УДК 624.07

© Д. В. Уразгильдеев, аспирант
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: akin_ura@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-6-123-129

© D. V. Urazgildeev, post-graduate student
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: akin_ura@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНОЙ ФОРМЕ СТЕРЖНЕВЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНЫХ АРОК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

BENDING-TORSION STABILITY OF ROD CURVILINEAR ELEMENTS OF STEEL ARCHES BEYOND THE ELASTICITY LIMIT

Представлено решение задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме криволинейных стержневых элементов сплошностенчатых арок за пределом упругости. Решение основывается на деформационной теории плоских упругих криволинейных стержней (алгоритм «Стержень») и алгоритме «Сечение», который позволяет учитывать развитие пластических деформаций. Приводятся графики зависимости коэффициентов устойчивости от кривизны, приведенной гибкости и относительных эксцентриситетов.

Ключевые слова: стальная арка открытого бисимметричного профиля, стержневые криволинейные элементы арок, устойчивость по изгибно-крутильной форме за пределом упругости, коэффициент устойчивости криволинейных элементов арок.

The article presents the solution of the problems of stability in the bending-torsion shape of the core elements of continuous-step arches beyond the elastic limit. This solution is based on deformation theory of plane elastic archy rods ("Rod" algorithm) and "Cross-Section" algorithm, which allows taking into account the development of plastic deformations. Graphs of the dependence of stability coefficients on curvature, reduced flexibility and relative eccentricities are given.

Keywords: steel arch with open bisymmetrical profile, rod curvilinear arch elements, stability by bending-torsion form beyond the elasticity limit, stability coefficient of curved elements of arches.

Стальные арки имеют явное преимущество по сравнению с конструкциями из балок и рам вследствие значительно меньших изгибающих моментов, возникающих в сечениях конструкции. Уменьшение изгибающего момента происходит в связи с распором, который в каждом сечении конструкции вызывает момент, противоположный по знаку моменту от внешних сил. Поэтому в сечениях арок действует продольная сила с небольшими эксцентриситетами. При этом из плоскости арок следует учитывать также влияние возможных случайных эксцентриситетов. Устойчивость арок в плоскости их нагружения по изгибной форме исследована достаточно подробно, а устойчивость криволинейных ее элементов по изгибно-крутильной форме изучена недостаточно (см., например, [1]) для постро-

ения инженерной методики расчета. Широкое применение сплошностенчатых арочных конструкций сдерживается в связи с отсутствием в отечественных нормах указаний по расчету таких конструкций на устойчивость из плоскости нагружения.

В работе [2] была предложена методика расчета на устойчивость по изгибно-крутильной форме элементов сплошностенчатых арок двутаврового сечения при упругой работе материала. В настоящей статье представлен алгоритм расчета криволинейных стержневых элементов стальных арок открытого бисимметричного профиля за пределом упругости. Для решения такого рода задач используем аналитическо-численный метод [3, 4], который, как показано в экспериментально-теоретических исследова-

ниях [5–13], позволяет с относительно высокой скоростью и с достаточной степенью точности получать результаты об устойчивости за пределом упругости различных стержневых элементов. С. Н. Пичугин в работе [5] с помощью указанного метода исследовал устойчивость внецентренно сжатых гнутосварных стержней замкнутого профиля. Н. Н. Родиков [6], используя этот метод, исследовал двутавровые стержни с прямолинейной осью. П. А. Пяткин [7] рассматривал пространственную устойчивость стержневых элементов, усиленных под нагрузкой. И. В. Астахов [8] и А. Ю. Кузнецов [9] использовали данный метод при исследовании пространственной устойчивости стержневых элементов из холодногнутых профилей. В. Ю. Аскинази в работе [10] исследовал устойчивость стержневых элементов переменной жесткости.

Для определения напряжений и деформаций в поперечном сечении элемента за пределом упругости используем алгоритм «Сечение» [3]. Данный алгоритм позволяет оценивать развитие пластических деформаций в сечении по мере роста силовых факторов. В работах [5–13] подробно описана методика реализации алгоритма «Сечение». Кратко представим основные ее аспекты. Для использования алгоритма необходимо разбить сечение двутаврового стержня на достаточно малые площадки ΔA_k с декартовыми x_k , y_k и секториальными ω_k координатами (рис. 1).

