Строительная механика и расчет сооружений

УДК 624.012.04

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-2-68-74

© А. М. Масленников, д-р техн. наук, профессор

© Е. А. Кобелев, канд. техн. наук, доцент

© Н. А. Масленников, канд. техн. наук, доцент

(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия)

E-mail: aleksmaslennikov@yandex.ru

© A. M. Maslennikov, Dr. Sci. Tech., Professor

© E. A. Kobelev, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© N. A. Maslennikov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering, St. Petersburg, Russia)

E-mail: aleksmaslennikov@yandex.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

SOLUTION OF SUSTAINABILITY TASKS BY FINITE ELEMENT METHOD

Предлагаются новые функции, описывающие деформированное состояние стержней при потере устойчивости для двух типов стержней с различными граничными условиями. Для решения задач устойчивости с числом кинематической неопределенности более двух рекомендуется сводить решение к характеристическому уравнению с последующим использованием вычислительных программ с матричными операциями. С этой целью для принятых функций построены матрица жесткости и матрица потенциала нагрузки. По примеру с классическим методом перемещений для упомянутых стержней составлена таблица реакций в дополнительных связях от единичных перемещений. Приведено несколько примеров, показывающих достаточно близкие результаты к результатам расчета с помощью таблиц трансцендентных функций.

Ключевые слова: устойчивость, стержни, МКЭ.

New functions are proposed to describe the deformed state of rods upon loss of stability for two types of rods with different boundary conditions. To solve stability problems with a kinematic uncertainty number of more than two, it is recommended to reduce solution to a characteristic equation with the further use of computer programs with matrix operations. For this purpose, a stiffness matrix and potential loading matrix were developed for the adopted functions. Following the example of classical displacement method for the mentioned rods, there was developed a table of reactions for single displacements. Several examples are given that illustrate fairly close results to the exact solutions.

Keywords: stability, rods, FEM.

Впервые задача устойчивости идеально прямого центрально сжатого стержня была решена всемирно известным ученым, членом Петербургской академии наук Леонардом Эйлером (1707–1783 г.) [1]. Все последующие работы по названной теме использовали его результаты.

В 1907 году при строительстве Квебекского моста в Канаде произошла страшная катастрофа [2]. Мост возводился от берега к середине реки в виде консоли. За несколько дней до аварии было замечено выпучивание одного из стержней фермы, но причина этого была не ясна. В дальней-

шем, если аварии и случались, то не такие трагические. К середине XX века уже были созданы точные решения для произвольных рам, включая пространственные. В решение входили трансцендентные функции, которые были сведены в таблицы [3–5]. В работе Н. В. Корноухова [6] был предложен совместный расчет рам на прочность и устойчивость. Названные и другие книги стали основными учебниками по строительной механике в строительных и других вузах со специальными специальностями. В настоящее время задачи устойчивости легко решаются с помощью

программных комплексов типа ЛИРА, SCAD, ANSYS и др.

Кроме точных методов расчета задач устойчивости, широкое распространение получил энергетический метод [7, 8], особенно при расчете сложных конструкций. Решение энергетическим методом считается приближенным, так как при решении задач не ищут форму потери устойчивости, а задаются этой формой.

Приближенным методом расчета является также метод конечных элементов (МКЭ), который получил широкое распространение в области строительной науки и других технических дисциплин в середине XX века. Само слово «конечный элемент» (the finite element), видимо, появилось впервые в статье [9]. В этой же статье было представлено наиболее полное описание метода конечных элементов. Само название метода появилось в связи с заменой континуальных систем дискретными элементами, то есть заменой дифференциальных уравнений, используемых ранее, алгебраическими. МКЭ широко применяется к расчету комбинированных систем, содержащих как элементы континуальных систем, так и стержни. Обычный расчет стержневых систем методом перемещений можно также назвать расчетом методом конечных элементов.

Метод перемещений получил широкое распространение и при расчете задач устойчивости стержневых систем. Интересно отметить, что еще в 1956 г. В. В. Болотин использовал метод перемещений для решений задач динамической устойчивости стержней [10].

Предлагаемый способ расчета справедлив только для свободных рам. Для несвободных рам необходимо вводить дополнительные смещаемые узлы, как показано в примере расчета 3 в конце статьи.

Задаваемые функции деформирования стержней могут быть различными. Одним из вариантов может быть кубический полином, используемый при выводе матрицы жесткости прямолинейного стержня постоянного сечения [11]. Такой полином применен в работе [12].

