный радиусы трещины. Начальный и конечный размеры трещин соответствуют 5 и 30 % площади головки рельса каждого типа.

Для примера на рис. 2 приведена зависимость допускаемой осевой нагрузки q , (в тоннах) от размера трещины a (в мм), построенная для рельса типа Р65 при $k = 0,31$ м⁻¹ по формуле (6). Треугольниками показаны результаты лабораторных испытаний рельсовых проб с ВПТ на трехточечный изгиб (нетермообработанные рельсы

Рис. 1. Поперечное сечение балки с круговой трещиной

Таблица 1

Данные для расчета допустимой нагрузки

Тип рельса	$I \cdot 10^{-8}, \text{м}^4$	$S_r \cdot 10^{-4}, \text{м}^2$	$H \cdot 10^{-2}, \text{м}$	$a_n \cdot 10^{-3}, \text{м}$	$a_k \cdot 10^{-3}, \text{м}$	$k^*, \text{м}^{-1}$
P50	1813	23,89	6,76	6,2	15,1	1,772
P65	3208	27,78	8,51	6,6	16,3	1,536
P75	4180	28,66	8,96	6,7	16,6	1,438

* Щебеночный балласт, железобетонные шпалы 1840 шт./км, типовые подкладки [5].

типа P65, $K_{Ic} = 32,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$) [6]. Наблюдается большой разброс экспериментальных данных. Следует отметить, что удовлетворительное соответствие теории и экспериментальных данных достигается путем подбора коэффициента относительной жесткости рельсового основания k : для эксплуатационных условий рельс рассматривается как балка на сплошном упругом основании, а для лабораторных — как двухопорная балка.

Оценить необходимую длину балки (рельса) в лабораторных испытаниях в первом приближении можно из условия равенства максимального прогиба при трехточечном изгибе и при изгибе балки на сплошном упругом основании. В обоих случаях максимальное перемещение возникает под сосредоточенной силой. В первом случае имеем перемещения $v_{\max} = Pl^3/(48EI)$, во втором — $w_{\max} = P/(8Elk^3)$. Здесь l — длина двухопорной балки. Приравняв эти выражения, находим $l = \sqrt[3]{6/k} \approx 1,817/k$, где k определяется согласно (3). Модуль упругости рельсового основания для пути на деревянных шпалах $U_w = 23...29,5 \text{ МПа}$, для пути на железобетонных шпалах — $U_c = 110...167 \text{ МПа}$ [5]. Поэтому требуемая длина балки (для всех типов рельсов) составит соответственно $l_w = 1,089...1,428 \text{ м}$ и $l_c = 0,706...0,966 \text{ м}$. Эти значения практически являются пограничными с точки зрения требования $l/B \geq 5$, где B — высота балки. В лабораторных условиях длина балки ограничена расстоянием между опорами (в испытаниях [7, 8] эта длина составила 1 м).

Если исходить из условия равенства растягивающих напряжений, определяемых согласно выражению (4) для каждой модели балки, то это равносильно равенству изгибающих моментов. Для трехточечного изгиба максимальное значение $M > 0$ (под сосредоточенной силой) составляет $M_{\max} = Pl/4$, а для балки на сплошном

упругом основании (на расстоянии $z_c = \pi/(2k)$ от начала координат) — $M_{\max} = Pe^{-\pi/2}/(4k)$. Приравняв эти выражения, находим, что в лабораторных исследованиях длина балки должна составлять $l = e^{-\pi/2}/k \approx 0,208/k$. Так, при деревянных шпалах $l_w = 0,125...0,163 \text{ м}$, при железобетонных — $l_c = 0,081...0,110 \text{ м}$, в то время как при испытаниях стандартная длина образца обычно 1–1,2 м. Следовательно, при оценке прочности рельса с трещиной необходимо использовать модуль упругости рельсового основания U (или коэффициент относительной жесткости k), соответствующий результатам лабораторных испытаний.

