УДК 539.4

© В. Д. Харлаб, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: vdx33@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-4-44-51

© V. D. Kharlab, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: vdx33@mail.ru

ОБЪЕДИНЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ СТАБИЛЬНЫХ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ (II)

INCORPORATED THEORY OF NONLINEAR CREEP AND LONG-TERM DURABILITY OF STABLE BRITTLE MATERIALS (II)

Во второй части работы рассматриваются приложения теории, изложенной в первой части: растяжение-сжатие однородного стержня, задача о релаксации напряжений в таком стержне, сжатие железобетонного стержня, кручение круглого стержня. Указывается оригинальный метод решения нелинейных задач теории ползучести.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, длительная прочность, стабильный материал, хрупкий материал.

In the second part of the study, applications of the theory stated in the first part are considered: tension-compression of the homogeneous rod, the problem of stress relaxation in such a rod, compression of a reinforced concrete rod, torsion of a round rod. An original method of solving nonlinear problems of the creep theory is presented.

Keywords: nonlinear creep, long term durability, stable material, brittle material.

Рассмотрим теперь некоторые следствия и приложения теории, изложенной в первой части статьи (см. Вестник гражданских инженеров. 2019. № 3 (74)). Нумерация формул и рисунков является общей для двух частей работы.

1. Растяжение-сжатие однородного стержня постоянной нагрузкой

В этом случае

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sigma = \text{const} > 0, \quad r_i = r, \\ \alpha_i &= \alpha - \alpha_0, \quad \beta_i = \beta - \beta_0,\end{aligned}\quad (25)$$

где σ, α, β (без индексов) — продольные компоненты; β_0 — всегда положительная величина (разрыхление материала). Расчетные формулы принимают вид:

$$\dot{r}(t) = -3Gk_1 \frac{\dot{Q}_\alpha(t)}{r(t) - \sigma}; \quad (26)$$

$$r(0) = R_1 = \sqrt{R_c R_p \pm (R_c - R_p) \sigma(0)}; \quad (27)$$

$$\dot{\beta}(t) = k_1(k_2 + k_3) \frac{\dot{Q}_\alpha(t)}{r(t) - \sigma}; \quad \dot{\beta}_0(t) = \frac{k_3}{k_2 + k_3} \dot{\beta}(t); \quad (28)$$

$$\dot{Q}_\alpha(t) = \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{\dot{C}(0)} \sigma^2 \dot{C}^2(t). \quad (29)$$

Если использовать для меры ползучести выражение (4)', то (после интегрирования (29))

$$Q_\alpha(t) = \frac{1+\nu}{3} \sigma^2 C_\infty (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (30)$$

В формуле (27) знак «+» относится к сжатию, а знак «-» соответствует растяжению, напряжение σ используется по модулю. Обратим внимание на то, что $r_p(0) \neq R_p, r_c(0) \neq R_c$.

Прямое интегрирование уравнения (26) (после умножения на знаменатель) приводит к квадратному уравнению, решение которого дает

$$r_t = \sigma + \sqrt{(r_0 - \sigma)^2 - k_1 \sigma^2 E C_\infty (1 - e^{-2\gamma t})}, \quad (31)$$

или

$$\rho_t = s + \sqrt{(\rho_0 - s)^2 - k_1 s^2 E C_\infty (1 - e^{-2\gamma t})}, \quad (31)'$$

где $\rho = r / R_c, s = \sigma / R_c$. Перед корнем выбран знак «+», чтобы соблюдалось равенство в начальный момент времени, когда $Q_t = 0, r_t = r_0$. Что рассматривается, растяжение или сжатие, определяется выбором выражения r_0 , см. (27). Отметим важное обстоятельство: показатель экспоненты в (31) вдвое больше показателя в мере ползучести (4)'. Это означает, что прочность убывает быстрее, чем нарастает ползучесть.

