УДК 624.074.433

© В. Г. Соколов, д-р техн. наук, доцент

© Ю. В. Огороднова, канд. техн. наук, доцент

© А. В. Дмитриев, аспирант

(Тюменский индустриальный университет)

E-mail: dandid@mail.ru

© А. М. Масленников, д-р техн. наук, профессор

(Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет)

E-mail: aleksmaslennikov@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-5-105-112

© V. G. Sokolov, Dr. Sci. Tech., Associate Professor

© Yu. V. Ogorodnova, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© A. V. Dmitriev, post-graduate student

(Tyumen Industrial University)

E-mail: dandid@mail.ru

© A. M. Maslennikov, Dr. Sci. Tech., Professor

(Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering)

E-mail: aleksmaslennikov@yandex.ru

КОЛЕБАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

OSCILLATIONS OF UNDERGROUND THIN-WALLED PIPELINES TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL PRESSURE AND LONGITUDINAL FORCE

Исследуется спектр свободных колебаний тонких упругих оболочек. Обсуждается множество собственных частот колебаний, соответствующих формам свободных колебаний, для подземных прямолинейных участков газопроводов. При расчете изменения этих частот учитываются коэффициент упругого отпора грунта, присоединенная масса грунта, коэффициент продольной силы, параметр тонкостенности (отношение толщины стенки трубопровода к его радиусу), а также внутреннее давление в трубопроводе.

Ключевые слова: газопровод, частоты свободных колебаний, коэффициент упругого отпора грунта, продольная сжимающая сила, параметр тонкостенности.

The article presents the results of study of free oscillations spectrum of thin elastic shells. The natural frequencies of oscillations corresponding to the forms of free oscillations, for underground straight sections of gas pipelines are discussed. When calculating the changes in these frequencies, the coefficient of elastic resistance of the soil is taken into account, as well as added soil mass, the longitudinal force parameter, thin-wall parameter (ratio of pipeline wall thickness to its radius), the value of the internal pressure.

Keywords: pipeline, the frequency of free oscillations, the coefficient of elastic resistance of the soil, longitudinal compressive strength, thin-wall parameter (ratio of pipeline wall thickness to its radius).

Одной из важных задач при динамическом расчете подземных тонкостенных магистральных трубопроводов большого диаметра является нахождение спектра частот и форм собственных колебаний. К сожалению, на сегодняшний день в расчетах используется лишь приближенное представление о тонкостенных трубах большого диаметра, которое основано на стержне-

вой модели с недеформируемым контуром^{1,2} [2, 4–6]. Существующие нормативные документы (СП 33.13330.2012, СП 36.13330.2012) по расчету и проектированию трубопроводов, в результате применения которых обеспечивается соблюдение требований Федерального закона

¹ СП 33.13330.2012. Расчет на прочность стальных трубопроводов. Актуализированная редакция СНиП 2.04.12–86.

² СП 36.13330.2012. Магистральные трубопроводы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.06–85* (с изм. № 1).

«Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» № 384-ФЗ, разработаны для трубопроводов с диаметром до 1400 миллиметров включительно (см. СП 33.13330.2012, п. 1; СП 36.13330.2012, п. 1) и базируются на стержневой модели. Там конкретно указывается, что в качестве расчетной схемы трубопровода следует рассматривать стержневые системы с учетом взаимодействия трубопровода с опорными устройствами и окружающей средой (при прокладке непосредственно в грунт) (см. СП 33.13330.2012, п. 9.4), которые не учитывают деформации поперечного сечения трубы и не предназначены для трубопровода диаметром более 1400 мм. На сегодняшний день при прокладке магистральных трубопроводов применяются изделия с диаметром более 1400 мм, например газопровод «Сила Сибири», участок КС-6 «Сковородинская»-КС-7 «Сивакинская»: применяются трубы сечением 1720×16 мм по ТУ 1381-002-18014273-2014 производства ООО «ТруБПром» г. Серпухов, которые выходят за область применения СП 33.13330.2012 и СП 36.13330.2012. Следовательно, рассчитывать данные трубопроводы по нормам, базирующимся на стержневой теории, нельзя.