Для малых трещин с размером до 30 % от площади головки рельса допустимая нагрузка на ось, согласно оценке (6), значительно больше эксплуатационных нагрузок. Для рельсов разного типа максимальное напряжение, определяемое по формуле (5) при $z = \pi/(2k)$, составляет 40...70 МПа. Соответственно, значение коэффициента интенсивности напряжений для трещин диаметром 32 мм не превышает $9,7 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, в то

Рис. 2. Зависимость критической осевой нагрузки от размера трещины: ——— теория; Δ — эксперимент

время как вязкость разрушения рельсовой стали составляет 27...55 МПа $\sqrt{м}$ [9]. Поэтому скачкообразный рост трещины при малых размерах маловероятен. Однако стабильное усталостное подрастание трещины в каждом цикле нагружения может происходить при значениях КИН, намного меньших критического: $K_I \ll K_{Ic}$. Это соответствует режиму многоциклового усталостного разрушения.

Для оценки долговечности элементов конструкций часто используется уравнение роста усталостных трещин, предложенное Пэрисом:

$$\frac{da}{dN} = C \frac{(\Delta K_I)^m}{1-R}, \quad (7)$$

где a — радиус трещины; N — количество циклов нагружения; C , m — экспериментально определяемые константы материала; ΔK_I — размах коэффициента интенсивности напряжений:

$$\Delta K_I = K_I^{\max} - K_I^{\min};$$

R — коэффициент асимметрии нагружения,

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = K_I^{\max} / K_I^{\min}.$$

К настоящему времени предложено много версий уравнения (7). В большинстве случаев они являются эмпирическими, содержат большое количество взаимосвязанных параметров, которые определяются экспериментально в лабораторных условиях путем обработки статистических данных. Эти параметры не являются константами материалов, а зависят от ряда факторов, в частности от условий нагружения, и потому имеют широкий разброс значений. Так, например, по данным исследования [10] для рельсовых сталей показатель степени m в уравнении (7) имеет диапазон от 2,67 до 11,0, а порядок коэффициента C в этом же уравнении меняется от 10^{-13} до 10^{-31} . Это приводит к значительной сложности применения указанных уравнений, так как конкретные значения параметров известны лишь самим экспериментаторам. Каждая новая «постоянная» материала (типа m и C) требует увеличения объема экспериментальной работы, тем более значительного, чем больше разброс данных (в некоторых уравнениях роста трещины количество экспериментально измеряемых параметров достигает восьми [11]). Очевидно, что увеличение числа экспериментальных констант в расчетной формуле неизбежно приводит к снижению ее практической пользы.

Принципиальную трудность представляет определение напряженно-деформированного состояния рельса в области расположения трещины в силу низкой точности расчетной схемы и значений нагрузок. При этом способ приложения нагрузки может оказывать весьма существенное влияние на циклическую трещиностойкость. Так, например, изменение коэффициента асимметрии нагружения с 0,3 до 0,8 в уравнении (7) приводит к увеличению допустимого количества циклов на один порядок.

В связи с большим числом не поддающихся учету факторов, влияющих на скорость развития поперечных трещин в эксплуатационных условиях, оценка долговечности (живучести) рельса может быть сделана лишь как первое приближение. В этих обстоятельствах требуется сравнительно простое по структуре и удобное в использовании аналитическое выражение, описывающее диаграмму усталостного разрушения.

Исходя из энергетических соображений и на основе анализа размерностей Г. П. Черепановым было предложено следующее уравнение скорости роста усталостных трещин [12]:

$$\frac{da}{dN} = -\beta \left(\frac{K_{I \max}^2 - K_{I \min}^2}{K_c^2} + \ln \frac{K_c^2 - K_{I \max}^2}{K_c^2 - K_{I \min}^2} \right), \quad (8)$$

где β — постоянная, имеющая размерность длины. Автором величина β подбирается из условия наилучшего соответствия экспериментам («метод наложения» [13]), то есть практически играет роль подгоночного параметра.