Необходимо отметить также, что показатель текущей прочности r_t не является характеристикой материала, подобной R_c, R_p , а зависит еще от напряженного состояния материала. С изменением напряжения изменяется и r_t , поэтому отношение r_t / σ не есть коэффициент запаса прочности. И вообще величина r_t недостаточно наглядно показывает изменение прочности со временем (см. рис. 2, а). Большой наглядностью обладает величина $r(t, s) - s$ (рис. 2, б). Еще предпочтительнее показатель $r(t, s) / r_0(s)$ (рис. 2, в). К вопросу о запасе прочности вернемся ниже.

Для момента разрушения, когда $r = \sigma$, из (31) получаем

$$(r_0 - \sigma_*)^2 - k_1 \sigma_*^2 EC_\infty (1 - e^{-2\gamma t_*}) = 0, \quad (34)$$

где σ_* — разрушающее значение напряжения (отметим, что оно входит и в r_0); t_* — момент разрушения. Если $t_* \rightarrow \infty$, то имеем дело с напряжением, называемым пределом длительной прочности, $R_{дл} \equiv R_\infty$. Согласно (34),

$$r_0^2 = R_\infty^2 K, \quad (35)$$

где

$$K = (1 + \sqrt{k_1 EC_\infty})^2. \quad (36)$$

Далее будем рассматривать отдельно сжатие и растяжение.

В случае сжатия с учетом (27) приводим (35) к виду

$$R_c R_p + (R_c - R_p) R_\infty = R_\infty^2 K, \quad (37)$$

откуда

$$R_\infty = \frac{1}{2K} [(R_c - R_p) + \sqrt{(R_c - R_p)^2 + 4K R_c R_p}], \quad (38)$$

или

$$\rho_\infty = \frac{R_\infty}{R_c} = \frac{1}{2K} [(1 - m) + \sqrt{(1 - m)^2 + 4Km}], \quad (38)'$$

где $m = R_p / R_c$.

При $K = 1$ (ползучесть отсутствует) формула (38) дает, как и должно быть, $R_\infty = R_c$. Именно из этих соображений перед корнем в (38) удержан знак «+».

Формула (38)' позволяет оценить величину параметра k_1 . Рассмотрим это на примере тяжелого бетона. Для такого материала можно ориентировочно принять

$$m = 0,1; R_\infty / R_c = 0,75; EC_\infty = 3.$$

Соответственно из (38)' находим

$$k_1 = 0,01. \quad (39)$$

При этом $\rho_\infty = R_\infty / R_c = 0,751$.

Аналогично для случая растяжения получаем

$$\rho_{\infty p} = \frac{R_{\infty p}}{R_p} = \frac{1}{2K} [-(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4Kn}], \quad (40)$$

где $n = 1/m = R_c / R_p$. Для указанных выше исходных данных формула (40) дает $\rho_{\infty p} = 0,968$, тогда как, согласно формуле (38)', $\rho_\infty = 0,751$. Сравнивая $\rho_\infty = 0,751$ и $\rho_{\infty p} = 0,968$, видим, что теория правильно учитывает установленный опытом эффект П. И. Васильева, согласно которому длительная прочность при растяжении гораздо меньше отличается от мгновенной, чем при сжатии (иными словами, степень нелинейности ползучести при сжатии заметно превосходит тот же показатель при растяжении).

Если постоянные величины K и R_∞ заменить переменными величинами

$$K_t = [1 + \sqrt{k_1 EC_\infty (1 - e^{-2\gamma t})}]^2 \quad (36)'$$

и R_t , то получим величину напряжения, которую материал выдерживает без разрушения в течение времени t . Например, согласно (38)',

$$\rho_{tc} = \frac{R_{tc}}{R_c} = \frac{1}{2K_t} [(1 - m) + \sqrt{(1 - m)^2 + 4K_t m}]. \quad (41)$$

Рис. 2

График этой функции при исходных данных

$$EC_{\infty} = 3; \gamma = 0,04 \text{ сут}^{-1}; k_1 = 0,01$$

приведен на рис. 3, а.

По этому графику находим, например, что уровню напряжения 0,8 соответствует время до разрушения 10,84 сут. Полное уменьшение прочности составляет примерно 25 %.