Рис. 1. Схема разбиения сечения стержня на элементарные площадки

Количество площадок разбиения поперечного сечения m подбирается таким образом, чтобы при обеспечении необходимой точности время расчета было минимальным. Относительные деформации каждой k -й площадки определяются в соответствии с гипотезой плоских сечений в сочетании с законом секториальных площадей, которые можно представить в виде

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 - \chi_x y_k - \chi_y x_k - \chi_z \omega_k, \quad (1)$$

где ε_0 — относительная деформация оси стержня; χ_x , χ_y , χ_z — кривизны относительно осей x , y соответственно и кручения, которые зависят от перемещений точек оси стержня в плоскости арки v , из плоскости u и угла закручивания сечения θ (см. рис. 2, в), а также от их производных:

$$\chi_x = v''; \quad \chi_y = -u'' + \frac{\theta}{R}; \quad \chi_z = \theta' + \frac{u'}{R}, \quad (2)$$

где R — радиус кривизны оси арки.

Напряженно-деформированное состояние в поперечном сечении стержня с учетом нелинейной работы стали определяется из решения системы нелинейных уравнений. Согласно теории тонкостенных стержней, эти уравнения определяют связь между усилиями N , M_x , M_y , B_ω и нормальными напряжениями σ :

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k \Delta A_k; \\ M_x &= \int_A \sigma y dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k y_k \Delta A_k; \\ M_y &= \int_A \sigma x dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k x_k \Delta A_k; \\ B_\omega &= \int_A \sigma \omega dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k \omega_k \Delta A_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Определив усилия N , M_x , M_y , B_ω , которые соответствуют упругой работе материала ($\sigma_{\max} = 0,8R_y$), строим дальнейшее решение поставленной задачи при упругопластической работе материала в приращениях. Тогда физические зависимости между напряжениями и деформациями принимают следующий вид:

$$\Delta \sigma = \Delta \varepsilon E_k, \quad (4)$$

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_0 - \Delta \chi_x y_k - \Delta \chi_y x_k - \Delta \chi_z \omega_k, \quad (5)$$

где E_k — касательный модуль упругости.

С учетом (4) и (5) выражения для внутренних усилий (3) в приращениях предстанут в виде

Рис. 2. Расчетная схема: а — схема нагружения стержня; б — опорное закрепление; в — изгибно-крутильные перемещения сечения

$$\begin{aligned}\Delta N &= k_{11}\Delta\varepsilon_0 - k_{12}\Delta\chi_x - k_{13}\Delta\chi_y - k_{14}\Delta\chi_z; \\ \Delta M_x &= k_{21}\Delta\varepsilon_0 - k_{22}\Delta\chi_x - k_{23}\Delta\chi_y - k_{24}\Delta\chi_z; \\ \Delta M_y &= k_{31}\Delta\varepsilon_0 - k_{32}\Delta\chi_x - k_{33}\Delta\chi_y - k_{34}\Delta\chi_z; \\ \Delta B_\omega &= k_{41}\Delta\varepsilon_0 - k_{42}\Delta\chi_x - k_{43}\Delta\chi_y - k_{44}\Delta\chi_z, \quad (6)\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}k_{11} &= \sum_{k=1}^m E_{tk} \Delta A_k; \quad k_{12} = k_{21} = \sum_{k=1}^m E_{tk} y_k \Delta A_k; \\ k_{13} = k_{31} &= \sum_{k=1}^m E_{tk} x_k \Delta A_k; \quad k_{14} = k_{41} = \sum_{k=1}^m E_{tk} \omega_k \Delta A_k; \\ k_{22} &= \sum_{k=1}^m E_{tk} y_k^2 \Delta A_k; \quad k_{23} = k_{32} = \sum_{k=1}^m E_{tk} x_k y_k \Delta A_k; \\ k_{24} = k_{42} &= \sum_{k=1}^m E_{tk} y_k \omega_k \Delta A_k; \quad k_{33} = \sum_{k=1}^m E_{tk} x_k^2 \Delta A_k; \\ k_{34} = k_{43} &= \sum_{k=1}^m E_{tk} x_k \omega_k \Delta A_k; \quad k_{44} = \sum_{k=1}^m E_{tk} \omega_k^2 \Delta A_k.\end{aligned}$$

При упругой работе материала система (6) является линейной и жесткостные коэффициенты $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$. При этом коэффициент k_{ij} при $i = j$ приобретает вид классических выражений для жесткостей. При упругопластической работе материала система (6) становится нелинейной, так как в нее начинает входить модуль E_k , нелинейно связанный с относительной деформацией (5). Более подробно порядок расчета описан в работах [3–8].