Учитывая, что величина критического КИН при усталостном разрушении K_c близка к значению вязкости разрушения K_{Ic} , уравнение (8) при $R = 0$ (считается, что трещина закрывается при снятии нагрузки) можно переписать в более простом виде:

$$\frac{da}{dN} = -d \left[\left(\frac{K_{I \max}}{K_{Ic}} \right)^2 + \ln \left(1 - \left(\frac{K_{I \max}}{K_{Ic}} \right)^2 \right) \right], \quad (9)$$

где d — структурный параметр, имеющий размерность длины $d = 2 K_{Ic}^2 / (\pi \sigma_c^2)$ [14]; σ_c — предел прочности при растяжении.

Теперь в уравнение роста трещины входят только два стандартных параметра: вязкость разрушения K_{Ic} и предел прочности материала σ_c . Такое упрощение исходного уравнения (8) представляется вполне возможным, учитывая

высокую неопределенность и большой разброс факторов, влияющих на рост трещины в эксплуатационных условиях и значительное отличие последних от лабораторных.

Допустимое количество циклов, следующее из выражения (9),

$$N = -\frac{1}{d} \int_{a_n}^{a_k} \frac{da}{\left(\frac{K_{I \max}}{K_{Ic}}\right)^2 + \ln \left(1 - \left(\frac{K_{I \max}}{K_{Ic}}\right)^2\right)}. \quad (10)$$

В табл. 2 дано сравнение числа циклов, рассчитанное согласно (10), с результатами лабораторных испытаний на циклический изгиб рельсов типа Р65 ($K_{Ic} = 32,2 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$) с ВПТ в головке [15].

Совпадение результатов вычислений по формуле (10) с экспериментальными данными можно признать вполне удовлетворительным, учитывая принципиальное отличие расчетной схемы (балка на сплошном упругом основании) от экспериментальной схемы нагружения (трехточечный изгиб балки). В первом случае нормальное растягивающее напряжение σ_z вычисляется от «обратного» изгибающего момента на расстоянии $z = \pi/(2k)$ от точки приложения силы P , а во втором — от «прямого» момента в сечении непосредственно под силой. Так, при $P = 100 \text{ кН}$ максимальное напряжение в балке на сплошном упругом основании составит $\sigma_z \approx 9 \text{ МПа}$ (при $k = 1,536 \text{ м}^{-1}$), а в балке длиной 1,2 м (стандартная длина в испытаниях) и закрепленной на двух опорах $\sigma_z = 79,6 \text{ МПа}$.

Параметры уравнения Пэриса (7) (при $R = 0$) в работе [15] определены в ходе лабораторного эксперимента ($m = 3,1$, $C = 1,1 \cdot 10^{-12}$), то есть заранее неизвестны, что не позволяет оценить

долговечность балки с трещиной без предварительных испытаний. В то же время предлагаемая оценка долговечности по формуле (10) не требует знания каких-либо дополнительных констант материала, кроме стандартных (справочных) — вязкости разрушения K_{Ic} и предела прочности σ_c .

В работе [15] форма трещины аппроксимируется овалом четвертой степени [6], что, с учетом влияния границ тела, приводит к громоздкому выражению для КИН. Однако, как следует из табл. 2, даже простая модель круговой трещины в безграничном теле дает близкий результат.