Для случая растяжения вместо (41) получаем

$$\rho_{rp} = \frac{R_{rp}}{R_p} = \frac{1}{2K_t} [-(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4K_t n}]. \quad (41)'$$

График показан на рис. 3, б. Полное уменьшение прочности теперь равно примерно 3 %.

2. Коэффициент запаса прочности. Выше уже было сказано, что отношение r_t / σ не является коэффициентом запаса прочности вследствие зависимости r_t от σ . Этот коэффициент установим, используя результаты (41) и (41)'. Как видно из (41), разрушающая величина сжимающего напряжения

$$R_{tc} = \rho_{tc} R_c, \quad (42)$$

следовательно, коэффициент запаса прочности при сжатии

$$\kappa_{tc} = \frac{R_{tc}}{\sigma} = \frac{\rho_{tc} R_c}{\sigma} = \frac{\rho_{tc}}{s_c}. \quad (43)$$

Аналогично для случая растяжения получаем формулы

$$R_{tp} = \rho_{tp} R_p, \quad \kappa_{tp} = \frac{R_{tp}}{\sigma} = \frac{\rho_{tp} R_p}{\sigma} = \frac{\rho_{tp}}{s_p}. \quad (44)$$

Графики функции (43) приведены на рис. 4, а, графики (44) — на рис. 4, б.

3. Соглашение о параметрах. Рассматриваемая теория в ее наиболее общей форме содержит три параметра: k_1 , k_2 , k_3 . Параметр k_1 «управляет», как было показано, прочностью, параметр k_2 является определяющим для нелинейной ползучести, параметр k_3 связан с разрыхлением материала при нелинейной ползучести. Можно существенно упростить теорию, если пренебречь последним (второстепенным) эффектом,

Рис. 3

т. е. принять $k_3 = 0$. Это влечет за собой $\nu_\beta = 0,5$, $k'_2 = k_2 = 1/k_1$, так что в теории остается всего один параметр k_1 . В дальнейшем будем придерживаться этого соглашения, помня, что теория позволяет учесть и объемное разрыхление материала.

4. Кривые нелинейной ползучести. Из сравнения формул (26) и (28) имеем

$$\dot{\beta}_t = -\frac{k_2 + k_3}{3G} \dot{r}_t, \quad (46)$$

откуда

$$\beta_t = -\frac{k_2 + k_3}{3G} (r_t - r_0). \quad (47)$$

Тем самым деформация нелинейной ползучести, в полном согласии с основной идеей теории, выражена через разупрочнение материала. Поскольку величины r_t и r_0 уже определены выше, то и деформация β_t может считаться известной. На рис. 5 приведены кривые нелиней-

Рис. 4

Рис. 5

ной ползучести $B(t, s) = \beta(t, s) \cdot 3G$ при $k_1 = 0,01$, $k_2 = 100$, $k_3 = 0$, $\gamma = 0,04 \text{ сут}^{-1}$. Как видим, в согласии с опытом до предела длительной прочности ($s = 0,751$) кривые ползучести являются затухающими, а при более высоких напряжениях приобретают s -образный вид и заканчиваются разрушением.

5. Эффект смягчения нелинейности. Рассмотрим отношение деформации нелинейной ползучести к деформации линейной ползучести:

$$\frac{\beta(t, s)}{\alpha(t, s)} = \frac{2}{3} (1 + \nu_e) (k_2 + k_3) \frac{\rho_0(s) - \rho(t, s)}{sEC_\infty (1 - e^{-\gamma t})}. \quad (48)$$

Графики этой функции показаны на рис. 6 при следующих исходных данных: $\nu_e = 0,2$, $k_2 = 100$, $k_3 = 0$, $\gamma = 0,04 \text{ сут}^{-1}$. Как видим, теория описывает известный из опытов эффект смягчения нелинейности (эффект Н. И. Катина): при напряжениях, меньших предела длительной прочности (в нашем случае $s = 0,751$), отношение деформации нелинейной ползучести к деформации линейной ползучести убывает с течением времени.

