УДК 519.6:532.546.2

© Г. Л. Сафина, канд. техн. наук, доцент
(Национальный исследовательский
Московский строительный университет)
E-mail: minkinag@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-4-68-73

© G. L. Safina, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(National Research Moscow State University
of Civil Engineering)
E-mail: minkinag@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

SOLVING OF THE FILTRATION PROBLEM BY NUMERICAL METHODS

Задача глубинной фильтрации, которая определяется уравнением баланса взвешенных и осажденных частиц и кинетическим уравнением роста осадка, не имеет точного аналитического решения. В работе сравниваются численные решения исходной системы дифференциальных уравнений методом конечных разностей и системы трансцендентных уравнений, полученной в результате использования дифференциального уравнения, эквивалентного исходной системе. Проведенные расчеты показывают, что численные решения близки. Математическая модель построена с учетом зависимости пористости и допустимого потока от концентрации осадка.

Ключевые слова: глубинная фильтрация, суспензия, пористая среда, размерный механизм захвата частиц, численное решение.

The problem of depth filtration, which is determined by the balance equation of suspended and deposited particles and the kinetic equation of sediment growth, has no exact analytical solution. The paper deals with solving of the problem using an equivalent differential equation, application of which leads to the solution of the system of integral equations. As a result of integrating these equations, a system of transcendental equations is obtained. Numerical solutions of the transcendental system of equations and the initial hyperbolic system of partial differential equations in the finite difference method are very close. The mathematical model is constructed taking into account the dependence of porosity and allowable flow on the sediment concentration.

Keywords: depth filtration, suspension, porous medium, particle size trapping mechanism, numerical solution.

Изучение фильтрации воды в грунтах и различных пористых материалах представляет большой практический интерес при решении множества инженерных задач в области гидротехники, строительства сооружений водоснабжения и водоотведения. Фильтрационные расчеты используются при проектировании подпорных гидротехнических сооружений (земляные плотины, перемычки, дамбы), водопроводящих каналов, дренажных систем, при осушении грунтового основания и т. п. [1]. Актуальной задачей при строительстве подземных хранилищ ядовитых и радиоактивных отходов является обеспечение герметичности помещений, поскольку попадание опасных отходов в грунтовые воды существенно ухудшает экологическую обстановку. Для создания водонепроницаемых стен в горную породу закачивается жидкий полимерный укрепитель. Раствор фильтруется в порах и после застывания укрепляет породу [2]. Изучение

задач фильтрации позволяет подобрать оптимальный закрепляющий раствор в зависимости от свойств горной породы.

Твердые частицы переносятся потоком жидкости по извилистым каналам пористой среды, некоторые частицы блокируются в порах и оседают на пористом каркасе, что приводит к изменению структуры среды, уменьшению ее пористости и допустимого фракционного потока [3]. Существуют различные механизмы захвата частиц пористыми породами: размерный захват частиц, перекрытие, электростатическое притяжение, гравитационная сегрегация и диффузия в тупиковых порах и зонах застойного течения [4, 5].

За основу возьмем математическую модель движения частиц с механико-геометрическим взаимодействием с пористой средой [6, 7]. Частицы суспензии свободно проходят через поры большого размера и застревают в порах меньше-

го размера. Данная модель учитывает изменение пористости и допустимого потока частиц через крупные поры при увеличении концентрации осадка. В момент времени $t = 0$ в пористой среде взвешенные и осажденные частицы отсутствуют. Суспензия постоянной концентрации начинает поступать на вход фильтра. Пористая среда постепенно заполняется суспензией. Происходит движение фронта концентраций взвешенных и осажденных частиц с неизменной скоростью от входа к выходу. Перед фронтом пористая среда пуста и концентрации взвешенных и осажденных частиц нулевые. За фронтом происходит фильтрация частиц, концентрации взвешенных и осажденных частиц положительны.