В качестве расчетной схемы для стержневого элемента арки принимается традиционная модель: шарнирное закрепление на опорах в двух главных плоскостях при отсутствии угла закручивания опорных сечений. Выделение стержневого элемента из общей конструкции производим по расчетной длине из плоскости арки — между прогонами. При этом необходимо произвести расчет арки в плоскости по деформированной схеме при наихудшем сочетании нагрузок и определить значения усилий M_x^0 и N^0 на концах стержневого элемента. На рис. 2 представлен криволинейный стержневой элемент открытого бисимметричного профиля, очерченного по дуге окружности радиусом R , нагруженного силой F с равными концевыми двухосными эксцентриситетами относительно линии, соединяющей центры тяжести опорных сечений. Эксцентриситет в плоскости загрузки e_y определяется по усилиям N^0 и M_x^0 , $e_y = M_x^0 / N^0$. Эксцентриситет из плоскости криволинейного элемента принимается случайным: $e_{x,c} = l_{efy} / 750 + i_y / 20$.

Решение поставленной задачи основывается на деформационной теории расчета упругих плоских криволинейных стержней, обобщенной Е. А. Бейлиным [14], в соответствии с которой система дифференциальных уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} EJ_y \chi_y'' - \chi_y N^0 - \chi_z' M_x^0 - 2\chi_z (M_x^0)' + \\ + \frac{1}{R} (GJ_k \chi_z' - EJ_\omega \chi_z''') = 0; \\ EJ_\omega \chi_z''' - GJ_k \chi_z' - \chi_y (M_x^0 - \frac{EJ_y}{R}) - \\ - i_p^2 (\chi_z N^0)' = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где J_y , J_ω — главный осевой и секториальный моменты инерции сечения; J_k — момент инерции чистого кручения; E , G — модули линейной и сдвиговой деформации; i_p — полярный радиус инерции; χ_y , χ_z определены в (2).

Как отмечалось в [2], значения усилий, обозначенных в системе (7) верхним индексом «ноль», вытекающих из решения задачи по недеформированной схеме при симметричном нагружении, выделенного из арки криволинейного элемента, имеют вид:

$$\begin{cases} N^0 = F \cos \beta; M_x^0 = FR(\cos \beta - \cos \alpha) + Fe_y; \\ M_y^0 = Fe_{x,A} \cos \beta; Q_y^0 = F \sin \beta; M_z^0 = Fe_x \sin \beta. \end{cases} \quad (8)$$

Для решения системы (7) воспользуемся аналитическим методом [3], в соответствии с которым общее решение задачи при упругопластической работе материала представляется в виде линейной комбинации частных решений (алгоритм «Стержень»):

$$\begin{aligned} \chi_y &= \chi_{y,n} + \chi_{y,y} + \chi_{y,p}; \\ \chi_z &= \chi_{z,n} + \chi_{z,y} + \chi_{z,p}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первые слагаемые в (9) (с индексом «н») являются решениями уравнений, составленных по недеформированной расчетной схеме:

$$\chi_{y,n} = \chi_{y,n} \Phi_{\chi,n}(z); \chi_{z,n} = \chi_{z,n} v_{\chi,n}(z), \quad (10)$$

где $\chi_{y,n} = \frac{Fe_{x,c}}{EJ_y}$; $\chi_{z,n} = \frac{Fe_{x,c}R^2}{EJ_\omega}$ — амплитуды кривизны и кручения соответственно; $\Phi_{\chi,n}(z)$; $v_{\chi,n}(z)$ — формы их изменения, которые определены в [1]; $k = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}}$ — изгибно-крутильная характеристика.