6. Интегральный коэффициент Пуассона для деформаций ползучести. Ранее был определен дифференциальный (мгновенный) коэффициент Пуассона для деформаций нелинейной ползучести

$$\nu_\beta = \frac{1}{2} \frac{k_2 - 2k_3}{k_2 + k_3}. \quad (49)$$

Однако в опытах определяют не дифференциальный, а интегральный коэффициент Пуассона, включающий в себя деформацию за какое-то конечное время, причем совместную деформацию линейной и нелинейной ползучести (причина — трудности проведения дифференциального эксперимента). Интегральный коэффициент (в предположении постоянства дифференциальных) можно найти следующим образом:

Рис. 6

$$\nu_{\alpha+\beta} = \frac{\nu_\alpha \alpha + \nu_\beta \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\nu_\alpha + \nu_\beta (\beta/\alpha)}{1 + (\beta/\alpha)}. \quad (50)$$

На рис. 7 показаны кривые $\nu_{\alpha+\beta}(t, s)$, полученные по формуле (50) при таких исходных данных: $\nu_\alpha = 0,2$ (техническое значение для бетона) и $\nu_\beta = 0$ (существует такое мнение), $\nu_\beta = 0,5$ (принятое нами значение, см. п. 3), значения отношения β/α получены ранее. Пока напряжения меньше предела длительной прочности, интегральный коэффициент Пуассона убывает с течением времени, что наблюдается и в опытах. Количественное согласие теории и эксперимента нуждается в дальнейшей проверке.

7. Чистый сдвиг. В данном случае $\tau = \sigma_{12}$ — касательное напряжение, прочие $\sigma_{ij} = 0$, γ — сдвиговая деформация, r — характеристика сдвиговой прочности,

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau, \quad \varepsilon_i = \gamma / \sqrt{3}, \quad r_i = \sqrt{3} r;$$

$$R_{сд} = r_0 = \sqrt{R_c R_p / 3}, \quad R_i = \sqrt{R_c R_p};$$

$$\dot{Q}_\alpha(t) = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{\dot{C}(0)} \sigma_i^2(t) \dot{C}(t) =$$

$$= 2(1 + \nu) C_\infty \chi e^{-2\chi t} \tau^2(t); \quad (51)$$

$$\dot{\gamma}(t) = 2(1 + \nu) C_\infty \chi e^{-2\chi t} \frac{\tau^2(t)}{r(t) - \tau(t)}; \quad (52)$$

$$\dot{r}_t = -G \frac{k_1 \dot{Q}_\alpha(t)}{r_t - \tau_t}, \quad (53)$$

где использована простейшая мера ползучести (4)' (с заменой параметра γ параметром χ). При постоянном напряжении, как легко показать,

$$r_t = \tau + \sqrt{(R_{сд} - \tau)^2 - k_1 EC_\infty \tau^2 (1 - e^{-2\chi t})}, \quad (54)$$

$$\beta_t = \frac{(R_{сд} - \tau) - \sqrt{(R_{сд} - \tau)^2 - k_1 EC_\infty \tau^2 (1 - e^{-2\chi t})}}{2Gk_1}. \quad (55)$$

Рис. 7

Предел длительного сопротивления находится из (54) при $t = t_* \rightarrow \infty$:

$$\tau_{\infty}^* = r_{\infty} = R_{\text{сд}} / (1 + \sqrt{k_1 EC_{\infty}}).$$

Отсюда при $k_1 = 0,01$, $EC_{\infty} = 3$ находим $\tau_{\infty}^* / R_{\text{сд}} = 0,852$. Сравнивая это с полученными ранее (при тех же исходных данных) результатами $\sigma_{\infty}^* / R_c = 0,751$ и $\sigma_{\infty}^* / R_p = 0,968$, приходим к выводу, что нелинейность при сдвиге выражена слабее, чем при сжатии, но сильнее, чем при растяжении.

