УДК 539.4

© В. Д. Харлаб, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: vdx33@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-3-42-51

© V. D. Kharlab, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: vdx33@mail.ru

ОБЪЕДИНЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ СТАБИЛЬНЫХ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ (I)

INCORPORATED THEORY OF NONLINEAR CREEP AND LONG-TERM DURABILITY OF STABLE BRITTLE MATERIALS (I)

Излагаемая теория рассматривает процессы ползучести и разрушения как принципиально и явно взаимосвязанные. Рассматриваются бетон и близкие по реологическим свойствам материалы. Важным их свойством является наличие заметной линейной составляющей ползучести. Материалами, удовлетворяющими указанному требованию, являются, помимо бетона, грунты и полимеры. Цель работы — построение определяющих уравнений, описывающих связь нелинейной ползучести и длительной прочности с напряжениями при произвольном виде и уровне напряженного состояния. Автор занимался разработкой этого вопроса с 1980 г. Данная публикация обобщает и уточняет полученные ранее результаты. В частности, формулы интенсивности напряжений и деформаций использованы без линеаризации и предложен оригинальный способ решения конкретных нелинейных задач.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, длительная прочность, стабильный материал, хрупкий материал.

The theory presented in the article regards creep and damage processes as essentially and evidently interconnected. Concrete and materials which are similar in rheological properties are considered. The important property of these materials is the presence of a noticeable linear creep component. Besides concrete, materials that are characterized with this property are soils and polymers. The aim of the study is to construct the defining equations describing the relationship of nonlinear creep and long-term strength with stresses at any form and level of intense condition. The author has been engaged in working out of this problem since 1980. The article provides a generalization of the theme and specifies the results received earlier. In particular, stress and strain intensity formulas are used without linearization and an original method for solving specific nonlinear problems is proposed.

Keywords: nonlinear creep, long-term durability, stable material, brittle material.

Введение

Линейная ползучесть в чистом виде никогда не реализуется, всегда имеются те или иные нарушения линейности, более сильные при одних условиях и более слабые — при других. В случае бетона существует достаточно широкий диапазон напряжений (ниже половины предела мгновенной прочности), в рамках которого считается возможным пользоваться на практике линейным приближением. Заметная ползучесть металлов проявляется только при высоких температурах (в турбинных лопатках, элементах двигателей внутреннего сгорания и т. п.) и всегда сильно нелинейная. Эта ползучесть не относится к области, на которую нацелена предлагаемая ниже

теория. Речь далее идет о бетоне и близких по реологическим свойствам материалах. Важным их свойством является наличие заметной линейной составляющей ползучести по причине, которая будет ясна из дальнейшего. Материалами, удовлетворяющими указанному требованию, являются, помимо бетона, грунты и полимеры.

Из предшествующих разработок вопроса наибольшую известность получили две нелинейные наследственные теории ползучести — теория Н. Х. Арутюняна и теория Ю. Н. Работнова:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_0^t F_\sigma[\sigma(\tau)] \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau;$$

$$F_\varepsilon(\varepsilon(t)) = \frac{\sigma(t)}{E} - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

где, кроме общепринятых обозначений, $F_\sigma(\sigma)$, $F_\varepsilon(\varepsilon)$ — некоторые нелинейные функции, подбираемые так, чтобы было достигнуто достаточное согласие с опытными данными при постоянном напряжении, чему соответствуют уравнения

$$\varepsilon(t) = \sigma/E + F_\sigma(\sigma)C(t);$$

$$F_\varepsilon[\varepsilon(t)] = \sigma/E + \sigma C(t).$$

Имеется ряд предложений, касающихся вида функций $F_\sigma(\sigma)$ и $F_\varepsilon(\varepsilon)$, например, предложение Н. Х. Арутюняна:

$$F_\sigma(\sigma) = \sigma + a\sigma^2.$$

Существуют разработки, посвященные модификациям указанных теорий. Оригинальную теорию предложил П. И. Васильев, где переменной интегрирования служит не время, а напряжение.

Достоинствами теорий Арутюняна и Работнова являются простота и удобство применения. Но у них имеется и один общий недостаток, который можно назвать принципиальным. Это то, что деформации нелинейной ползучести оказываются полностью обратимыми, тогда как, согласно опытам, они являются полностью необратимыми. Правда, если вместо меры ползучести $C(t - \tau)$ использовать $C(t, \tau)$, то необратимость появится, но это будет необратимость другого вида, связанная со старением материала. Кроме того, обсуждаемые теории описывают только затухающую ползучесть, т. е. не охватывают все три стадии ползучести.