Долговечность (живучесть) также можно выразить в тоннаже — объеме груза брутто, который можно пропустить через дефектный рельс при возрастании размера трещины до критического. На рис. 3 показана зависимость тоннажа T от нагрузки на ось q для рельса Р65 при

Рис. 3. Живучесть рельса в зависимости от осевой нагрузки (допустимый тоннаж)

Таблица 2

Допустимое количество циклов нагружения

Радиус трещины, мм		Нагрузка P , кН	Количество циклов		
начальный a_n	конечный a_k		расчетное		лабораторный эксперимент [15]
			по формуле (11)	по формуле Пэриса [15]	
3,7	14,2	300	$4,6 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^6$
3,7	11,6	150	$6,8 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^5$
3,8	6,3	400	$7,6 \cdot 10^4$	$1,3 \cdot 10^5$	$9,6 \cdot 10^5$
7,4	10,6	400	$3,0 \cdot 10^4$	$5,3 \cdot 10^4$	$3,7 \cdot 10^4$
9,5	11,6	150	$7,0 \cdot 10^5$	$5,0 \cdot 10^5$	$6,0 \cdot 10^4$
11,6	12,4	250	$2,7 \cdot 10^4$	$2,7 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^4$

$a_n = 6,6$ мм, $a_k = 16,3$ мм. Полученную оценку можно считать удовлетворительной, принимая во внимание, что в расчет не включены различные факторы, влияющие на ресурс в эксплуатационных условиях: остаточные и температурные напряжения, пластические деформации у края трещины, влияние границ тела, иррегулярность формы трещины, присутствие деформации кручения и др.

Библиографический список

1. Jablonski D., Tang Y. H., Pelloux R. M. Simulation of railroad crack growth life using laboratory specimens // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* 1990. Vol. 14, № 1. Pp. 27–36.
2. Orringer O., Morris J. M., Jeong D. Y. Detail fracture growth in rails: test results // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* 1986. Vol. 5. Pp. 69–95.
3. Sih G. C., Tzou D. Y. Three-dimensional transverse fatigue crack growth in rail head // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* 1985. Vol. 3. Pp. 97–112.
4. Смирнов В. И. О прогнозировании долговечности железнодорожных рельсов // *Транспорт: наука, техника, управление.* 1999. № 10. С. 19–23.
5. Яковлева Т. Г., Шульга В. Я., Амелин С. В., Альбрехт В. Г. и др. Основы устройства и расчетов железнодорожного пути / под ред. С. В. Амелина и Т. Г. Яковлевой. М.: Транспорт, 1990. 367 с.
6. Андрейкив А. Е., Шур Е. А., Панько И. Н., Дарчук А. И., Киселева Т. И. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений для внутренней поперечной трещины в головке рельса // *Физико-химическая механика материалов.* 1980. Т. 16, № 1. С. 95–98.
7. Бычкова Н. Я., Киселева Т. Н., Шур Е. А. Об определении параметра вязкости разрушения K_{Ic} при испытании на усталость // *Проблемы прочности.* 1973. № 5. С. 111–116.
8. Порошин В. Л., Шур Е. А. Изменение свойств рельсов в процессе эксплуатации // *Производство железнодорожных рельсов и колес: сб. науч. тр. Вып. 5.* Харьков: УкрНИИМет, 1977. С. 92–95.
9. Orringer O., Morris J. M., Steele R. K. Applied research on rail fatigue and fracture in the United States // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* 1984. Vol. 1. Pp. 23–49.
10. Эдель К.-О., Ортман Р. Свойства рельсовых сталей с точки зрения механики разрушения // *Железные дороги мира.* 1991. № 11. С. 54–61.
11. Ярема С. Я. Методология определения характеристик сопротивления развитию трещин (трещиностойкости) материалов при циклическом нагружении // *Физико-химическая механика материалов.* 1981. № 4. С. 100–110.

12. Черепанов Г. П. О росте трещин при циклическом нагружении // *Прикладная механика и техническая физика.* 1968. № 6. С. 64–75.

13. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

14. Петров Ю. В., Смирнов В. И. О прочности материалов с малыми дефектами // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2006. № 4. С. 165–177.

15. Шур Е. А., Киселёва Т. Н., Порошин В. Л., Бейзеров М. С. Прочность рельсов с трещинами // *Вестник ВНИИЖТ.* 1984. № 2. С. 48–52.