Представляет интерес величина деформации нелинейной ползучести в момент разрушения $t_* \rightarrow \infty$. Из (54), (55), учитывая, что $1 - e^{-2\gamma t_*} \approx 1$ (в этом и состоит смысл условного бесконечно большого отрезка времени), находим

$$2Gk_1\beta^* = R_{\text{сд}} \frac{\sqrt{k_1 EC_{\infty}}}{1 + \sqrt{k_1 EC_{\infty}}} \Big|_{k_1=0,01}^{EC_{\infty}=3} = 0,148R_{\text{сд}}, \quad \beta^* = 7,4 \frac{R_{\text{сд}}}{G}.$$

8. Релаксация напряжений в стержне при сжатии. Если напряжения в стержне не близки к разрушающим, то, как показывают расчеты, разупрочнение невелико и можно вместо $r(t)$ использовать $r(0)$, что очень упрощает расчеты (при этом формулы (46), (47), конечно, теряют силу). Задача о релаксации напряжений наиболее подходит для такого упрощения (поскольку напряжения убывают с течением времени). В этой задаче $\varepsilon(t) = \text{const}$, то есть

$$e_t + \alpha_t + \beta_t = e_0, \quad (56)$$

или

$$\sigma_t = \sigma_0 - E(\alpha_t + \beta_t) = \sigma_0 - a_t - b_t. \quad (57)$$

Здесь

$$a_t = E\alpha_t = -\int_0^t \frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau} \sigma_{\tau} d\tau; \quad (58)$$

$$b_t = E\beta_t = \int_0^t E \frac{\dot{\alpha}_{\tau}}{r - \sigma_{\tau}} d\tau = \int_0^t \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{\dot{\varphi}(0)} \sigma_{\tau}^2 \frac{\dot{\varphi}^2(\tau)}{r - \sigma_{\tau}} d\tau; \\ r = \sqrt{R_c R_p + (R_c - R_p) \sigma_0}, \quad (59)$$

$\varphi(t) = EC(t)$ — характеристика линейной ползучести.

Если положить в (57) $b_t = 0$, то придем к задаче в линейной постановке, решение которой имеет известный вид

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{1 + \varphi_{\infty}} [1 + \varphi_{\infty} e^{-\gamma(1+\varphi_{\infty})t}]. \quad (60)$$

Соотношение (57) в развернутом виде представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение, требующее численного решения. Мы попробуем найти приближенное решение задачи полуобратным методом. Опираясь на линейное решение задачи (60), прием для искомого напряжения выражение

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{1 + \psi} [1 + \psi e^{-\delta(1+\psi)t}]. \quad (61)$$

Входящие в (61) параметры должны быть подобраны (если это, конечно, возможно) так, чтобы с достаточной точностью выполнялось равенство (57), т. е.

$$\sigma_t = \sigma_0 - a_t - b_t. \quad (62)$$

С помощью расчетного комплекса Mathcad это сделать несложно.

На рис. 8 представлены результаты одного такого численного эксперимента. Принято выражение меры ползучести (4)' и использованы следующие значения параметров:

$$R_c = 20; R_p = 2; \sigma_0 = 10; r = 14,832;$$

$$\varphi_{\infty} = 2; \gamma = 0,04; \delta = 0,04; \psi = 3,3.$$

На рис. 8, а показаны эпюры напряжений (штриховая эпюра — линейная теория). Видно, что требование (62) выполняется достаточно хорошо. Рис. 8, б показывает развитие линейной

Рис. 8. Эпюры зависимости напряжений (МПа) от времени (сут)

и нелинейной деформаций ползучести. На рис. 8, в показано соблюдение во времени условия постоянства деформации. Представляется, что полученное решение задачи близко к точному.

