УДК 539.3

© Л. М. Кэган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-1-107-110

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

ОБ ОДНОМ УДИВИТЕЛЬНОМ СВОЙСТВЕ УПРОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА

ABOUT ONE SURPRISING PROPERTY OF THE SIMPLIFIED BENDING EQUATION

Дифференциальное уравнение изгиба стержня, записанное через изгибающий момент с учетом сжатия или растяжения силой произвольной степени малости, позволяет без вычисления прогибов решать простые статически неопределимые задачи. Если сила отсутствует, такая возможность пропадает. Предлагаемая работа исследует этот необычный эффект. В работе также решается задача об изгибе стержня в условиях больших перемещений. Применяется непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений изгиба.

Ключевые слова: упрощенное уравнение изгиба, статически неопределимый стержень, большие перемещения при изгибе.

The differential bending equation of the rod, written in terms of bending moment and taking into account compression or tension by the force of arbitrary degree of smallness, allows solving simple statically indeterminate problems without calculating the deflections. If there is no force, such possibility disappears. The proposed article examines this unusual effect. The article also examines the bending problem of the rod under condition of large displacements. Direct integration of differential bending equations is used.

Keywords: simplified bending equation, statically indeterminate rod, large displacements at bending.

Дифференциальное уравнение изгиба прямолинейного упругого стержня переменного сечения, сжатого силой P на торце, имеет вид

$$(EIw'')'' + Pw'' = -q. \quad (1)$$

Традиционные обозначения не разъясняются.

Во многих случаях уравнение (1) полезно заменить системой уравнений

$$w'' = -\frac{M}{EI}, \quad (2)$$

$$M'' + \frac{P}{EI}M = -q. \quad (3)$$

Такой вид, не требующий дифференцирования жесткости EI , удобен, например, при работе со ступенчатыми стержнями.

А. Ф. Ржаницын [1] назвал уравнение (3) упрощенным уравнением изгиба. Он рассмотрел

задачи устойчивости и продольно-поперечного изгиба, в которых краевая задача распадается на независимые задачи для уравнений (2) и (3). В таких случаях критические силы и изгибающие моменты можно вычислять, не определяя прогибы.

Уравнение (3) позволяет без вычисления прогибов раскрыть статическую неопределимость в простейших статически неопределимых задачах. Действительно, сожмем стержень на рис. 1 исчезающе малой силой $P \rightarrow 0$, приложенной к торцу. Граничные условия запишем в виде

$$M(l) = 0, M(0) + lM'(0) = ql^2 / 2. \quad (4)$$

Эти условия, являющиеся следствием равновесия, справедливы в предположении малых

Рис. 1

углов поворота, когда величиной w'^2 можно пренебречь.

Подчинив решение уравнения (3) условиям (4), после перехода к пределу при $P \rightarrow 0$ приходим к привычному выражению для изгибающего момента в стержне постоянного сечения. Для стержня переменного сечения изгибающие моменты получаем численно, например средствами MathCAD.

Положив сразу $P = 0$, то есть используя уравнение

$$M'' = -q \quad (5)$$

вместе с граничными условиями (4), теряем возможность решать статически неопределимые задачи. Предлагаемая работа объясняет этот парадокс.

Предлагаемое объяснение. В [1] уравнение (3) получено формально подстановкой (2) в (1), но одновременно оно представляет собой условие равновесия элемента стержня (рис. 2), учитывающее с точностью до w'^2 деформацию. Из равновесия имеем

$$M' = Q, Q' = -q - N\theta'. \quad (6)$$

Чтобы получить (3), остается учесть $N = -P$, $\theta' = w''$ и принять во внимание (2).

Оставаясь в рамках линейной теории, с помощью (6) можем учесть только влияние сжатия

Рис. 2

стержня на изгиб, так что в отсутствие силы P учет уравнениями (6) деформации себя не проявляет.

Рассмотрим теперь уравнение (5), деформацию не учитывающее. Интегрируя его, для равномерно распределенной нагрузки имеем

$$M' = -qx + B, M = -q \frac{x^2}{2} + Bx + A.$$

Граничные условия (4) вырождаются в одно условие

$$A + Bl = ql^2 / 2,$$

поэтому пропадает возможность раскрыть статическую неопределимость.

Покажем, что вводить в рассмотрение малую силу P , отсутствующую в обсуждаемой задаче, необязательно. Достаточно в зависимости (6) вычислить продольную силу N с учетом нелинейных слагаемых. Проектируя на горизонтальную ось все силы, приложенные к элементу стержня (рис. 3), имеем

$$N = Q\theta. \quad (7)$$

Так как $\theta = w'$, то зависимости (6) с учетом (2), (7) дают

$$M'' - w' M' \frac{M}{EI} = -q. \quad (8)$$

Система уравнений (2), (8) вместе с граничными условиями

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w(l) = 0, M(l) = 0$$

интегрируется средствами MathCAD. Результатом является привычная эпюра изгибающих моментов (рис. 4). Так как учтены деформации, то опорный момент немного отличается от значения $M_{оп} = 0,125ql^2$. При $ql^3 / EI = 1$ имеем $M_{оп} = 0,1249977ql^2$.