В данной работе в качестве расчетной схемы трубопровода большого диаметра принята базовая модель в виде цилиндрической оболочки с конечной длиной L и радиусом R . Для этой расчетной схемы получено линеаризованное дифференциальное уравнение движения, основанное на допущениях полубезмоментной теории оболочек среднего изгиба [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + h_v^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta} + \vartheta_2 \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \varepsilon_0 \right) - \\ & - \frac{R}{Eh} p_0 \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} + \frac{R \mu_{bj}}{Eh} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{R^2 w \kappa \cdot \partial^2 w}{Eh \cdot \partial \theta^2} + \\ & + R \gamma H \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} (2 - \alpha_1 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) + \\ & + R \gamma H \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} \alpha_1 \sin \theta + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} 2 \alpha_2 \sin 2\theta \right) + \\ & + R \gamma H \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \alpha_1 \cos \theta - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} 4 \alpha_2 \cos 2\theta \right) - \\ & - \frac{R^2 \rho}{E} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \xi \partial t} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу R ; ϑ_2 — угол поворота, p_0 — внутреннее давление в трубе; ρ — коэффициент бокового давления грунта; H — толщина обжимаемого слоя; γ — объемный вес грунта; E — модуль упругости материала трубы; R — радиус срединной поверхности; h_v — параметр относительной толщины оболочки:

$$h_v = \frac{h}{R \sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad (2)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала оболочки; μ_{bj} — присоединенная масса грунта на единицу длины трубопровода, определяемая по формуле

$$\mu_{bj} = \frac{\rho_{гр} \pi d^2}{4}, \quad (3)$$

где $\rho_{гр}$ — плотность грунта, окружающего трубопровод; d — внешний диаметр трубопровода с учетом толщины стенки h ; κ — коэффициент упругого отпора грунта, когда труба подвергается действию внутреннего давления [1], представим его в виде

$$\kappa = \frac{E_0}{R(1+\nu_0)}, \quad (4)$$

где E_0 — модуль упругости грунта; ν_0 — коэффициент Пуассона.

Полученная формула (1) содержит четыре неизвестных функции координат и времени t : u, v, w и ϑ_2 . Чтобы решить это уравнение, примем допущения полубезмоментной теории оболочек [2]. В результате получим полную систему уравнений. Представим функцию $w(\xi, \theta, t)$, удовлетворяющую условию шарнирного опирания концов трубопровода и периодичности по окружающей координате θ , в виде

$$w = \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \cos(m\theta), \quad (5)$$

где $\bar{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L}$; $m, n = 1, 2, \dots$ — волновые числа в окружном и продольном направлениях.

Еще две компоненты перемещений и угол поворота ϑ_2 найдем из уравнений полубезмоментной теории оболочек [4]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{\bar{\lambda}_n}{m^2} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \cos(m\theta); \\ v &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{1}{m} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \sin(m\theta); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\vartheta_2 = - \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{m^2 - 1}{m} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \sin(m\theta).$$

Свободные колебания оболочки осуществляют движение по гармоническому закону, с учетом этого можно записать:

$$\varphi(t) = \sin \omega_{mn} t, \quad \varphi''(t) = -\omega^2 \sin \omega_{mn} t, \quad (7)$$

где ω_{mn} — частота первой формы свободных изгибных колебаний; $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Подставим формулы (6)–(8) в выражение (1), приравняем коэффициенты при одних и тех же тригонометрических функциях $\cos(m\theta)$ при $m, n = 1, 2, 3, \dots$, получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных значений b_{mn} радиальной составляющей перемещения w [4].