В настоящей статье предлагаются новые формы потери устойчивости стержней. Для стержня, у которого оба конца защемлены, рекомендуется принять следующую функцию с четырьмя произвольными параметрами f_n :

$$Z = \left[1 \quad x \quad \cos \frac{\pi x}{l} \quad \sin \frac{\pi x}{l} \right] [f_n]. \quad (1)$$

Для стержня, у которого один конец защемлен, а другой шарнирно оперт,

$$Z = \left[1 \quad x \quad \cos \frac{\pi x}{l} \right] [f_n]. \quad (2)$$

В отличие от кубического полинома, эти функции более точно описывают форму потери устойчивости одного стержня и в ряде случаев дают точное значение критической нагрузки.

При расчете на устойчивость необходимо иметь матрицу жесткости и матрицу потенциала нагрузки для стержней.

Вывод матрицы жесткости для прямолинейного стержня постоянного сечения достаточно подробно рассмотрен в литературе [13]. Поэтому ниже приводятся без вывода окончательные выражения этих матриц для обеих функций.

$$r_g = \frac{\pi^4 EI}{8l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} & -\frac{1}{2l} & \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \\ & & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{2l} \\ & & & \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \end{bmatrix};$$

(симметрично)

$$r_g = \frac{\pi^4 EI}{32l} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ & \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

(симметрично)

Новой в данном случае является матрица потенциала нагрузки, представляющая работу внешних сил. Матрица вычисляется по формуле [5, 14]

$$\mathbf{Y}_g = (\mathbf{A}^{-1})^T \int_0^l \mathbf{G}^T \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{A}^{-1} dx. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{F} = N [1]$ — матрица нагрузки.

Для определения перемещения возьмем производную от выражения (1):

$$\frac{dz}{dx} \left[0 \quad 1 \quad -\frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \quad \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right] [f_n] = \mathbf{G} [f_n].$$

$\mathbf{A}$ — матрица параметров f_n . Она имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\pi}{l} \\ 1 & l & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\pi}{l} \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицу, обратную по отношению к A , с учетом принятого правила знаков:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{l}{2\pi} & 0 & -\frac{l}{2\pi} \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные матрицы в (3), получаем окончательное выражение для матрицы потенциала нагрузки для выражения (1):

$$Y_g = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8l} \\ (\frac{\pi^2}{4} - 1)\frac{l}{8} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & (\frac{\pi^2}{4} - 3)\frac{l}{8} & \frac{\pi^2}{8l} \\ \frac{\pi^2}{8l} & \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} & (\frac{\pi^2}{4} - 1)\frac{l}{8} & \frac{\pi^2}{8l} \\ (\text{симметрично}) & & & \end{bmatrix}$$

Выполняя подобные операции для выражения (2), получим окончательное выражение для матрицы потенциала нагрузки:

$$Y_g = F \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{8l} & \frac{\pi^2}{8l} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8l} & \frac{\pi^2}{8l} & 1 - \frac{\pi^2}{8} \\ (\text{симметрично}) & & (\frac{\pi^2}{8} - 1)l \end{bmatrix}.$$

Если стержень, входящий в систему, не нагружен продольной силой, матрица потенциала нагрузки будет нулевой.

Порядок обхода перемещений в матрице следующий: Z_p, Z_j, Z_j' .

Используя полученные матрицы по примеру классического метода перемещений, составим таблицу реакций от единичных перемещений дополнительных связей.

Для решения задач используем аналогию между задачами динамики и устойчивости. Представим МКЭ в матричной форме. Согласно

№	Перемещения	Эпюры	Ординаты
1			$M_k = 3,0440 EI/l - 0,2337 Nl$ $R = 3,0440 EI/l^2 - 0,2337 N$
2			$M_k = 3,0440 EI/l^2 - 0,2337 N$ $R = 3,0440 EI/l^3 - 1,2337 N/l$
3			$M_k = 4,2774 EI/l - 0,1834 Nl$ $M_j = 1,8103 EI/l - 0,0666 Nl$ $R = 6,0881 EI/l^2 - 0,1169 N$
4			$M_k = M_j = 6,0881 EI/l^2 - 0,1169 N$ $R = 12,1761 EI/l^3 - 1,2337 N/l$

Примечание. Для стержней, у которых отсутствует продольная сила, следует брать значения реакций из таблиц статического расчета классического метода перемещений.

энергетическому методу, приращение энергии в состоянии безразличного равновесия равно

$$\mathbf{KZ} - \mathbf{YZ} = 0 \text{ или } |\mathbf{K} - \mathbf{Y}| = 0,$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости; $\mathbf{Y}$ — матрица потенциала нагрузки.