Существуют различные модели фильтрации монодисперсной и полидисперсной суспензии [8, 9]. Точное или приближенное решение задачи возможно найти только в некоторых частных случаях [10, 11]. В общем случае нужно применять численные методы решения задачи. В ходе решения задачи фильтрации необходимо решать систему трансцендентных уравнений. В данной работе это сделано с использованием программного обеспечения Matlab. Полученное решение трансцендентной системы сравнивается с численными решениями исходной гиперболической системы и эквивалентного дифференциального уравнения в частных производных, полученными с использованием разностных схем с аппроксимацией второго порядка.

Квазилинейная гиперболическая система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial(g(S)C + S)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C \quad (2)$$

определяет одномерную модель фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде с переменной пористостью $g(S)$ и допустимым потоком $f(S)$. Здесь $C(x, t)$ и $S(x, t)$ — концентрации взвешенных и осажденных частиц пористой среды, $\Lambda(S)$ — коэффициент фильтрации.

Математическая модель (1), (2) рассматривается в области $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$, при этом на вход пористой среды при $x = 0$ поступает суспензия с единичной концентрацией взвешенных частиц

$$C(x, t)|_{x=0} = 1, \quad (3)$$

в начальный момент времени ($t = 0$) концентрации взвешенных и осажденных частиц пористой среды равны нулю:

$$C(x, t)|_{t=0} = 0, S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Фронт концентраций взвешенных и осажденных частиц, заданный линейным уравнением $t = \frac{g(0)}{f(0)}x$, движется в пористой среде с постоянной скоростью $v = \frac{f(0)}{g(0)}$, и разделяет область Ω на две подобласти

$$\Omega_0 = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \frac{g(0)}{f(0)}x \right\};$$

$$\Omega_1 = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq 1, t \geq \frac{g(0)}{f(0)}x \right\}.$$

В Ω_0 концентрации взвешенных $C(x, t)$ и осажденных $S(x, t)$ частиц равны нулю, в области Ω_1 концентрации положительны. На фронте концентраций решение $C(x, t)$ имеет разрыв первого рода, решение $S(x, t)$ непрерывно и имеет разрывные производные.

В [12] показано, что от системы уравнений (1)–(4) можно перейти к уравнению

$$g(S) \frac{\partial S}{\partial t} + f(S) \frac{\partial S}{\partial x} + S \Lambda(S) = 0 \quad (5)$$

с начальным условием

$$S(x, t)|_{x=0} = S_0(t), \quad (6)$$

причем начальная функция $S_0(t)$ задается неявно соотношением

$$\int_0^{S_0(t)} \frac{ds}{\Lambda(s)} = t. \quad (7)$$

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{g(S)}{\Lambda(S)} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{f(S)}{\Lambda(S)} \frac{\partial S}{\partial x} + S = 0. \quad (8)$$

Для решения последнего уравнения в области Ω_1 воспользуемся методом характеристик. Рассмотрим характеристические кривые с началом на оси Ot . Введем новые характеристические переменные, такие что t_0 — начальная точка характеристики на оси Ot и τ — параметр вдоль характеристики. Тогда введенные характеристики задаются уравнениями

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{g(S)}{\Lambda(S)}, \quad t|_{\tau=0} = t_0, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{f(S)}{\Lambda(S)}, \quad x|_{\tau=0} = 0; \quad (9)$$

уравнение (8) принимает вид

$$\frac{dS}{d\tau} + S = 0, \quad (10)$$

а условие (6) запишется в виде:

$$S|_{\tau=0} = S_0(t_0). \quad (11)$$

Решение задачи (10), (11) имеет вид

$$S(t_0, \tau) = S_0(t_0)e^{-\tau}. \quad (12)$$

Для нахождения решения задачи (5), (6) необходимо в формуле (12) выразить характеристические переменные τ, t_0 через декартовы переменные x, t . После подстановки выражения (12) в уравнения (9) и интегрирования их по переменной τ с учетом начальных условий получаем

$$t = \int_0^{\tau} \frac{g(S_0(t_0)e^{-\tau})}{\Lambda(S_0(t_0)e^{-\tau})} d\tau + t_0; \quad x = \int_0^{\tau} \frac{f(S_0(t_0)e^{-\tau})}{\Lambda(S_0(t_0)e^{-\tau})} d\tau.$$