Полученную систему линейных однородных алгебраических уравнений запишем в виде

$$a_{m,m-2}b_{m-2,n} + a_{m,m-1}b_{m-1,n} + a_{m,m}b_{m,n} + a_{m,m+1}b_{m+1,n} + a_{m,m+2}b_{m+2,n} = 0, \quad (8)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$; $m \pm 1 > 0$; $m \pm 2 > 0$, а коэффициенты a_{ij} определяются выражением

$$a_{m,m} = A_{m,n} - B_{m,n}\omega_{mn}^2; \quad a_{m,m\pm 1} = -\frac{m^5(m \pm 2)}{2} q_{\Gamma P}^* \alpha_1;$$

$$a_{m,m\pm 2} = -\frac{m^4[(m \pm 2)^2 - 1]}{2} q_{\Gamma P}^* \alpha_2;$$

$$A_{m,n} = \lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - 2q_{\Gamma P}^*) + \kappa^* m^4 - \lambda_n^4 m^4 P / n^2;$$

$$B_{m,n} = \rho^* R h (\lambda_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_{bj}^* m^4,$$

где

$$p^* = p_0 \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \rho^* = \rho_0 \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \kappa^* = \frac{R^2 \kappa}{Eh \cdot h_v^2};$$

$$q_{\Gamma P}^* = \frac{\gamma H R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \lambda_n = \frac{n \pi R}{L \sqrt{h_v}};$$

$$\mu_{bj}^* = 0,4 \cdot \mu_{bj} \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \lambda_n = \frac{n \pi R}{L \sqrt{h_v}};$$

$$P = \frac{F}{F_3}; \quad (9)$$

где P — коэффициент продольной силы; F — продольная сила; $F_3 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ — эйлерова сила; $I = \pi R^3 h$.

Полученную систему однородных линейных уравнений (9) представим в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} & d_{24} & \dots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} - \lambda & d_{34} & \dots & d_{3n} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} - \lambda & \dots & d_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{p-41} & d_{p-31} & d_{p-21} & d_{p-11} & \dots & d_{pn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

где

$$d_{m,m} = \frac{a_{m,m}}{B_{m,n}}; \quad d_{m,m\pm 1} = \frac{a_{m,m\pm 1}}{B_{m,n}}; \quad d_{m,m\pm 2} = \frac{a_{m,m\pm 2}}{B_{m,n}}; \quad \lambda = \omega^2.$$

Коэффициенты $A_{m,n}, B_{m,n}, a_{m,m+1}, a_{m,m+2}$ определяются по формулам (9).

Раскрывая определитель вида (10), получаем характеристическое уравнение степени, равной порядку матрицы A , корни которого λ_i называются собственными значениями, определяют квадраты частот собственных колебаний рассматриваемого участка трубопровода в зависимости от волновых чисел m и n [4].

Полученное решение позволяет исследовать влияние коэффициента упругого отпора грунта, присоединенной массы грунта, геометрических характеристик (h/R ; L/R), коэффициента продольной силы P и внутреннего давления p_0 на частоты свободных колебаний.

Во-первых, проанализируем влияние коэффициента упругого отпора грунта (κ , Н/м³), зависящего от физико-механических свойств грунта, на частоты свободных колебаний. Для этого проведем расчеты по формуле (10) при различных значениях внутреннего рабочего давления (p_0) и толщины стенки трубопровода (h/R) для фиксированных значений длины участка ($L/R = 10$), коэффициента продольной сжимающей силы ($P = 0,05$) и глубины заложения трубопровода ($H = 2$ м).

Анализ значений, представленных в табл. 1, 2, показывает:

а) минимальные частоты свободных колебаний есть при $m = 2, n = 1$, что соответствует оболочечным формам колебаний;

б) с возрастанием коэффициента упругого отпора (κ) частоты тоже растут; причина в том, что упругий отпор грунта препятствует перемещению точек поперечного сечения. Например, для безнапорных труб ($p_0 = 0,0$ МПа) при увеличении коэффициента κ от $0,1 \cdot 10^7$ Н/м³ до $1,0 \cdot 10^7$ Н/м³ частоты свободных колебаний увеличиваются на 24,09 % для параметра тонкостенности $h/R = 1/30$ и на 32,89 % для параметра тонкостенности $h/R = 1/50$ (см. табл. 1, рис. 1, а). Этот эффект подтверждается в работе Г. К. Клейна: «Грунт, в котором находится трубопровод, оказывает сопротивление или отпор перемещениям стенок трубы и повышает жесткость и несущую способность. Влияние отпора сказывается тем

