УДК 624.3

© Д. А. Валиуллин, аспирант
© С. В. Чижов, канд. техн. наук, доцент
(Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I)
E-mail: damirvall@rambler.ru, sergchizh@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-4-38-43

© D. A. Valiullin, post-graduate student
© S. V. Chizhov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Emperor Alexander I St. Petersburg State
Transport University)
E-mail: damirvall@rambler.ru, sergchizh@yandex.ru

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ ФЕРМ С ЖЕСТКИМИ СОЕДИНЕНИЯМИ В УЗЛАХ

ANALYSIS OF ASSESSMENT METHODS OF STRESS-STRAIN STATE OF LATTICE TRUSSES WITH RIGID CONNECTIONS IN NODAL JOINTS

При узловом приложении нагрузки в эксплуатируемых решетчатых фермах в элементах конструкции, помимо основных, продольных, возникают дополнительные усилия — изгибающий момент и перерезывающая сила. Введение шарниров в расчетную схему значительно облегчает расчет конструкции, но повышает степень его условности. В узлах фермы появляются концентраторы напряжений, которые учитываются принятыми коэффициентами запаса. Тем самым, достоверность расчета и соответствие принятой модели реальному сооружению снижаются. Таким образом, выбор метода расчета жесткости узловых соединений является актуальной и востребованной задачей.

Ключевые слова: решетчатая ферма, дополнительное усилие, шарнир, жесткое узловое соединение.

At the nodal application of the load in the operated lattice trusses in the structural elements in addition to the main, longitudinal, forces there arise additional forces, namely, bending moment and shearing force. The introduction of hinges into the design model greatly simplifies the design calculation, but increases the level of its conditionality. Stress raisers appear at the nodes of the truss, which are taken into account by the accepted safety factors. Thereby, the reliability of the calculation and the compliance of the adopted model with the actual construction are reduced. Thus, selecting the proper solution of the problem of the nodal joint rigidity is an urgent and sought-after task.

Keywords: lattice truss, additional force, hinge, rigid nodal joint.

Обзор методов

Первые попытки решения данного вопроса были предприняты во второй половине XIX века немецкими и французскими учеными [1]. Но если французские инженеры углубились в практические изыскания, не занимаясь разработкой теоретических основ, то представители инженерного сообщества Германии основали и разрабатывали теорию жестких ферм.

В 1879 году появляется работа Генриха Мандерлы, где для решения задачи о вычислении

дополнительных напряжений в элементах фермы автором были применены для интегрирования гиперболические функции. В том же году Фридрихом Энгессером была опубликована работа «О прогибах ферм и появляющихся при этом дополнительных напряжениях», где им было предложено ввиду большей жесткости рассматривать пояса как многопролетные неразрезные балки, а решетку считать прикрепленной к ним шарнирно.

Первый удобоприменимый метод расчета жестких ферм содержится во второй работе

Мандерлы «Вычисление дополнительных напряжений, появляющихся в простых фермах из-за жесткости узлов», которая была опубликована в 1880 году. Автором было сделано допущение о том, что продольные усилия в элементах жесткой фермы равны соответствующим усилиям в элементах фермы шарнирной. В том же году опубликована работа Азимонта «Главные и дополнительные напряжения».

В 1881 году появляется соответствующая глава в учебном курсе мостов Эмиля Винклера. В 1885 году Риттер и Ландсберг предложили свои графические способы расчета жестких ферм. В 1886 году появляется способ Мюллера-Бреслау, а в 1892 году Мор публикует свой знаменитый способ расчета ферм с жесткими узлами.

Рассмотрим способ Мора подробнее. Концевые моменты, возникающие от жесткого соединения узлов, для любого стержня определяются по формуле

$$M_{ij} = N_{ij}(2\varphi_i + \varphi_j - 3\psi_{ij}), \quad (1)$$

где φ_i и φ_j — углы поворота узлов, прилегающих к рассматриваемому стержню; ψ_{ij} — угол поворота самого стержня; N_{ij} определяется по формуле

$$N_{ij} = \frac{2EJ_{ij}}{l_{ij}}. \quad (2)$$

Делая некоторую оценку упомянутых способов, отметим, что Мандерла, Риттер, Мюллер-Бреслау и Мор при выводе основных уравнений предполагали, что усилия и прогибы в жесткой и шарнирной ферме одни и те же. Энгессер, Ландсберг, а также Мюллер-Бреслау вводили еще одно допущение: решетка крепится к поясам шарнирно ввиду ее большей гибкости.