Замена переменной в интегралах

$$S = S_0(t_0)e^{-\tau} \Rightarrow d\tau = -\frac{dS}{S}$$

позволяет упростить выражения:

$$t = - \int_{S_0(t_0)}^S \frac{g(S)}{S\Lambda(S)} dS + t_0; \quad (13)$$

$$x = - \int_{S_0(t_0)}^S \frac{f(S)}{S\Lambda(S)} dS. \quad (14)$$

При $\tau = 0$ имеем $t = t_0$, и соотношение (7) принимает вид

$$\int_0^{S_0(t_0)} \frac{ds}{\Lambda(s)} = t_0. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), получим

$$t = - \int_{S_0(t_0)}^S \frac{g(S)}{S\Lambda(S)} dS + \int_0^{S_0(t_0)} \frac{ds}{\Lambda(s)}.$$

Итак, в ходе решения системы уравнений (5), (6) получаем систему интегральных уравнений

$$\int_0^{S_0} \frac{dS}{\Lambda(S)} - \int_{S_0}^S \frac{g(S)}{S\Lambda(S)} dS = t; \quad (16)$$

$$- \int_{S_0}^S \frac{f(S)}{S\Lambda(S)} dS = x. \quad (17)$$

Если известно решение $S(x, t)$, то решение $C(x, t)$ определяется из соотношения, представленного в [13].

Будем решать систему уравнений (16), (17) в предположении, что функции $g(S), f(S), \Lambda(S)$ имеют вид кубических многочленов:

$$g(S) = g_0 + g_1S + g_2S^2 + g_3S^3;$$

$$f(S) = f_0 + f_1S + f_2S^2 + f_3S^3;$$

$$\Lambda(S) = \lambda_0 + \lambda_1S + \lambda_2S^2 + \lambda_3S^3,$$

причем коэффициент фильтрации $\Lambda(S)$ обращается в ноль при некотором положительном значении S , в противном случае концентрация осажденных частиц неограниченно растет и в пределе равна бесконечности.

Тогда кубический многочлен $\Lambda(S)$ можно представить в виде

$$\Lambda(S) = (S - \tilde{S})(\lambda_3S^2 + \lambda'_1S + \lambda'_0),$$

где $\tilde{S}$ — корень уравнения $\Lambda(S) = 0$.

Каждое подынтегральное выражение уравнений (16), (17) можно представить в виде суммы элементарных дробей, которые достаточно легко интегрируются:

$$\int_0^{S_0} \left(\frac{a}{(S - \tilde{S})} + \frac{bS + c}{\lambda_3S^2 + \lambda'_1S + \lambda'_0} \right) dS - \int_{S_0}^S \left(\frac{d}{S} + \frac{e}{(S - \tilde{S})} + \frac{hS + k}{\lambda_3S^2 + \lambda'_1S + \lambda'_0} \right) dS = t; \quad (18)$$

$$\int_{S_0}^S \left(\frac{l}{S} + \frac{m}{(S - \tilde{S})} + \frac{nS + p}{\lambda_3S^2 + \lambda'_1S + \lambda'_0} \right) dS = -x. \quad (19)$$

Интегрирование уравнений (18), (19) приводит к громоздкой системе трансцендентных уравнений, решение которых не выражается в элементарных функциях. Будем решать эту систему численно. Введем прямоугольную сетку в области Ω с шагом h_x по оси координат x и h_t по оси t .

$x_i = i h_x, t_j = j h_t; i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, m$, при этом шаг $h_x = 1/n$, где n — количество разбиений отрезка $[0, 1]$, а шаг h_t выбирается из условия сходимости Куранта [14]:

$$h_t \leq \alpha h_x, \quad \alpha = \min_{S \geq 0} (g(S) / f(S)). \quad (20)$$

Тогда в каждом узле области Ω_1 можно решить систему уравнений (18), (19) подстановкой текущих значений t_j и x_i в правые части уравнений. Значения $C(x_i, t_j)$ вычисляются в этих же узлах прямоугольной сетки.