Что касается длительной прочности, то в этом вопросе дело обстоит (в общих чертах) следующим образом. Во-первых, предполагается, что теория ползучести уже построена (независимо от теории длительной прочности). Во-вторых, вводится та или иная функция, характеризующая повреждение материала в процессе ползучести, достижение которой определенного значения служит признаком разрушения. Так, Л. М. Качанов ввел функцию ψ (сплошность), убывающую от 1 (неповрежденный материал) до 0 (разрушение) и кинетическое уравнение для нее $\dot{\psi} = f(\sigma, \psi)$. Ю. Н. Работнов предложил аналогичный подход с функцией поврежденности $\omega = 1 - \psi$. А. И. Чудновский выдвинул идею использовать в качестве характеристической функции удельную энтропию, порождаемую в процессе ползучести.

Излагаемая ниже теория рассматривает процессы ползучести и разрушения как принци-

пиально и явным образом взаимосвязанные. Преследуется цель описания ползучести и длительной прочности при любом виде и уровне напряженного состояния. Автор занимался разработкой данного вопроса с 1980 г. Результаты докладывались на научных конференциях и публиковались в трудах ЛИСИ. Теория получила приложения в работах аспирантов автора А. В. Рощина, А. А. Котова, М. В. Сергеева, Ю. А. Гурьевой. Данная публикация обобщает и уточняет полученные ранее результаты. В частности, формулы интенсивности напряжений и деформаций использованы без линеаризации и предложен оригинальный способ решения конкретных нелинейных задач, каковой составляет существенный элемент новизны.

Постановка задачи

Экспериментально выявлены следующие эффекты, подлежащие теоретическому учету:

- наличие значительной линейной составляющей ползучести, носящей затухающий характер и полностью обратимой, если нет старения;
- в целом нелинейный процесс деформирования, затухающий при достаточно низких напряжениях и незатухающий (S-образный) при высоких напряжениях, заканчивающийся разрушением;
- зависимость нелинейности от вида напряженного состояния (в частности, разная степень нелинейности при растяжении и сжатии);
- снижение степени нелинейности по мере роста деформации ползучести (смягчение нелинейности);
- увеличение объема в процессе нелинейной ползучести (разрыхление материала, дилатансия);
- снижение прочности в процессе ползучести;
- тесная связь нелинейности с повреждением структуры материала и с необратимостью.

Целью работы является построение определяющих уравнений, описывающих связь нелинейной ползучести и длительной прочности с напряжениями при произвольном виде и уровне напряженного состояния.

Нагружение предполагается простым в том смысле, что все компоненты тензора напряжений в рассматриваемой точке изменяются во времени пропорционально. Это позволяет характеризовать поврежденность материала скалярно.

Хрупкость материала понимается как неспособность без разрушения претерпевать большие деформации.

Стабильность материала (иначе — отсутствие старения) означает независимость характеристик материала от его возраста. В случае такого материала, как бетон, имеется в виду, что старение уже закончено.

Построение расчетного аппарата теории

По повторяющимся в одночлене числовым индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Материал считается изотропным во всякий момент времени (наведенная анизотропия не учитывается).

Принимается, что полная механическая деформация ε складывается из двух линейных (упругой e и упруго-вязкой α) и одной нелинейной (β) частей:

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \alpha_{ij}(t) + \beta_{ij}(t). \quad (1)$$

Здесь t — время (далее этот аргумент указывается не во всех случаях).

Выражение (1) лишь перечисляет составные части деформации, но не означает, что эти части всегда связаны последовательно, они могут быть связаны и иначе (например, параллельно). Но, пока не оговорено противное, предполагается последовательная связь.

Зависимость линейных составляющих от напряжений предполагается известной. Это закон Гука для упругих деформаций и уравнения Маслова–Арутюняна для деформаций линейной ползучести. Будем подразделять деформацию на изменение объема и изменение формы. Тогда закон Гука выразится двумя соотношениями:

$$\begin{aligned} e_o &= \frac{1-2\nu_e}{E} \sigma_o; \\ e_{ij} - e_o \delta_{ij} &= \frac{1+\nu_e}{E} (\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $e_o = e_{kk}/3$ — среднее относительное удлинение (одна треть от изменения объема); $\sigma_o = \sigma_{kk}/3$ — среднее нормальное напряжение; E, ν_e — модуль упругости и коэффициент Пуассона для упругих деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера.