Вынесем из матрицы $\mathbf{Y}$ значение $N = F_{кр}$. Тогда

$$|\mathbf{K} - N\mathbf{Y}_0| = 0.$$

Умножим слева это выражение на матрицу, обратную по отношению к матрице $\mathbf{K}$:

$$|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y}_0 - \frac{1}{N}\mathbf{E}| = 0.$$

Введем обозначения $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{L}$ и $\frac{1}{N} = \lambda$.

В итоге получим характеристическое уравнение, используемое в задачах динамики:

$$|\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}| = 0.$$

Это уравнение легко программируется в операторах MATLAB:

$$\mathbf{B} = \text{inv}(\mathbf{K});$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{B}\mathbf{Y}_0; \\ [\nu, d] &= \text{eig}(\mathbf{L}); \\ F &= \text{inv}(d). \end{aligned}$$

Предложенная программа расчета выдает окончательные результаты, не требующие какого-либо дополнительного подбора.

Пример 1. Покажем применение полученных матриц на примере расчета устойчивости двухэтажной симметричной рамы. $EI = 428 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$. Поскольку симметричная форма потери устойчивости рамы маловероятна, рассмотрим только кососимметричную форму потери устойчивости. На рис. 1 представлены расчетная схема, основная система, деформированные схемы, эпюры моментов от единичных перемещений дополнительных связей.

Ниже приводятся значения указанных на рисунке моментов и реакций, выписанные из таблицы.

Рис. 1. Расчет устойчивости двухэтажной симметричной рамы: а — расчетная схема; б — основная система; в, г — деформированные схемы; д–з — эпюры моментов от единичных перемещений

$$M_1 = M_2 = 6,0881EI/l^2 - 0,1169 N;$$

$$M_3 = 4,2774EI/l - 0,1834 Nl;$$

$$M_4 = 1,8103EI/l - 0,0666 Nl;$$

$$M_5 = 3EI/(l/2) = 6EI/l;$$

$$R_1 = 12,1761EI/l^3 - 1,2337 N/l;$$

$$R_2 = 6,0881EI/l^2 - 0,1169 N.$$

По построенным выше эпюрам моментов составляем матрицу жесткости и матрицу потенциала нагрузки, которая в данном случае играет роль матрицы масс:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12,1761EI}{l^3} & \frac{12,1761EI}{l^3} & \frac{6,0881EI}{l^2} & \frac{6,0881EI}{l^2} \\ & \frac{2 \cdot 12,1761EI}{l^3} & \frac{6,0881EI}{l^2} & 0 \\ (симметрично) & & \frac{4,2774EI}{l} + \frac{3EI}{l/2} & 10,8618 \\ & & \frac{2 \cdot 4,2774EI}{l} + \frac{3EI}{l/2} & \end{bmatrix};$$

$$Y = N \begin{bmatrix} -\frac{1,2337}{l} & \frac{1,2337}{l} & 0,1169 & 0,1169 \\ & -\frac{2 \cdot 1,2337}{l} & -0,1169 & 0 \\ (симметрично) & & -0,1834l & -0,0666l \\ & & & -0,3668l \end{bmatrix}.$$

При использовании вычислительных программ матрицы необходимо представлять в численном виде, подставив значения EI , l и π с четырьмя знаками после запятой:

$$K = \begin{bmatrix} 24,2 & -24,2 & -72,5 & -72,5 \\ -24,2 & 48,3 & 72,5 & 0 \\ -72,5 & 72,5 & 733,9 & 129,3 \\ -72,5 & 0 & 129,3 & 1039,4 \end{bmatrix};$$

$$Y = N \begin{bmatrix} -0,2056 & 0,2056 & 0,1169 & 0,1169 \\ 0,2056 & -0,4112 & -0,1169 & 0 \\ 0,1169 & -0,1169 & -1,1004 & -0,3996 \\ 0,1169 & 0 & -0,3996 & -2,2008 \end{bmatrix}.$$

Вычисления выполним по приведенной выше программе. В результате вычислений получим две матрицы. Первая, квадратная матрица, представляющая в динамике собственные вектора, в данном случае представляет относительные перемещения узлов системы, по которым легко построить формы потери устойчивости системы. Для минимального значения критической силы вектор имеет вид

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0,9386 \\ -0,3358 \\ -0,0493 \\ -0,0619 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 0,4003 \\ 0,9140 \\ -0,0550 \\ 0,0357 \end{bmatrix}.$$

На основании вектора v_1 на рис. 1, в построенная деформированная схема рамы. Вторая диагональная матрица, представляющая в динамике частоты собственных колебаний, выдает параметр λ , который является обратной величиной по отношению к критической силе, то есть $F_{кр.min} = 1/\lambda_{max}$, или $F_{кр.min} = 1/0,0171 = 58,48$ кН, что отличается от точного решения на 4,5 %. За точное принимается решение с использованием таблиц трансцендентных функций [3–5].