Учет больших перемещений. Численное решение уравнения (8) средствами MathCAD помогло выяснить природу обсуждаемого эффекта. Применим вычислительные возможности пакета к задаче об изгибе упругого стержня при больших прогибах.

Метод точного решения задачи, так называемый метод упругих параметров, предложен

Рис. 3

Рис. 4

Е. П. Поповым [2]. Метод рассматривает стержни с нерастяжимой осью, нагруженные сосредоточенными силами и моментами, позволяет вычислять перемещения и усилия, а также доказывать теоремы об изгибе при больших прогибах. Согласно [2], стержни, нагруженные распределенными силами, и стержни переменного сечения методом не охватываются. В этих случаях применяется численное решение задачи, что удобно выполнить средствами пакета MathCAD.

Рассмотрим изгиб стержня на рис. 1. Пусть s — координата, отсчитываемая вдоль оси деформированного стержня (так как ось нерастяжима, координата не зависит от деформации). $EI(s)$ — жесткость при изгибе. К стержню приложена мертвая нагрузка интенсивности $q(s)$. Такая нагрузка в процессе деформации сохраняет свою величину и направление.

Система дифференциальных уравнений задачи имеет вид

$$\theta' = -\frac{M}{EI(s)}, \quad (9)$$

$$w' = \sin(\theta), \quad x' = \cos(\theta), \quad (10)$$

$$M' = Q, \quad Q' = -q(s) \cos(\theta) - N\theta', \quad N = Q \operatorname{tg}(\theta). \quad (11)$$

Здесь всюду дифференцирование выполняется по координате s ; w — перемещение в направлении, перпендикулярном оси до деформации; x — координата, отсчитываемая вдоль этой же оси. Обратим внимание на то, что законы изменения жесткости EI и интенсивности q произвольны.

Матрица правых частей дифференциальных уравнений

$q := 100$

$$D(s, y) := \begin{bmatrix} -\frac{y_2}{EI(s)} & \sin(y_0) & y_3 & -q \cdot \cos(y_0) - y_4 \cdot \tan(y_0) \cdot \left(-\frac{y_2}{EI(s)}\right) & \cos(y_0) \end{bmatrix}$$

Преобразование граничных условий

Начальное приближение для преобразования

$$w := q \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \cdot 1.04 \end{bmatrix} \cdot 0.7 \quad \text{start} := 0 \quad \text{stop} := 1$$

$$\text{zinit}(\text{start}, w) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_0 \\ w_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{endC}(\text{stop}, w) := \begin{bmatrix} w_1 - 0 \\ w_2 - 0 \end{bmatrix} \quad t := \text{sbval}(w, \text{start}, \text{stop}, D, \text{zinit}, \text{endC})$$

Интегрирование уравнений при известных начальных условиях

$$\text{Res} := \text{Rkadapt} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_0 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{start}, \text{stop}, 500, D \right) \quad \begin{aligned} S &:= \text{Res}^{(0)} & M100 &:= \frac{1}{q} \cdot \text{Res}^{(3)} & Q100 &:= \frac{1}{q} \cdot \text{Res}^{(4)} \\ W100 &:= \text{Res}^{(2)} & X100 &:= \text{Res}^{(5)} \end{aligned}$$

Рис. 5

Рис. 6

Геометрические уравнения (10) очевидны, уравнения (11) являются аналогами (6), (7) в случае больших деформаций.

Граничные условия таковы:

$$w(0) = 0, \theta(0) = 0, x(0) = 0, w(l) = 0, M(l) = 0. \quad (12)$$

Прежде чем решать краевую задачу (9)–(12) средствами пакета MathCAD, сделаем следующее замечание. Наиболее простую функцию Odesolve использовать не удастся, так как предусмотренный этой функцией процесс преобразования условий на правом торце в соответствующие начальные условия сходится не всегда. Такое преобразование нужно выполнить отдельно с помощью функции sbval, корректно подобрав (путем попыток) приближенные начальные условия, требуемые функцией. Затем применяется соответствующий решатель задачи Коши.

Расчетный лист MathCAD, реализующий вычисления, приведен на рис. 5. Вычисления проделаны для стержня постоянного сечения, нагруженного равномерно распределенной силой q , которая задана безразмерным параметром $\bar{q} = ql^3 / EI$. Постоянство нагрузки и жесткости сказывается только на виде матрицы w началь-

ного приближения. Коэффициенты 0,7 и 1,04 этой матрицы подобраны путем попыток, позволяют охватить диапазон $[0, 100]$ параметра $\bar{q}$.

Эпюры изгибающих моментов $\bar{M} = M / ql^2$, поперечных сил $\bar{Q} = Q / ql$ и изогнутые оси стержня изображены на рис. 6. Цифрами около кривых обозначены значения $\bar{q}$. Оси стержня показаны в масштабе.

Библиографический список

1. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

References

1. Rzhanitsyn A. R. *Ustoychivost' ravnovesiya uprugikh system* [Stability of the equilibrium state of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955, 475 p.
2. Popov E. P. *Teoriya i raschet gibkikh uprugikh stержней* [Theory and calculation of flexible elastic rods]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 296 p.