Рис. 1. Зависимость частот свободных колебаний от коэффициента упругого отпора грунта (κ , H/M^3) и толщины стенки трубопровода (h/R) при различном внутреннем давлении газопровода: а — $p_0 = 0$ МПа (безнапорные трубопроводы); б — $p_0 = 2,0$ МПа; в — $p_0 = 4,0$ МПа

Таблица 1

Зависимость частот свободных колебаний (ω , Гц) от коэффициента упругого отпора грунта κ , внутреннего рабочего давления p_0 и толщины стенки трубопровода (h/R) при коэффициенте продольной сжимающей силы $P = 0$

$\kappa \cdot 10^7$ H/M^3	$p_0 = 0$ МПа								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	38,67	16,44	34,37	29,32	10,68	19,11	21,92	7,45	11,37
0,5	39,37	18,13	35,22	30,14	12,88	20,44	22,85	9,96	13,16
1,0	40,21	20,04	36,26	31,14	15,19	21,98	23,96	12,40	15,11
$\kappa \cdot 10^7$ H/M^3	$p_0 = 2,0$ МПа								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	38,67	20,35	39,62	29,32	14,95	25,70	21,92	11,48	18,28
0,5	39,37	21,73	40,36	30,14	16,60	26,70	22,85	13,24	19,45
1,0	40,21	23,35	41,27	31,14	18,45	27,90	23,96	15,17	20,81
$\kappa \cdot 10^7$ H/M^3	$p_0 = 4,0$ МПа								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	38,67	23,61	44,25	29,32	18,25	30,92	21,92	14,42	23,22
0,5	39,37	24,82	44,92	30,14	19,62	31,76	22,85	15,86	24,15
1,0	40,21	26,25	45,74	31,14	21,21	32,77	23,96	17,50	25,26

значительнее, чем плотнее грунт и чем более гибки стенки трубопровода» [3, с. 2];

в) с уменьшением толщины стенки трубы частоты уменьшаются; так, для $h/R = 1/30$ и $\kappa = 0,1 \cdot 10^7 \text{ H}/\text{M}^3$ $\omega_{21} = 16,44$, а при $h/R = 1/50$ $\omega_{21} = 7,45$, снижение частот составляет 54,68 % (см. табл. 1, рис. 1, а) для безнапорных труб;

г) с увеличением внутреннего давления p_0 от 0,0 до 4,0 МПа жесткость трубы увеличивается, что приводит к увеличению частот собственных колебаний. Темп увеличения частот для тонких труб ($h/R = 1/50$) составляет 93 %, а для более толстых труб ($h/R = 1/30$) — 43 %. Это объясняется тем, что внутреннее рабочее давление и реакция

упругого отпора грунта для деформируемой схемы поперечного сечения в тонкостенных трубах препятствуют оваллизации поперечного сечения (см. табл. 1, рис. 2).

Во-вторых, проведем анализ влияния коэффициента продольной силы на частоты свободных колебаний для различных коэффициентов упругого отпора грунта (κ , Н/м³), толщины стенки трубопровода (h/R) и значений внутреннего рабочего давления (p_0), при этом установим фиксированные значения длины участка ($L/R = 10$) и глубины заложения трубопровода ($H = 2$ м). Анализ значений, приведенных в табл. 2, показывает:

а) при увеличении коэффициента продольной силы P частоты свободных колебаний снижаются. Темп уменьшения частот для толстостенных труб больше, чем для тонкостенных, так, например, при параметре тонкостенности $h/R = 1/30$ для $\kappa = 0,5 \cdot 10^7$ Н/м³ при $P = 0,02$ частота $\omega_{21} = 17,22$ Гц, а при $P = 0,15$ частота $\omega_{21} = 9,39$ Гц; снижение частот происходит на 45,47 %. Для более тонких труб (при $h/R = 1/50$) при прочих равных условиях это снижение происходит на 46,88 % (см. табл. 2, рис. 3);

б) для безнапорных труб $h/R = 1/50$, $\kappa = 0,1 \cdot 10^7$ Н/м³ при увеличении коэффициента продольной силы P от 0,02 до 0,15 частота свободных колебаний ω_{21} уменьшается от 6,76 Гц до нуля. Это свидетельствует о том, что согласно

критерию динамической устойчивости происходит сплющивание поперечного сечения по оболочечным формам колебаний, то есть система теряет устойчивость.