Последующие критические силы обычно не определяются из-за невозможности их реализации. Но в данном случае определим вторую критическую силу и построим схему деформирования 2 (рис. 1, з), что может быть интересным при усилении конструкции. $F_{2кр} = 1/0,0094 = 106,34$ кН.

Пример 2. Приведенную выше методику целесообразно использовать для матриц высокого порядка. Для задач с числом кинематической неопределенности не более 2 можно ограничиться обычным приемом составления и раскрытия определителя. Напомним этот прием на простейшем примере. Исходные данные приведены на рис. 2.

Ниже приводятся значения указанных на рисунке моментов и реакций, выписанные из таблицы.

$$M_1 = M_2 = 4,2774 EI/l - 0,1834 Nl = 367,3217 - 1,4672 N;$$

$$R_1 = 6,0881 EI/l^2 - 0,1169 N = 65,3519 - 0,1169 N;$$

$$M_4 = M_5 = 6,0881 EI/l^2 - 0,1169 N = 65,3519 - 0,1169 N;$$

$$R_2 = 12,1761 EI/l^3 - 1,2337 N/l = 16,3379 - 0,1542 N;$$

$$M_3 = 3 EI/l = 257,625; M_6 = 3 EI/l^2 = 32,2031;$$

$$R_3 = 3 EI/l^3 = 4,0254.$$

По приведенным эпюрам определяем реакции от единичных перемещений дополнительных связей и составляем определитель:

$$r_{11} = M_1 + M_3 = 367,3217 - 1,4672 N + 257,625 = 624,9467 - 1,4672 N;$$

$$r_{12} = r_{21} = -M_4 = -65,3519 + 0,1169 N;$$

$$r_{22} = R_2 + R_3 = 16,3379 - 0,1542 N + 4,0254 = 20,3633 - 0,1542 N.$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 624,9467 - 1,4672 N & -5,3519 + 0,1169 N \\ -5,3519 + 0,1169 N & 20,3633 - 0,1542 N \end{bmatrix} = 0;$$

Рис. 2. Расчет устойчивости рамы с числом кинематической неопределимости не более 2: а — расчетная схема; б — основная система; в, г — эпюры моментов от единичных перемещений

$$r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0;$$

$$(624,9467 - 1,4672N) \cdot (20,3633 - 0,1542N) - (-65,3519 + 0,1169N)^2 = 0.$$

Раскрывая определитель, приходим к квадратному уравнению относительно N :

$$N^2 - 521,716 N + 39753,9008 = 0.$$

Решая уравнение, получаем $F_{кр} = N_{мин} = 92,51$ кН, что отличается от точного решения на 0,4 %. Это решение можно считать практически точным.

Пример 3. Применение МКЭ к несвободным рамам приводит к неверным результатам. Чтобы воспользоваться предложенным подходом, необходимо превратить несвободную раму в свободную путем добавления дополнительных смещаемых узлов. Ниже приводится пример расчета несвободной рамы. Чтобы сделать ее свободной, в середине стойки вводится дополнительный узел, который может поворачиваться и смещаться (рис. 3). В итоге конструкция становится трижды кинематически неопределимой. Расчет этой рамы целесообразно выполнить, как и раму на рис. 1, с помощью матричных операций.

Ниже приводятся значения указанных на рисунке моментов и реакций, выписанные из таблицы.

$$M_1 = 3EI/l = 150; M_2 = 4,2774EI/l - 0,1834Nl = 213,87 - 0,7736N;$$

$$M_3 = 1,8103EI/l - 0,0666 Nl = 90,515 - 0,2664N;$$

$$M_4 = 6,0881EI/l^2 - 0,1169 N = 76,1012 - 0,1169N;$$

$$r_{11} = M_1 + M_2 = 363,87 - 0,7736N;$$

$$r_{12} = r_{21} = M_3 = 90,515 - 0,2664N;$$

$$r_{22} = 2M_2 = 427,74 - 1,4672N;$$

$$r_{13} = r_{31} = M_4 = 76,1012 - 0,1169N; r_{23} = r_{32} = 0;$$

$$r_{33} = 2R = 2(12,1761EI/l^3 - 1,2337 N/l) = 76,1006 - 0,6169 N.$$

Составим матрицу жесткости и матрицу потенциала нагрузки для всей конструкции, используя значения полученных реакций:

$$K = \begin{bmatrix} 363,87 & 90,515 & 76,1012 \\ 90,515 & 427,74 & 0 \\ 76,1012 & 0 & 76,1006 \end{bmatrix};$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0,7736 & 0,2664 & 0,1169 \\ 0,2664 & 1,5472 & 0 \\ 0,1169 & 0 & 0,6169 \end{bmatrix}.$$