Также в работе [2] определены изгибно-крутильные перемещения u_n и θ_n по соответствующим дифференциальным уравнениям (7):

$$u_n = U_n \Phi_n(z); \theta_n = \Theta_n v_n(z), \quad (11)$$

где U_n , Θ_n — амплитуды бокового смещения и угла закручивания; $\Phi_n(z)$, $v_n(z)$ — их соответствующие формы.

В соответствии с [2] вторые слагаемые в (9) являются функциями потери устойчивости, которые при заданных условиях симметричного нагружения ($e_{x,c} = 0$) и принятого закрепления плоского криволинейного стержня могут быть аппроксимированы в виде

$$\chi_{y,y} = \chi_{y,y} \Phi_{\chi,y}(z); \chi_{z,y} = \chi_{z,y} v_{\chi,y}(z), \quad (12)$$

где $\Phi_{\chi,y}(z) = \cos(\pi z / l)$; $v_{\chi,y}(z) = \sin(\pi z / l)$ — формы потери устойчивости; $\chi_{y,y}$, $\chi_{z,y}$ — некоторые неизвестные константы, имеющие соответствующие кривизнам размерности, с точностью до которых решаются бифуркационные задачи устойчивости. В [2] также определены функции потери устойчивости в перемещениях:

$$u_y = U_y \Phi_y(z); \theta_y = \Theta_y v_y(z), \quad (13)$$

где U_y , Θ_y — амплитуды; $\Phi_y(z) = v_y(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ — формы потери устойчивости.

Третьи слагаемые в (9) — $\chi_{y,p}$, $\chi_{z,p}$ — учитывают развитие пластических деформаций, которые могут быть получены с помощью алгоритма «Сечение». Дополнительные приращения кривизны и кручения $\chi_{y,p}$, $\chi_{z,p}$ могут быть аппроксимированы в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{y,p} &= \chi_{y,p,n} \Phi_{\chi,n}(z) + \chi_{y,p,y} \Phi_{\chi,y}(z); \\ \chi_{z,p} &= \chi_{z,p,n} v_{\chi,n}(z) + \chi_{z,p,y} v_{\chi,y}(z), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\chi_{y,p,n}$, $\chi_{y,p,y}$, $\chi_{z,p,n}$, $\chi_{z,p,y}$ — константы, которые определяются с помощью алгоритма «Сечение».

Вернемся к исходной системе уравнений (7) и подставим в нее решение (9):

$$\begin{cases} L_y = EJ_y \chi_{Cy}'' - N^0 (\chi_{y,y} + \chi_{y,n} + \chi_{y,p}) - \\ - (\chi_{z,y}' + \chi_{z,n}' + \chi_{z,p}') M_x^0 - 2(\chi_{z,y} + \chi_{z,n} + \chi_{z,p}) (M_x^0)' + \\ + \frac{1}{R} (GJ_k \chi_{z,y}' - EJ_\omega \chi_{z,y}''') = 0; \\ L_z = EJ_\omega \chi_{zy}''' - GJ_k \chi_{zy}' - \\ - (\chi_{z,y} + \chi_{z,n} + \chi_{z,p}) M_x^0 + \chi_{z,y} \frac{EJ_y}{R} - \\ - i_p^2 \left[(\chi_{z,y}' + \chi_{z,n}' + \chi_{z,p}') N^0 + \right. \\ \left. + (\chi_{z,y} + \chi_{z,n} + \chi_{z,p}) (N^0)' \right] = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для решения системы (15) применим алгоритм метода Бубнова–Галеркина:

$$\int_0^l L_y \varphi_y(z) dz = 0; \int_0^l L_z v_y(z) dz = 0, \quad (16)$$

в результате чего получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных констант кривизны $\chi_{y,y}$ и кручения $\chi_{z,y}$, решив которую будем иметь также константы изгибно-крутильных перемещений U_y и Θ_y по (8).