Мы рассмотрели пример низкого начального напряжения (половина предела прочности). Рассмотрим теперь случай высокого $\sigma_0 = 0,9 R_c$. Результаты расчета представлены на рис. 9. Эти графики соответствуют таким исходным данным:

$$R_c = 20; R_p = 2; \sigma_0 = 18; r = 19,079;$$

$$\varphi_\infty = 2; \gamma = 0,04; \delta = 0,04; \psi = 5,8.$$

В данном случае условие (62) соблюдается несколько хуже, чем в предыдущем примере. Тем не менее полученное решение задачи выглядит вполне приемлемым (при прошествии примерно двух недель с момента приложения нагрузки оно является практически точным). Заметим, что погрешность решения на каком-то временном отрезке никак не влияет на точность за пределами этого отрезка времени.

9. Сжатие железобетонного стержня постоянной продольной силой

Уравнение равновесия имеет вид

$$\sigma_6(t)A_6 + \sigma_c(t)A_c = N,$$

где обозначения предполагаются понятными.

Уравнение совместности деформаций:

$$\varepsilon_6(t) = \varepsilon_c(t);$$

$$e(t) + \alpha(t) + \beta(t) = \sigma_c(t) / E_c,$$

где все величины в левой части относятся к бетону. После домножения на E_6 получаем

$$\sigma_6(t) + a(t) + b(t) = \sigma_c(t) / n, \quad n = E_c / E_6.$$

Квазидеформации ползучести $a(t), b(t)$ определяются формулами (58), (59), где под напряжением надо понимать напряжение в бетоне (учитывая, что бетон претерпевает разгрузку, используем упрощение $r(t) = r(0)$). С учетом уравнения равновесия приходим к соотношению

$$\sigma_6(t)A + [a(t) + b(t)]A_c n = N, \quad A = A_6 + A_c n,$$

или

$$\sigma_6(t) = \frac{N}{A} - [a(t) + b(t)]\omega_c, \quad \omega_c = A_c n / A. \quad (63)$$

Если здесь отбросить нелинейное слагаемое $b(t)$, то получим линейное интегральное уравнение Вольтера второго рода, решение которого через резольвенту дает

$$\sigma_6(t) = \frac{N}{A} \frac{1}{1 + \varphi_\infty \omega_c} [1 + \varphi_\infty \omega_c e^{-\gamma(1 + \varphi_\infty \omega_c)t}]. \quad (64)$$

Рис. 9. Эпюры зависимости напряжений (МПа) от времени (сут)

Отталкиваясь от этого линейного решения задачи, примем для нелинейного решения выражение

$$\sigma_6(t) = \frac{N}{A} \frac{1}{1 + \varphi_* \omega_c} [1 + \varphi_* \omega_c e^{-\gamma(1 + \varphi_* \omega_c)t}], \quad (65)$$

где φ_* — параметр. Этот параметр должен быть подобран так, чтобы с достаточной точностью выполнялось соотношение (63).

На рис. 10 показаны результаты проверки такого подхода на конкретном примере. Исходные данные:

$$R_c = 20; R_p = 2; \varphi_\infty = 3; \gamma = 0,04;$$

$$A_6 = 200; n = 10; A_c = 4; A = 240;$$

$$\omega_c = 0,125; r = \sqrt{R_c R_p + (R_c - R_p) \sigma_0} = 13,784$$

(напряжения указаны в МПа, размеры — в см, время использовано в сутках; так как напряжения в бетоне убывают с течением времени, то принято $r(t) \approx r$). На рис. 10 слева сплошная

Рис. 10. Эпюры зависимости напряжений (МПа) от времени (сут)

линия — напряжение по формуле (65) при $\varphi_* = 4,85$ (подобрано). Через это напряжение вычислены величины $a(t), b(t)$. Пунктирная эпюра получена по формуле (63). Как видим, требуемое согласие двух линий достигнуто, так что задачу можно считать решенной.

Отметим, что (см. рис. 10, справа) в рассматриваемой задаче нелинейная ползучесть проявляется слабее, чем линейная.