В 1901 году Е. О. Патон публикует работу [2], в которой он собрал все, изученное по этому вопросу, а также рассчитал несколько мостовых ферм способом Мора. При этом автор получил следующие данные о перенапряжениях: в поясах двухраскосных ферм величина дополнительных напряжений может достигать 293 % от величины основных.

Подобный результат во многом обескуражил современников Патона. Наблюдалось явное противоречие между теоретическими выкладками и результатами эксплуатации конструкций. Появились работы Е. В. Зотикова [3, 4], Г. П. Передерия [5], уже упомянутый труд К. М. Дубяги [1], в которых авторы критически обращаются к

полученным Патоном выводам. В частности, Зотиков последовательно опровергает некоторые суждения Патона. Передерий же пересчитывает двухраскосную ферму и находит гораздо более умеренные результаты. Сущность его способа заключается в принятии в расчет влияния узловых моментов на главные усилия частей ферм. Им было показано, что моменты на концах стержней оказывают давление на опоры. Как следствие, реакции на опорах приводят к уменьшению усилий в стержнях и изменению деформаций фермы. Решетка же, за исключением крайних стоек, считается прикрепленной к поясам шарнирно.

В 1907 году выходит работа Н. В. Некрасова «К теории ферм с жесткими соединениями в узлах» [6]. В этой книге автор, не прибегая к различным упрощениям и допущениям, решает задачу об определении всех узловых моментов жесткой фермы. На основании сравнения результатов расчетов мостовых ферм по всем известным методам с данными своего обобщенного способа Некрасов делает следующий вывод: если разница в жесткостях поясов и решетки велика, предпочтительнее использовать способ профессора Передерия; в противном случае способ Мора дает лучшие результаты.

Влияние размеров элемента на НДС решетчатой фермы

Для оценки влияния на НДС фермы отношения высоты поперечного сечения элемента к его длине будем использовать конечно-элементную модель (рис. 1), созданную в ПК *midas Civil*.

Проанализируем три плоские модели: схема 1 — все элементы решетки заданы балочного типа, то есть способны воспринимать как продольные усилия, так и изгибающий момент и перерезывающую силу; схема 2 — пояса фермы моделируются балочными элементами, а раскосы и стойки — ферменными, работающими лишь на продольные усилия; схема 3 аналогична схеме 2 с той лишь разницей, что на концах элементов поясов сняты связи.

Таким образом, схема 3 соответствует принятым в настоящий момент предпосылкам к расчету решетчатых ферм: шарнирному сопряжению решетки с поясами и работе элементов фермы только на продольные усилия. Схема 1, наоборот, позволяет учесть все виды силовых воздействий, повышая тем самым достоверность и точность

Рис. 1. Общий вид модели

расчета. Следовательно, с целью анализа подхода к определению напряженно-деформированного состояния решетчатых ферм с жесткими соединениями в узлах необходимо сравнивать значения, получаемые при расчете схем 1 и 3.

Схема 2 представляет собой промежуточный вариант; в результате сравнения напряженного состояния элементов схем 1 и 2 было выявлено, что разница в полных напряжениях при принятых размерах поперечных сечений элементов для поясов составляет 0,19–4,44 %, для раскосов 21,23–28,11 %, для стоек 11,23–18,07 %.

Элементы решетки ферм приняты квадратного поперечного сечения, причем расчет проводился пять раз для пяти размерных вариантов.

По результатам расчета конструкции на узловые нагрузки были построены графики, отражающие зависимости следующих показателей от отношения длины элемента фермы к высоте его поперечного сечения:

- а) превышение полных напряжений над напряжениями от продольных усилий (рис. 3);
- б) изменение продольных усилий в элементах фермы (рис. 4);
- в) изменение перерезывающих сил в элементах фермы (рис. 5);
- г) изменение изгибающих моментов в элементах фермы (рис. 6).

Необходимо обратить внимание, что отрицательные по знаку усилия, действующие в элемен-

тах фермы, принимались при построении графиков равными своим абсолютным значениям (по модулю).