Для апробации найденного решения задача (1)–(4) численно решалась методом конечных разностей аналогично [15–17]. Интегралы от левой части уравнения (1) по прямоугольной ячейке сетки аппроксимировались формулами трапеций и прямоугольников, имеющими второй порядок точности. Замена частной производной в уравнении (2) разностными соотношениями второго порядка в промежуточных узлах и на границе при $t_j = m h_t$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \approx \frac{S_{i,j+1} - S_{i,j-1}}{2h_t}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} \approx \frac{S_{i,j-1} - 4S_{i,j} + 3S_{i,j+1}}{2h_t}$$

также дает второй порядок точности аппроксимации разностной схемы.

Расчет задач фильтрации (1)–(4), (5)–(6) и (18)–(19) произведен для коэффициентов

$$\begin{aligned} g(S) &= 0,7635 + 2,44 \cdot 10^{-15} S + \\ &+ 3,2 \cdot 10^{-14} S^2 + 3,6 \cdot 10^{-13} S^3; \\ f(S) &= 0,9075 + 2,315 \cdot 10^{-4} S + \\ &+ 2,27 \cdot 10^{-8} S^2 - 3,42 \cdot 10^{-8} S^3; \\ \Lambda(S) &= 1,551 - 3,467 \cdot 10^{-3} S - \\ &- 1,16 \cdot 10^{-6} S^2 - 1,16 \cdot 10^{-7} S^3, \end{aligned}$$

найденных в ходе лабораторных экспериментах для частиц с радиусом $r = 3,168$ мк [12].

Численное моделирование задач (1)–(4) и (5)–(6) выполнено методом конечных разностей с шагами $h_x = 0,01$, $h_t = \frac{g(0)}{f(0)} h_x$. Решение трансцендентной системы уравнений (18)–(19) найдено при помощи программного комплекса Matlab.

На рис. 1, 2 изображены графики концентраций взвешенных и осажденных частиц численных решений на выходе пористой среды $x=1$. Сплошная линия соответствует решению задачи (18)–(19), пунктирная линия — решению задачи (5)–(6) методом трапеций, штрихпунктирная линия — решению задачи (1)–(4) по формуле прямоугольников. На рис. 1, а и рис. 2, а представлены графики в обычном виде для $0 \leq t \leq 800$, на рис. 1, б, в и рис. 2, б, в — в укрупненном виде для $100 \leq t \leq 100,01$ и $500 \leq t \leq 500,01$ соответственно.

Рис. 1, 2 показывают, что численные решения очень близки к решению трансцендентной системы (18)–(19), при этом метод трапеций является более точным по сравнению с методом прямоугольников.

Задача (1)–(5) одномерной фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде с переменными пористостью и допустимым потоком не имеет явного точного аналитического решения. Продолжая работы [18], [19], в данной статье представлено численное решение задачи. Рассмотрен переход от системы (1)–(2) к эквивалентному уравнению (9) и решение этого уравнения методом характеристик. Полученная трансцендентная система уравнений (18)–(19) решается численно в каждом узле прямоугольной сетки в области Ω_1 .

Решение задачи фильтраций (18)–(19) сравнено с численными решениями задач (1)–(2) и (9), полученных методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка при помощи интегрирования по прямоугольной ячейке сетки $\Omega_{i,j} = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$ по формулам трапеций и прямоугольников [20], [21]. Расчеты показывают, что все численные решения близки. Максимальные относительные погрешности решений $S(x,t)$, полученных методом трапеций и прямоугольников, по отношению к решению трансцендентной системы на всем временном промежутке $0 \leq t \leq 800$ составляют 0,004 и 0,95 % соответственно.