По итогам проделанной работы можно сделать следующие выводы:

- минимальные частоты собственных колебаний реализуются при волновых числах $m = 2$, $n = 1$, что соответствует оболочечным формам колебаний;
- с увеличением коэффициента упругого отпора грунта частоты свободных колебаний увеличиваются, так как грунт препятствует перемещению точек поперечного сечения тонкостенной трубы, тем самым повышая ее жесткость;
- внутреннее рабочее давление повышает жесткость тонкостенного трубопровода, так как частоты свободных колебаний при увеличении давления увеличиваются;
- с уменьшением толщины стенки частоты свободных колебаний уменьшаются вследствие уменьшения жесткости поперечного сечения;
- наличие продольной силы снижает частоты свободных колебаний, а для безнапорных трубопроводов при определенных ее значениях частота становится равной нулю, что свидетельствует о сплющивании поперечного сечения.

Рис. 2. Зависимость частот свободных колебаний от коэффициента упругого отпора грунта (κ , Н/м³) и внутреннего рабочего давления (p_0) при различных значениях толщины стенки: а — для $h/R = 1/30$; б — $h/R = 1/40$; в — $h/R = 1/50$

Таблица 2

Зависимость частот свободных колебаний (ω , Гц) от коэффициента упругого отпора грунта κ и толщины стенки трубопровода (h/R) при различных значениях внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента продольной сжимающей силы P

$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 0$ МПа, $P = 0,02$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	38,29	15,43	33,89	29,03	9,80	18,63	21,71	6,76	10,92
0,5	38,99	17,22	34,76	29,86	12,16	19,99	22,64	9,45	12,78
1,0	39,84	19,23	35,81	30,87	14,58	21,57	23,77	11,99	14,78
$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 0$ МПа, $P = 0,1$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	36,71	10,49	31,92	27,84	4,90	16,56	20,82	2,49	8,91
0,5	37,43	12,98	32,83	28,70	8,71	18,08	21,80	7,06	11,11
1,0	38,33	15,54	33,94	29,75	11,86	19,81	22,96	10,22	13,36
$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 0$ МПа, $P = 0,15$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	35,68	5,46	30,62	27,07	–	15,13	20,25	–	7,39
0,5	36,43	9,39	31,57	27,96	5,55	16,77	21,25	5,02	9,93
1,0	37,35	12,70	32,72	29,03	9,78	18,62	22,44	8,93	12,40
$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 2,0$ МПа, $P = 0,02$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	38,29	19,54	39,21	29,03	14,34	25,35	21,65	11,02	17,95
0,5	38,99	20,98	39,96	29,86	16,05	26,36	22,59	12,85	19,14
1,0	39,84	22,66	40,87	30,87	17,95	27,58	23,72	14,83	20,53
$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 2,0$ МПа, $P = 0,1$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	36,71	15,93	37,51	27,84	11,56	23,87	20,77	9,07	16,81
0,5	37,44	17,67	38,30	28,70	13,62	24,94	21,75	11,22	18,07
1,0	38,33	19,62	39,25	29,75	15,82	26,22	22,91	13,44	19,54
$\kappa \cdot 10^7$ Н/м ³	$p_0 = 2,0$ МПа, $P = 0,15$								
	$h/R = 1/30$			$h/R = 1/40$			$h/R = 1/50$		
	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}
0,1	35,68	13,17	36,41	27,07	9,41	22,90	20,25	7,59	16,11
0,5	36,43	15,23	37,22	27,96	11,85	24,01	21,25	10,07	17,42
1,0	37,35	17,46	38,20	29,03	14,33	25,34	22,44	12,49	18,94

Библиографический список

1. Галеркин Б. Г., Перельман Я. И. Напряжение и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе // Известия ВНИИТ. 1940. Т. 27. С. 160–192.
2. Денисов Г. В., Лалин В. В. Предложения по расчету участков заглубленных магистральных трубопро-

водов с конструктивным включением на сейсмическое воздействие // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2013. № 3. С. 20–23. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/predlozheniya-po-raschetu-uchastkov-zaglublennyh-magistralnyh-truboprovodov-s-konstruktivnym-vklyucheniem-na-seysmicheskoe>.