10. Кручение круглого стержня постоянным крутящим моментом M

Деформация сдвига в произвольной точке поперечного сечения стержня

$$\gamma(\rho, t) = \frac{\tau(\rho, t)}{G} + \alpha(\rho, t) + \beta(\rho, t) = \theta'(t)\rho, \quad (66)$$

где ρ — расстояние от центра сечения до рассматриваемой точки; α, β — сдвиговые деформации линейной и нелинейной ползучести; τ — касательное напряжение; θ' — погонный угол закручивания.

Приведенное соотношение можно переписать в виде

$$\tau(\rho, t) = G\theta'(t)\rho - a(\rho, t) - b(\rho, t). \quad (66)'$$

При сдвиге $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$, соответственно, $r_i(t) = \sqrt{3}r(t)$, где r — характеристика сдвиговой прочности, определяемая уравнением

$$\dot{r}_i = -G \frac{k_1 \dot{Q}_\alpha(t)}{r_i - \tau_i}. \quad (67)$$

Первоначально будем использовать характеристику прочности в упрощенном виде $r_i = r_0 = R_{сд} = \sqrt{R_c R_p} / 3$ (см. п. 7).

Скорость диссипации энергии

$$\dot{Q}_\alpha(t) = 2 \frac{1+\nu}{\dot{C}(0)} \dot{C}(t) \tau^2(t). \quad (68)$$

Здесь $C(t)$ — мера продольной ползучести.

Величины a, b определяются формулами

$$a_t = G\alpha_t = -\int_0^t \frac{\partial \omega(t-\vartheta)}{\partial \vartheta} \tau_\vartheta d\vartheta; \quad (69)$$

$$b_t = G\beta_t = \int_0^t 2 \frac{1+\nu}{\dot{\omega}(0)} \tau_\vartheta^2 \frac{\dot{\omega}^2(\vartheta)}{r_\vartheta - \tau_\vartheta} d\vartheta, \quad (70)$$

где ω — характеристика сдвиговой ползучести (отношение деформации ползучести к упругой деформации), совпадающая по величине с характеристикой осевой деформации ползучести $\varphi = \varphi_\infty(1 - e^{-\chi t})$ (тогда как между соответствующими мерами ползучести существует соотношение $C_{сд} = 2(1+\nu)C$).

Для получения полного набора уравнений задачи надо к приведенным добавить еще два (уравнение равновесия и энергетическое):

$$\int_0^\delta \tau(\rho, t) \rho 2\pi \rho d\rho = M; \quad (71)$$

$$\int_0^\delta \tau(\rho, t) \gamma(\rho, t) 2\pi \rho d\rho = M \theta'(t), \quad (72)$$

где δ — радиус поперечного сечения стержня.

Соотношение (72) эквивалентно такому:

$$G\theta'(t) = \int_0^\delta \frac{\tau(\rho, t)}{M} [\tau(\rho, t) + a(\rho, t) + b(\rho, t)] 2\pi \rho. \quad (73)$$

С помощью уравнения равновесия (71) можно исключить θ' из (66)', что дает

$$G\theta'(t) = [M + \int_0^\delta [a(\rho, t) + b(\rho, t)] 2\pi \rho^2 d\rho] / I, \quad (74)$$

где I — полярный момент инерции сечения.

Совпадение величин (73) и (74) послужит в дальнейшем критерием правильности выбора величины параметров.

Если в приведенной системе уравнений отбросить величины a_t, b_t , то получится аппарат, соответствующий упругой постановке задачи, решение которой имеет известный вид

$$\tau = \frac{M}{I} \rho, \quad \theta' = \frac{M}{GI}. \quad (75)$$

Если отбросить только источник нелинейности b_t , то получим также известное решение задачи линейной теории ползучести

$$\tau(\rho, t) = \frac{M}{I} \rho, \quad \theta'(t) = \frac{M}{GI} (1 + \varphi_t). \quad (76)$$

Решение нелинейной задачи будем искать полуобратным методом.

Ясно, что нелинейная ползучесть приводит к уменьшению напряжений во внешней области сечения и к увеличению их во внутренней области. Отразить это обстоятельство можно заменой линейного аргумента ρ нелинейным

$$\wp = k_1 \rho - k_2 \rho^n, \quad (77)$$

где n — подгоночный параметр.