В линейной теории ползучести широко используется весьма эффективное допущение Маслова–Арутюняна, согласно которому коэффициент Пуассона ν_α , соответствующий деформациям ползучести, совпадает с упругим коэффици-

ентом Пуассона ν_e и оба они имеют постоянное значение ν . Присоединимся к этому допущению. Тогда зависимость деформаций линейной ползучести от напряжений предстанет в виде [38]

$$\begin{aligned} \alpha_o &= (1-2\nu) \tilde{\sigma}_o(t); \\ \alpha_{ij} - \alpha_o \delta_{ij} &= (1+\nu) (\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_o \delta_{ij}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\tilde{\sigma}(t) = - \int_0^t \frac{\partial C(t-\tau)}{\partial \tau} \sigma(\tau) d\tau; \quad (4)$$

$C(t-\tau)$ — мера линейной ползучести. Простейшим и традиционным аналитическим выражением меры ползучести является следующее:

$$C(t-\tau) = C_\infty [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (4)'$$

которого и мы будем придерживаться.

В дальнейшем (с целью охватить произвольное напряженно-деформированное состояние) будем опираться на понятия интенсивности напряжений σ_i и интенсивности деформаций ξ_i :

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (5)$$

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2}, \quad (6)$$

где σ_k, ξ_k — главные напряжения и главные деформации. Символ ξ охватывает все три вида деформаций (e, α, β).

Упругие деформации (6) связаны с напряжениями (5) соотношением

$$e_i = \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{E} \sigma_i, \quad (7)$$

в справедливости чего можно убедиться подстановкой выражений (5), (6) в (7) с использованием закона Гука. Действительно,

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] - \\ &- \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 - \sigma_2); \\ e_2 - e_3 &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_2 - \sigma_3), \quad e_3 - e_1 = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned}$$

Дальнейшая проверка очевидна.

Заменяя в (7) модуль податливости E^{-1} соответствующим оператором [38], получаем зависимость для деформаций линейной ползучести

$$\alpha_i(t) = \frac{2}{3} (1+\nu) \tilde{\sigma}_i(t). \quad (8)$$

Строго говоря (из-за нелинейности формулы (5) относительно напряжений), (8) надо понимать следующим образом. Пусть мы знаем зависимость от времени главных напряжений. Тогда из (5) мы получаем функцию $\sigma_i(t)$ и уже к ней

применяем операцию (4), после чего по формуле (8) находим деформацию линейной ползучести. Однако, как оказывается, замена в (5) напряжений σ_k изображениями $\tilde{\sigma}_k$ приводит к тому же результату. Проверка этого достигается аналогично вышеприведенной проверке формулы (7):

$$\alpha_1 - \alpha_2 = [\tilde{\sigma}_1 - \nu(\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3)] - \\ - [\tilde{\sigma}_2 - \nu(\tilde{\sigma}_3 + \tilde{\sigma}_1)] = (1 + \nu)(\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2), \dots$$

Трудности, связанные с использованием нелинейных объектов (5), (6), можно было бы устранить известным способом линеаризации формул интенсивностей напряжений и деформаций [23]. Однако данный прием является приближенным, и мы не будем к нему прибегать.

Формулы (7), (8) описывают изменение формы. Описание изменения объема указано в (2), (3).

Переход от интенсивностей к компонентам осуществляется с помощью известных зависимостей Мизеса

$$\dot{\xi}_{ij} - \dot{\xi}_0 \delta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}). \quad (9)$$

Отметим, что при простом нагружении скорость интенсивности совпадает с интенсивностью скоростей: $(\dot{\xi}_i)^* = \dot{\xi}_i$.

Нам предстоит определить деформации нелинейной ползучести β_{ij} и сопутствующее снижение прочности материала. Пусть Π — характеристика поврежденности материала. Постулируется, что

$$\dot{\Pi}(t) = k_1 [\dot{Q}_\alpha(t) + \dot{Q}_\beta(t)], \quad (10)$$

где $\dot{Q}_\alpha(t)$, $\dot{Q}_\beta(t)$ — удельные мощности диссипации энергии формоизменения в α - и β -процессах; k_1 — безразмерный постоянный параметр (ради простоты принят общий параметр для α - и β -процессов). Величина Π имеет размерность удельной энергии (Дж/м³) и вместе с тем — напряжения (Н/м²).

Процесс нелинейной ползучести является необратимым, поэтому рассеянная в этом процессе энергия совпадает с затраченной работой. Соответственно при отсутствии изменения объема было бы $\dot{Q}_\beta = \sigma_i \dot{\beta}_i$. Но, согласно опытам, объем в процессе нелинейной ползучести несколько увеличивается (разрыхление материала, или дилатансия). Поэтому примем

$$\dot{Q}_\beta = \frac{2}{3} (1 + \nu_\beta) \sigma_i \dot{\beta}_i, \quad (11)$$

где ν_β — неизвестный пока коэффициент Пуассона для деформаций нелинейной ползучести (при $\nu_\beta = 0,5$, т. е. при отсутствии изменения объема, введенный множитель $2(1 + \nu_\beta)/3$ вырождается в 1).