Каждый из показателей (*a–г*) описан регрессионной моделью в виде степенной функции:

$$f(x) = a \cdot x^b + c. \quad (3)$$

Был построен график зависимости превышения прогибов схемы 1 над прогибами схемы 3 от отношения l/h (рис. 2). Для описания полученных значений применялась не только степенная, но и линейная функция:

$$f(x) = a + b \cdot x. \quad (4)$$

Для оценки степени приближения выбранной регрессионной модели к фактической зависимости конкретного показателя от отношения l/h использовался коэффициент детерминации:

$$d = 1 - \frac{\sum (A_f - A_r)^2}{\sum (A_f - A_{sr})^2}, \quad (5)$$

где A_f — фактические значения показателя; A_r — значения, полученные при помощи функции регрессии; A_{sr} — среднее статистическое фактических значений показателя.

Конечный вид формул для каждого случая, а также вычисленные коэффициенты детерминации приведены в таблице.

Согласно рис. 2, значению отношения $l/h = 15$ соответствует разница прогибов схем 1 и 3, равная 2,4 %. На рис. 3 показано, что этому же отношению длины элемента к высоте поперечного сечения соответствует превышение полных напряжений от 13,173 % для нижнего пояса до 31,592 % для раскосов. Следовательно, учет жесткости узловых соединений оказывает большее влияние на напряжения, действующие в конструкции, чем на деформации. Более того, можно сделать вывод о том, что наибольшие дополнительные напряжения действуют в раскосах.

Сравнивая коэффициенты детерминации функций регрессии для вертикального прогиба, можно утверждать, что степенная функция более точно описывает фактическую зависимость «превышение прогибов — отношение l/h », хотя в данном конкретном случае зависимость практически линейная (коэффициент детерминации линейной функции близок к 1).

Выводы

1. Были построены регрессионные модели зависимости превышения полных напряжений над напряжениями от продольных усилий от

Результаты расчетов конструкции на узловые нагрузки

График зависимости	Наименование показателя	Элемент фермы	Вид регрессионной модели	Коэффициент детерминации
Рис. 2	Вертикальный прогиб	Середина нижнего пояса	$F_{def} = -0,2 \cdot x^{0,801} + 4,5$ (степенная функция)	0,99791
			$F_{def} = 4 - 0,1 \cdot x$ (линейная функция)	0,99749
Рис. 3	Превышение полных напряжений над напряжениями от продольных усилий	Нижний пояс	$\Delta_{np} = -7 \cdot x^{0,332} + 30,3$	0,99998
		Верхний пояс	$\Delta_{vp} = -75,3 \cdot x^{0,095} + 114,7$	0,99999
		Стойка	$\Delta_{st} = 92 \cdot x^{-0,536} - 4,5$	1,0
		Раскос	$\Delta_{ras} = -48,2 \cdot x^{0,24} + 124$	0,99998
Рис. 4	Продольные усилия	Нижний пояс	$N_{np} = 74521,9 \cdot x^{1,156 \cdot 10^{-4}} - 74202,6$	0,98962
		Верхний пояс	$N_{vp} = 93094,8 \cdot x^{2,183 \cdot 10^{-5}} - 92750,2$	0,76083
		Стойка	$N_{st} = 98126,2 \cdot x^{1,591 \cdot 10^{-4}} - 97933$	0,99514
		Раскос	$N_{ras} = -10149,3 \cdot x^{1,362 \cdot 10^{-3}} + 10409$	0,99938
Рис. 5	Перерезывающие силы	Нижний пояс	$S_{np} = 279,2 \cdot x^{-1,798} - 0,1$	0,99963
		Верхний пояс	$S_{vp} = 1311,8 \cdot x^{-2,676} + 0,1$	0,99815
		Стойка	$S_{st} = 141,7 \cdot x^{-1,566} - 0,3$	0,99971
		Раскос	$S_{ras} = 46,1 \cdot x^{-0,883} - 1,9$	0,99963
Рис. 6	Изгибающие моменты	Нижний пояс	$M_{np} = 97,3 \cdot x^{-1,32} - 0,5$	0,99953
		Верхний пояс	$M_{vp} = 138 \cdot x^{-1,427} - 0,4$	0,99859
		Стойка	$M_{st} = 188,9 \cdot x^{-1,565} - 0,3$	0,99984
		Раскос	$M_{ras} = 96,8 \cdot x^{-1,297} - 0,8$	0,99992