Рис. 3. Зависимость частот свободных колебаний ω_{21} от параметра тонкостенности трубопровода h/R при различных коэффициентах упругого отпора грунта $\kappa \cdot 10^7$ (Н/м³) и продольной силы $P = \frac{F}{F_3}$: а — для безнапорных трубопроводов $p_0 = 0,0$ МПа; б — при внутреннем давлении $p_0 = 2,0$ МПа

3. Клейн Г. К. Расчет подземных трубопроводов. М.: Стройиздат, 1969. 240 с.

4. Соколов В. Г., Дмитриев А. В. Свободные колебания подземных прямолинейных тонкостенных участков газопроводов // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 2 (73). С. 29–34.

5. Ruocco E., Di Laora R., Minutolo V. An exponential matrix method for the buckling analysis of underground pipelines subjected to landslide loads // Procedia: Earth and Planetary Science. 2016. Vol. 16. Pp. 25–34. URL: https://www.researchgate.net/publication/309594765_An_Exponential_Matrix_Method_for_the_Buckling_Analysis_of_Underground_Pipelines_Subjected_to_Landslide_Loads.

6. Kouretzis G. P., Karamitros D. K., Sloan S. W. Analysis of buried pipelines subjected to ground surface settlement and heave // Canadian Geotechnical Journal.

2015. Vol. 52 (8). Pp. 1058–1071. URL: <https://doi.org/10.1139/cgj-2014-0332>.

References

1. Galerkin B. G., Perel'man Ya. I. *Napryazhenie i peremeshcheniya v krugovom tsilindricheskom truboprovode* [Stress and displacement in a circular cylindrical pipeline]. *Izvestiya VNIIT – Proceedings of the VNIIT*, 1940, no. 27, pp. 160–192.

2. Denisov G. V., Lalin V. V. *Predlozheniya po raschetu uchastkov zaglublennykh magistral'nykh truboprovodov s konstruktivnym vklyucheniem na seysmicheskoe vozdeystvie* [Proposals for the calculation of sections of buried main pipelines with constructive inclusion of the seismic impact]. *Transport i khranenie nefteproduktov i uglevodorodnogo syr'ya – Transport*

and storage of petroleum products and hydrocarbon raw materials, 2013, no. 3, pp. 20–23. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/v/predlozheniya-po-raschetu-uchastkov-zaglublennykh-magistralnykh-truboprovodov-s-konstruktivnym-vklyucheniem-na-seysmicheskoe>

3. Kleyn G. K. *Raschet podzemnykh truboprovodov* [Calculation of underground pipelines]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1969, 240 p.

4. Sokolov V. G., Dmitriev A. V. *Svobodnye kolebaniya podzemnykh pryamolineynykh tonkostennykh uchastkov gazoprovodov* [Free oscillations of straight thin walled underground gas pipelines]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 2 (73), pp. 29–34.

5. Ruocco E., Di Laora R., Minutolo V. An exponential matrix method for the buckling analysis of underground pipelines subjected to landslide loads. *Procedia: Earth and Planetary Science*, 2016, vol. 16, pp. 25–34. Available at: https://www.researchgate.net/publication/309594765_An_Exponential_Matrix_Method_for_the_Buckling_Analysis_of_Underground_Pipelines_Subjected_to_Landslide_Loads

6. Kouretzis G. P., Karamitros D. K., Sloan S. W. Analysis of buried pipelines subjected to ground surface settlement and heave. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, vol. 52 (8), pp. 1058–1071. URL: <https://doi.org/10.1139/cgj-2014-0332>