Получено численное решение одномерной задачи фильтрации монодисперсной суспензии в однородной пористой среде. Математическая модель построена с учетом зависимости пористости и допустимого потока от концентрации осадка. Апробация найденного решения произведена путем сравнения результатов, полученных различными численными методами. Эти

Рис. 1. Концентрации взвешенных частиц $C(x, t)|_{x=1}$: а — общий вид; б — укрупненный вид для $100 \leq t \leq 100,01$; в — укрупненный вид для $500 \leq t \leq 500,01$

Рис. 2. Концентрации осажденных частиц $S(x, t)|_{x=1}$: а — общий вид; б — укрупненный вид для $100 \leq t \leq 100,01$; в — укрупненный вид для $500 \leq t \leq 500,01$

результаты можно использовать при планировании и анализе лабораторных исследований в области фильтрации [22].

Библиографический список

1. Ухин Б. В., Гусев А. А. Гидравлика. М.: Инфра-М, 2010. 432 с.
2. Tsuji M., Kobayashi S., Mikake S., Sato T., Matsui H. Post-Grouting Experiences for Reducing Groundwater Inflow at 500 m Depth of the Mizunami Underground Research Laboratory // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 191. Pp. 543–550.
3. Russell T., Chequer L., Borazjan S., You Z., Zeinijahromi A., Bedrikovetsky P. Formation Damage by Fines Migration // *Mathematical and Laboratory Modelling, Field Cases*. In: *Formation Damage During Improved Oil Recovery: Fundamentals and Applications*. Elsevier. 2018. Ch. 3.
4. Civan F. Reservoir formation damage. 3rd ed.; Gulf Professional Publishing: Huston, TX, 2015.
5. Osipov Yu., Kotov N. Asymptotic model of size-exclusion grouting // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 365. 042006.
6. Kuzmina L. I., Osipov Yu. V., Zheglova Yu. G. Analytical model for deep bed filtration with multiple mechanisms of particle capture // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. Vol. 105. Pp. 242–248.
7. Kuzmina L., Osipov Yu. Deep bed filtration with multiple pore-blocking mechanisms // *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 196. 04003.
8. Kuzmina L., Osipov Yu. Filtration model of the unsteady suspension flow in a porous medium // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 117. 00097.
9. Osipov Yu. Calculation of the filtration of polydisperse suspension with a small rate // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 117. 00131.
10. Borazjani S., Bedrikovetsky P. Exact solutions for two-phase colloidal-suspension transport in porous media // *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 44. Pp. 296–320.
11. Kuzmina L. I., Osipov Yu. V. Asymptotic model of filtration in almost stationary mode // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016. Vol 12(1). Pp. 158–163.
12. Bedrikovetsky P., You Z., Badalyan A., Osipov Yu., Kuzmina L. Analytical model for straining-dominant large-retention depth filtration // *Chemical Engineering Journal*. 2017. Vol. 330. Pp. 1148–1159.
13. Vyazmina E. A., Bedrikovetskii P. G., Polyanin A. D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2007. Vol. 41(5). Pp. 556–564.
14. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: 3rd ed. Springer, Dordrecht, 2009.
15. Galaguz Yu. P., Safina G. L. Modeling of fine migration in a porous medium // *MATEC Web of Conferences*. 2016. Vol. 86. 03003.
16. Galaguz Yu. P., Safina G. L. Calculation of the filtration in a heterogeneous porous medium // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 117. 00052.
17. Galaguz Yu. P., Safina G. L. Modeling of filtration of 2-types particles suspension in a porous medium // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 117. 00053.
18. Osipov Yu., Safina G., Vetoshkin N. Calculation of the filtration at the porous medium outlet // *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 196. 04021.
19. Osipov Yu., Safina G., Galaguz Yu. Calculation of the filtration problem by finite differences methods // *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 251. 04021.
20. Kuzmina L. I., Osipov Yu. V., Galaguz Yu. P. Numerical and asymptotic modelling of a filtration problem with the initial deposit // *International Journal*

for Computational Civil and Structural Engineering, 2017. Vol. 13(3). Pp. 70–76.