Таким образом, становятся известны все составляющие кривизны и кручения, а также перемещений:

$$u = U_H \varphi_H(z) + U_y \varphi_y(z) + U_{II} \varphi_{II}(z);$$

$$\theta = \Theta_H v_H(z) + \Theta_y v_y(z) + \Theta_{II} v_{II}(z). \quad (17)$$

Учитывая последнее, изгибно-крутильные «деформационные» усилия можно представить в виде

$$M_y = M_y^0 + N^0 u + M_x^0 \theta; B_\omega = -EJ_\omega \chi_z. \quad (18)$$

Тогда предельная сила стержневого криволинейного элемента, выделенного из арки, определяется по нарушению его равновесного деформационного состояния. Процедура определения перемещений и устойчивости за пределом упругости с помощью алгоритмов «Стержень» и «Сечение» подробно освещена в работах [5–13]. Рассмотрим некоторые результаты исследований. Основные результаты представлены в виде коэффициентов устойчивости $\varphi_{c,y}^* = N / R_y A$ в зависимости от радиуса кривизны выделенного из арки стержня и гибкости.

Тогда проверка устойчивости по изгибно-крутильной форме принимает традиционный вид:

$$\frac{N}{\varphi_{c,y}^* \gamma_c R_y A} \leq 1. \quad (19)$$

На рис. 3 приведены графики зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^* = N / R_y A$ от приведенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и относительного эксцентриситета m_x^0 для стержней, имеющих радиус кривизны 15 м. Сплошные линии соответствуют моменту M_x^0 , увеличивающему кривизну стержня (m_x^0 имеет положительное значение), пунктирные — моменту, уменьшающему кривизну.

Из графиков рис. 3 видно, что знак момента, приложенного по концам арочного элемента, весьма существенно влияет на устойчивость конструкции. Однако с увеличением значения относительного эксцентриситета влияние знака момента падает.

Рис. 3. График зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^*$ от приведенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и m_x^0 для стержней с $R = 15$ м

Аналитически численный метод позволяет с достаточной скоростью и точностью получить новые данные по изгибно-крутильной устойчивости стержневых элементов арок, которые могут быть применены при построении инженерной методики расчета данных конструкций на устойчивость по изгибно-крутильной форме.

Библиографический список

1. Бейлин Е. А., Белый Г. И. Деформационный расчет и пространственные формы потери устойчивости тонкостенных криволинейных стержней // Сопротивление материалов и теория сооружений: республ. межведомств. науч.-техн. сб. Вып. 16. Киев: Будивельник, 1972. С. 186–189.
2. Белый Г. И., Уразильдеев Д. В. К расчету на устойчивость криволинейных стержневых элементов сплошностенчатых стальных арок по изгибно-крутильной форме // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 2 (67). С. 54–59.
3. Белый Г. И. Пространственная работа и предельные состояния стержневых элементов металлических конструкций: дис. ... д-ра техн. наук. Л., 1987. 464 с.
4. Белый Г. И. К расчету на устойчивость стержневых элементов стальных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2013. № 2 (37). С. 44–48.

5. Пичугин С. Н. Прочность и устойчивость стержневых элементов конструкций из гнутосварных профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1986. 22 с.
6. Родиков Н. Н. Устойчивость сжатых с двухосными эксцентриситетами стержневых элементов конструкций из открытых профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1987. 22 с.
7. Пяткин П. А. Прочность и пространственная устойчивость усиленных под нагрузкой стержневых элементов конструкций открытого сечения: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 24 с.
8. Астахов И. В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнутых профилей: дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 123 с.
9. Кузнецов А. Ю. Прочность и пространственная устойчивость составных стержневых элементов конструкций из холодногнутых профилей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2013. 25 с.
10. Аскинази В. Ю. Пространственная устойчивость элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 24 с.
11. Сергеев С. Н. Прочность и устойчивость стержневых элементов металлических конструкций с учетом влияния поперечных сил и кручения: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1987. 22 с.
12. Сотников Н. Г. Прочность и устойчивость элементов стальных конструкций из уголков, имеющих общие и местные дефекты и повреждения: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1987. 25 с.
13. Михаськин В. В. Влияние сварочных процессов на пространственную устойчивость усиливаемых под нагрузкой элементов стержневых конструкций: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 25 с.
14. Бейлин Е. А. К теории деформационного расчета и устойчивости криволинейных и прямолинейных тонкостенных стержней // Механика стержневых систем и сплошных сред: сб. тр. Т. 63. Л., 1970. С. 5–19.