В результате вычислений получили $F_{кр} = N_{мин} = 98,61$ кН, что отличается от точного решения на 3,2 %. Выпишем также вектор, необходимый для построения схемы деформации рамы. Для минимального значения критической силы вектор имеет вид

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0,2299 \\ -0,0522 \\ -0,9718 \end{bmatrix}.$$

Рис. 3. Расчет несвободной рамы: а — расчетная схема; б — основная система; в — деформированная схема рамы; г-е — эпюры моментов от единичных перемещений

На основании этого вектора на рис. 3 построена деформированная схема рамы.

Выполненные примеры показывают, что предлагаемый вариант решения задач устойчивости стержневых систем МКЭ обладает достаточной для практических целей достоверностью (расхождение с точным решением менее 5 %). Это вполне допустимо, так как несовершенство реальных конструкций вносит в расчет еще больший разброс.

Библиографический список

1. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1983. 639 с.
2. Оксанович Л. В. Невидимый конфликт. М.: Стройиздат, 1981. 192 с.
3. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений. М.: Трансжелдориздат, 1958. 572 с.
4. Киселев В. А. Строительная механика: специальный курс. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.
5. Масленников А. М. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Юрайт, 2016. 366 с.
6. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. М.: Высшая школа, 1962. 160 с.
7. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
8. Масленников А. М. Исследование устойчивости стержневых гиперболических башен. Л.: ЛИСИ, 1959. 54 с.
9. Turner M. J., Clough R. V., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures // J. Aeron. Sci. 1956. Vol. 23, No. 9. Pp. 805–824.
10. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
11. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. М.: АСВ, СПбГАСУ, 2005. 426 с.
12. Clough R. W. The finite element method in structural mechanics // Stress analysis. London; New-York; Sidney, 1965. Pp. 85–119.
13. Масленников А. М. Расчет статически неопределимых систем в матричной форме. Л.: Стройиздат, 1970. 128 с.
14. Масленников А. М. Расчет строительных конструкций численными методами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 224 с.

References

1. Bogolyubov A. N. *Matematiki. Mekhaniki. Biograficheskiy spravochnik* [Mathematicians. Engineers. Biographical reference]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1983, 639 p.
2. Oksanovich L. V. *Nevidimiy konflikt* [Invisible conflict]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1981, 192 p.
3. Smirnov A. F. *Ustoychivost' i kolebaniya sooruzheniy* [Stability and vibrations of structures]. Moscow, Transzheldorizdat Publ., 1958, 572 p.
4. Kiselev V. A. *Stroitel'naya mekhanika* [Construction mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1980, 616 p.
5. Maslennikov A. M. *Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy* [Dynamics and stability of structures]. Moscow, Yurayt Publ., 2016, 367 p.
6. Kornoukhov N. V. *Prochnost' i ustoychivost' sterzhnevyykh sistem* [Strength and stability of rod systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1962, 160 p.
7. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1946, 532 p.
8. Maslennikov A. M. *Issledovanie ustoychivosti sterzhnevyykh giperboloidnykh bashen* [Study of stability of rod hyperboloid towers]. Leningrad, LISI Publ., 1958, 54 p.
9. Turner M. J., Clough R. V., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aeron. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 9, pp. 805–824.
10. Bolotin V. V. *Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem* [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956, 600 p.
11. Il'in V. P., Karpov V. V., Maslennikov A. M. *Chislennyye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki* [Numerical methods for solving problems of structural mechanics]. Moscow, ASV Publ., SPbGASU, 2005, 426 p.
12. Clough R. W. *The finite element method in structural mechanics*. In: Stress analysis. London; New York; Sidney, 1965, pp. 85–119.
13. Maslennikov A. M. *Raschet staticheski neopredelimykh sistem v matrichnoy forme* [Calculation of statically indeterminate systems in a matrix form]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1970, 128 p.
14. Maslennikov A. M. *Raschet stroitel'nykh konstruktsiy chislennymi metodami* [Structural analysis of construction structures with numerical methods]. Leningrad, LGU Publ., 1987, 224 p.