В качестве отправного выражения для напряжения примем

$$\tau(\rho, t) = \frac{M}{I} \wp(t) = \frac{M}{I} [k_1(t)\rho - k_2(t)\rho^n]. \quad (78)$$

Во всем сечении напряжения должны быть положительными, что накладывает требование

$$k_1 \geq k_2 \delta^{n-1}. \quad (79)$$

Уравнение равновесия дает связь между коэффициентами:

$$M = \int_0^\delta \tau(\rho, t) 2\pi \rho^2 d\rho = \frac{M}{I} [k_1(t)I - k_2(t)J];$$

$$k_2(t) = [k_1(t) - 1], \quad I = \frac{\pi \delta^4}{2}, \quad J = \frac{2\pi \delta^{n+3}}{n+3}. \quad (80)$$

При постоянном крутящем моменте происходит только перераспределение напряжений в сечении, но не общее их изменение, поэтому в (78) время может появиться только через коэффициенты k_1, k_2 . Зависимость от времени введем следующим естественным образом:

$$k_1(t) = 1 + \psi_t, \quad \psi_t = \psi_\infty (1 - e^{-\lambda t}), \quad (81)$$

где ψ_∞, λ — параметры.

Соотношения (81) аналогичны соотношениям линейной теории ползучести.

Имея формулу для напряжения (78), можно вычислить величины a_t, b_t и путем варьирования параметров добиться согласия между (73) и (74), что и будет означать получение решения задачи.

На рис. 11 показаны результаты такого поиска решения для сечения радиусом $\delta = 5$ и нагрузки $M = 200$ (размерности здесь и ниже не указываем). Были приняты следующие исходные данные:

$$R_c = 20; R_p = 2; R_{сд} = \sqrt{R_c R_p} / 3 = 3,65;$$

$$\varphi_\infty = 3; \chi = 0,05.$$

Новыми параметрами распорядились так:

$$\psi_\infty = \varphi_\infty = 3; \lambda = \chi = 0,05,$$

оставив свободным только параметр n . Этот последний величиной $n = 1,15$ подобрали по условию согласия формул (73) и (74) для погонного угла закручивания (см. рис. 11, в). Из рис. 11, а видно, как искривляется первоначально прямая эпюра напряжений. Рис. 11, б дает сравнение линейной и нелинейной составляющих ползучести.

Необходимо отметить, что для каждой величины нагрузки надо подбирать свои значения

Рис. 11. Эпюры зависимости напряжений (МПа) от времени (сут)

параметров. Так, например, для нагрузки $M = 400$ пришлось принять $n = 1,30$ при прочих прежних значениях параметров. Результаты приведены на рис. 12.

Рис. 12. Эпюры зависимости напряжений (МПа) от времени (сут)

В рассматриваемом примере мы использовали приближенную характеристику прочности r_0 вместо r . Проанализируем теперь влияние этого упрощения. Как видно из (67), имеет место зависимость

$$\dot{r}_t = -Gk_1 \dot{b}_t = -k_1 \dot{b}_t, \quad r_t = r_0 - k_1 b_t,$$

где k_1 — основной параметр теории, имеющий порядок 0,01.

Следовательно, допущенная нами погрешность характеризуется величиной

$$\Delta = \frac{r_0 - r_\infty}{r_0} = \frac{k_1 b_\infty}{r_0}.$$

Подставляя сюда $k_1 = 0,01; r_0 = 3,65; b_\infty = 1$ (см. рис. 12), получаем

$$\Delta = \frac{0,01}{3,65} = \frac{0,274}{100} = 0,27 \%,$$

что говорит о полной обоснованности использованного нами упрощения.

Думается, что вышеприведенных примеров достаточно для получения представления о расчетном аппарате изложенной теории. Более того, эти примеры предлагают определенную методику решения задач, каковая приводит к результатам в виде простых формул, а не наборов чисел, как при численном решении.