References

1. Jablonski D., Tang Y. H., Pelloux R. M. Simulation of railroad crack growth life using laboratory specimen. *Theor. and Appl. Fract. Mech.* 1990, vol. 14, no. 1, pp. 27–36.
2. Orringer O., Morris J. M., Jeong D. Y. Detail fracture growth in rails: test results. *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 1986, vol. 5, pp. 69–95.
3. Sih G. C., Tzou D. Y. Three-dimensional transverse fatigue crack growth in rail head. *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 1985, vol. 3, pp. 97–112.
4. Smirnov V. I. *O prognozirovanii dolgovechnosti zheleznodorozhnykh rel'sov* [On predicting the durability of railway rails]. *Transport: nauka, tekhnika, upravlenie – Transport: science, technology, management*, 1999, no. 10, pp. 19–23.
5. Yakovleva T. G., et al. *Osnovy ustroystva i raschetov zheleznodorozhnogo puti* [Fundamentals of railway track design and calculation]. Ed. by Amelin S. V., Yakovleva T. G., Moscow, Transport Publ., 1990, 367 p.
6. Andreykiv A. E., Shur E. A., Pan'ko I. N., Darchuk A. I., Kiseleva T. I. *Raschet koeffitsientov intensivnosti napryazheniy dlya vnutrenney poperechnoy treshchiny v golovke rel'sa* [Calculation of stress intensity coefficients for an internal transverse crack in the rail head]. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov – Physical and chemical mechanics of materials*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 95–98.
7. Bychkova N. Ya., Kiseleva T. N., Shur E. A. *Ob opredelenii parametra vyazkosti razrusheniya pri ispytanii na ustalost'* [About determination of the fracture toughness parameter in fatigue testing]. *Problemy prochnosti – Strength problems*, 1973, no. 5, pp. 111–116.
8. Poroshin V. L., Shur E. A. *Izmenenie svoystv rel'sov v protsesse ekspluatatsii* [Changing of rails' properties in the process of operation]. *Sb. nauch. tr. «Proizvodstvo zheleznodorozhnykh rel'sov i koles»* [In: Coll. works "Production of railway rails and wheels"]. Iss. 5. Kharkov, UkrNIIMet Publ., 1977, pp. 92–95.
9. Orringer O., Morris J. M., Steele R. K. Applied research on rail fatigue and fracture in the United States. *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 1984, vol. 1, pp. 23–49.

10. Edel' K.-O., Ortman R. *Svoystva rel'sovykh staley s tochki zreniya mekhaniki razrusheniya* [Properties of rail steel from position of fracture mechanics]. *Zheleznye dorogi mira – Railways of the world*, 1991, no. 11, pp. 54–61.
11. Yarema S. Ya. *Metodologiya opredeleniya kharakteristik soprotivleniya razvitiyu treshchin (treshchinostoykosti) materialov pri tsiklicheskom nagruzhении* [Methodology for determining the characteristics of resistance to the crack propagation (crack resistance) in materials subjected to cyclic loading]. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov – Physical and chemical mechanics of materials*, 1981, no. 4, pp. 100–110.
12. Cherepanov G. P. *O roste treshchin pri tsiklicheskom nagruzhении* [On the growth of cracks under cyclic loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Applied mechanics and technical physics*, 1968, no. 6, pp. 64–75.
13. Cherepanov G. P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Mechanics of brittle fracture]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 640 p.
14. Petrov Yu. V., Smirnov V. I. *O prochnosti materialov s malymi defektami* [On the strength of materials with small defects]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Bulletin of RAS. Solid body mechanics*, 2006, no. 4, pp. 165–177.
15. Shur E. A., Kiselyova T. N., Poroshin V. L., Beyzerov M. S. *Prochnost' rel'sov s treshchinami* [Strength of rails with cracks]. *Vestnik VNIIZhT – VNIIZhT Bulletin*, 1984, no. 2, pp. 48–52.