References

1. Beylin E. A., Belyy G. I. *Deformatsionnyy raschet i prostranstvennyye formy poteri ustoychivosti tonkostennykh krivolineynykh sterzhney* [Deformation calculation and spatial forms of loss of stability of thin-walled curved rods]. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy – Resistance of materials and theory of structures*. Kiev, Budivelnik Publ., 1972, iss. 16, pp. 186–189.
2. Belyy G. I., Urazgil'deev D. V. *K raschetu na ustoychivost' krivolineynykh sterzhneykh ehlementov sploshnostenchatykh stal'nykh arok po izgibno-krutil'noy forme* [To the calculation of the stability of curvilinear rod elements of solid-walled steel arches in the bending-

torsion form]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2018, no. 2(67), pp. 54–60.

3. Belyy G. I. *Prostranstvennaya rabota i predel'nye sostoyaniya sterzhneykh ehlementov metallicheskih konstruktsiy*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Spatial work and limit states of rod elements of metal structures. Dr. Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1987, 464 p.

4. Belyy G. I. *K raschetu na ustoychivost' sterzhneykh ehlementov stal'nykh konstruktsiy* [On stability calculations of rod members of steel designs]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2013, no. 2(37), pp. 44–48.

5. Pichugin S. N. *Prochnost' i ustoychivost' sterzhneykh ehlementov konstruktsiy iz gnutosvarnykh profiley*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and stability of core elements of structures made of bent-welded profiles. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1986, 22 p.

6. Rodikov H. H. *Ustoychivost' szhatykh s dvukhosnymi ehkstsentrisitetami sterzhneykh ehlementov konstruktsiy iz otkrytykh profiley*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Stability of compressed with biaxial eccentricities rod elements of structures from open profiles Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1987, 22 p.

7. Pyatkin P. A. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' usilennykh pod nagruzkoy sterzhneykh ehlementov konstruktsiy otkrytogo secheniya*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and spatial stability of load-reinforced rod elements of open-section structures. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2000, 24 p.

8. Astakhov I. V. *Prostranstvennaya ustoychivost' ehlementov konstruktsiy iz kholodnognutykh profiley*. Diss. kand. tekhn. nauk [Spatial stability of structural elements from cold-bent profiles. PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2000, 123 p.

9. Kuznetsov A. Yu. *Prochnost' i prostranstvennaya ustoychivost' sostavnykh sterzhneykh ehlementov konstruktsiy iz kholodnognutykh profiley*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and spatial stability of composite core elements of structures made of cold-bent profiles. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2013, 25 p.

10. Askinazi V. Yu. *Prostranstvennaya ustoychivost' ehlementov stal'nykh ramnykh konstruktsiy peremennoy zhestkosti*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Spatial stability of elements of steel frame structures of variable stiffness. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2000, 24 p.

11. Sergeev S. N. *Prochnost' i ustoychivost' sterzhneykh ehlementov metallicheskih konstruktsiy s uchetom vliyaniya poperechnykh sil i krucheniya*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and stability of rod elements of metal structures taking into account the influence of

transverse forces and torsion. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1987, 22 p.

12. Sotnikov N. G. *Prochnost' i ustoychivost' ehlementov stal'nykh konstruktsiy iz ugol'kov, imeyushchikh obshchie i mestnye defekty i povrezhdeniya*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Strength and stability of elements of steel structures from L-bars having general and local defects and damages. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Leningrad, 1987, 25 p.

13. Mikhas'kin V. V. *Vliyanie svarochnykh protsessov na prostranstvennuyu ustoychivost' usilivaemykh pod nagruzkoy ehlementov sterzhnevyykh konstruktsiy*. Avtoref.

diss. kand. tekhn. nauk [Effect of welding processes on the spatial stability of the amplified load bearing elements of the framed structures. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2000, 25 p.

14. Beylin E. A. *K teorii deformatsionnogo rascheta i ustoychivosti krivolineynykh i pryamolineynykh tonkostennykh sterzhney* [To the theory of the deformation calculation and stability of curvilinear and rectilinear thin-walled rods]. *Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred* – Mechanics of rod systems and solid mediums, 1970, vol. 63, pp. 5–19.