Рис. 2. Зависимость превышения прогибов схемы 1 над прогибами схемы 3 от отношения l/h

Рис. 3. Превышение полных напряжений над напряжениями от продольных усилий

Рис. 4. Зависимость продольных усилий в элементах фермы от отношения l/h Рис. 6. Зависимость изгибающих моментов в элементах фермы от отношения l/h Рис. 5. Зависимость перерезывающих сил в элементах фермы от отношения l/h

отношения длины элемента фермы к высоте его поперечного сечения. Показано, что наибольшие дополнительные напряжения действуют в раскосах.

2. Была построена регрессионная модель зависимости превышения прогибов схемы с жесткими узлами над прогибами схемы с шарнирным сопряжением элементов от отношения длины элемента фермы к высоте его поперечного сечения. Установлено, что влияние жесткости узловых соединений на вертикальные прогибы незначительно.

3. Построенные графики зависимости изменения продольных усилий, перерезывающих сил и изгибающих моментов в элементах фермы от отношения длины элемента фермы к высоте его поперечного сечения позволяют судить о характере изменения указанных показателей.

Библиографический список

1. Дубяга К. М. Расчеты и испытания раскосных ферм с жесткими соединениями в узлах. СПб.: Тип. АО тип. дела, 1914. 169 с.

2. Патон Е. О. Расчет сквозных ферм с жесткими узлами. М.: Типолитография В. Рихтер, 1901. 159 с.

3. Зотиков Е. В. К вопросу о дополнительных напряжениях в фермах с жесткими узлами. СПб.: Тип. М-ва пут. сообщ. (т-ва И. Н. Кушнерев и К°), 1907. 57 с.

4. Зотиков Е. В. Двухраскосные фермы и жесткие узлы // Журнал Министерства путей сообщения. 1905. № 9.

5. Передерий Г. П. Влияние жесткости узлов на усилия и напряжения в частях ферм. М.: Унив. тип., 1904. 100 с.

6. Некрасов Н. В. К теории ферм с жесткими соединениями в узлах. Опыт сравнительного анализа методов расчета // Известия Томского технологического института императора Николая II. 1907. Т. 7, № 4. 182 с.

References

1. Dubyaga K. M. *Raschety i ispytaniya raskosnykh ferm s zhestkimi soedineniyami v uzlakh* [Calculations and tests of diagonal trusses with rigid joints in nodes]. St. Petersburg, Tip. AO tip. Dela Publ., 1914, 169 p.

2. Paton E. O. *Raschet skvoznykh ferm s zhestkimi uzlamy* [Calculations and tests of diagonal trusses with rigid joints in nodes]. Moscow, Tipolitografiya V. Rikhter Publ., 1901, 159 p.

3. Zotikov E. V. *K voprosu o dopolnitel'nykh napryazheniyakh v fermakh s zhestkimi uzlamy* [To the issue of additional stresses in trusses with rigid nodes]. St. Petersburg, Tip. M-va put. soobshch. (t-va I. N. Kushnerev i K°) Publ., 1907, 57 p.

4. Zotikov E. V. *Dvukhraskosnye fermy i zhestkie uzly* [Double-diagonal trusses and rigid nodes]. *Zhurnal Ministerstva putey soobshcheniya – Journal of the Ministry of Railways*, 1905, no. 9.

5. Perederiy G. P. *Vliyanie zhestkosti uzlov na usiliya i napryazheniya v chastyakh ferm* [Effect of the nodes' rigidity on forces and stresses in parts of trusses]. Moscow, Univ. tip. Publ., 1904, 100 p.

6. Nekrasov N. V. *K teorii ferm s zhestkimi soedineniyami v uzlakh. Opyt sravnitel'nogo analiza metodov rascheta* [On the theory of trusses with rigid joints in nodes. Experience of comparative analysis of calculation methods]. *Izvestiya Tomskogo tekhnologicheskogo instituta imperatora Nikolaya II – Bulletin of the Emperor Nicholas II Tomsk Institute of Technology*, 1907, vol 7, no. 4, 182 p.