21. Kuzmina L. I., Osipov Yu. V., Zheglova Yu. G. Modeling uniform asymptotics of the filtration problem in a porous medium // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018. Vol. 456. 012051.

22. Vaz A., Bedrikovetsky P., Fernandes P., Badalyan A., Carageorgos T. Determining model parameters for non-linear deep-bed filtration using laboratory pressure measurements // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2017. Vol. 151. Pp. 421–433.

References

1. Ukhin B. V., Gusev A. A. *Gidravlika* [Hydraulics]. Moscow, Infra-M Publ., 2010, 432 p.

2. Tsuji M., et al. Post-grouting experiences for reducing groundwater inflow at 500 m depth of the Mizunami Underground Research Laboratory. *Procedia Engineering*, 2017, vol. 191, pp. 543–550.

3. Russell T., et al. *Formation damage by fines migration. Mathematical and laboratory modeling, field cases*. In: Formation damage during improved oil recovery: fundamentals and applications. Elsevier, 2018, Pt. 3.

4. Civan F. *Reservoir formation damage*. 3-rd ed., Gulf Professional Publ., Huston, TX, 2015.

5. Osipov Y., Kotov N. Asymptotic model of size-exclusion grouting. IOP Conference Series, *Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 365, 042006.

6. Kuzmina L. I., Osipov Y. V., Zheglova Y. G. Analytical model for deep bed filtration with multiple mechanisms of particle capture. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 105, pp. 242–248.

7. Kuzmina L., Osipov Y. Deep bed filtration with multiple pore-blocking mechanisms. *MATEC Web of Conference*, 2018, vol. 196, 04003.

8. Kuzmina L., Osipov Y. Filtration model of the unsteady suspension flow in a porous medium. *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 117, 00097.

9. Osipov Y. Calculation of the filtration of polydisperse suspension with a small rate. *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 117, 00131.

10. Borazjani S., Bedrikovetsky P. Exact solutions for two-phase colloidal-suspension transport in porous media. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 44, pp. 296–320.

11. Kuzmina L. I., Osipov Y. V. Asymptotic model of filtration in almost stationary mode. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2016, vol. 12(1), pp. 158–163.

12. Bedrikovetsky P., You Z., Badalyan A., Osipov Y., Kuzmina L. Analytical model for straining-dominant large-retention depth filtration. *Chemical Engineering Journal*, 2017, vol. 330, pp. 1148–1159.

13. Vyazmina E. A., Bedrikovetskii P. G., Polyinin A. D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2007, vol. 41(5), pp. 556–564.

14. Toro E. F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*: 3-ed., Springer Publ., Dordrecht, 2009.

15. Galaguz Y. P., Safina G. L. Modeling of fine migration in a porous medium. *MATEC Web of Conferences*, 2016, vol. 86, 03003.

16. Galaguz Y. P., Safina G. L. Calculation of the filtration in a heterogeneous porous medium. *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 117, 00052.

17. Galaguz Y. P., Safina G. L. Modeling of filtration of 2-types particles suspension in a porous medium. *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 117, 00053.

18. Osipov Y., Safina G., Vetoshkin N. Calculation of the filtration at the porous medium outlet. *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 196, 04021.

19. Osipov Y., Safina G., Galaguz Yu. Calculation of the filtration problem by finite differences methods. *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 251, 04021.

20. Kuzmina L. I., Osipov Y. V., Galaguz Yu. P. Numerical and asymptotic modelling of a filtration problem with the initial deposit. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, vol. 13(3), pp. 70–76.

21. Kuzmina L. I., Osipov Y. V., Zheglova Yu. G. Modeling uniform asymptotics of the filtration problem in a porous medium. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 456, 012051.

22. Vaz A., Bedrikovetsky P., Fernandes P., Badalyan A., Carageorgos T. Determining model parameters for non-linear deep-bed filtration using laboratory pressure measurements. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2017, vol. 151, pp. 421–433.