Характеристику текущей прочности материала $r_i(t)$, убывающую с ростом Π , введем энергетическим соотношением

$$\frac{r_i^2}{6G} = \frac{R_i^2}{6G} - \Pi, \quad (12)$$

где G — модуль сдвига; $R_i = r_i(0)$ — характеристика прочности неповрежденного материала (в начальный момент ползучести). Величину R_i , по смыслу вышеизложенного, надо заимствовать из энергетических теорий хрупкого разрушения вследствие формоизменения (см., например, [23]). Все эти теории охватываются предложением Надаи

$$R_i^2 = a - f(\sigma_0), \quad (12)'$$

где $a = \text{const}$; $f(\sigma_0)$ — та или иная функция среднего напряжения. В частности, согласно теории П. П. Баландина,

$$a = R_c R_p, \quad f(\sigma_0) = (R_c - R_p) 3\sigma_0, \quad (12)''$$

где R_c, R_p — пределы прочности на сжатие и растяжение. Величина σ_0 в (12)', (12)'' относится к начальному моменту времени $t = 0$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем опираться на теорию Баландина.

В силу указанной двоякой размерности характеристики Π величину r_i можно задать не только энергетическим способом (12), но и силовым: $r_i = R_i - \Pi$, однако, как показала проверка, такой подход является менее продуктивным.

Соотношение (12) означает: разрушающим фактором является потенциальная энергия упругого формоизменения; в левой части (12) — ее критическое значение; первый член правой части — критическое значение энергии для неповрежденного материала.

Так как удельная энергия упругого формоизменения равна $\sigma_i^2 / 6G$, то условие разрушения имеет вид

$$\sigma_i(t_*) = r_i(t_*), \quad (13)$$

где t_* — момент разрушения.

Считаем, что приращению поврежденности материала отвечает приращение нелинейной ползучести. Естественнее принять, что последнее прямо пропорционально росту поврежденности

и обратно пропорционально прочности материала:

$$\dot{\beta}_i(t) = k_2 \frac{\dot{\Pi}(t)}{r_i(t)}; \quad (14)$$

$$\dot{\beta}_o(t) = k_3 \frac{\dot{\Pi}(t)}{r_i(t)} = \frac{k_3}{k_2} \dot{\beta}_i(t), \quad (15)$$

где k_2, k_3 — безразмерные постоянные параметры.

Из вышеприведенных соотношений вытекают расчетные уравнения

$$\dot{r}_i = -3G \left[\frac{\dot{f}(\sigma_o)}{r_i} + \frac{k_1 \dot{Q}_\alpha}{r_i - k_1 k'_2 \sigma_i} \right]; \quad k'_2 = \frac{2}{3} (1 + v_\beta) k_2; \quad (16)$$

$$\dot{\beta}_i(t) = k_1 k_2 \frac{\dot{Q}_\alpha(t)}{r_i(t) - k_1 k'_2 \sigma_i(t)}; \quad \dot{\beta}_o(t) = \frac{k_3}{k_2} \dot{\beta}_i(t). \quad (17)$$

Это получено следующим образом. Из (10), (11) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= k_1 \left[\dot{Q}_\alpha + \frac{2}{3} (1 + v_\beta) \sigma_i \dot{\beta}_i \right] = \\ &= k_1 \left[\dot{Q}_\alpha + \frac{2}{3} (1 + v_\beta) \sigma_i k_2 \frac{\dot{\Pi}}{r_i} \right]; \\ \dot{\Pi} &= \frac{k_1 \dot{Q}_\alpha}{1 - k_1 k'_2 \sigma_i / r_i}, \end{aligned} \quad (10')$$

после чего через (12) приходим к разрешающему уравнению (16). Получение прочих расчетных уравнений не требует пояснений.

Через найденные $\dot{\beta}_i, \dot{\beta}_o$ находятся компоненты $\dot{\beta}_{ij}$ из соотношений

$$\dot{\beta}_{ij} - \dot{\beta}_o \delta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\beta}_i}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}). \quad (18)$$

Коэффициент Пуассона v_β можно определить из второго соотношения (17). Действительно, рассматривая линейное напряженное состояние, при котором $\beta_i = \beta_{11} - \beta_o$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_o &= \frac{k_3}{k_2} (\dot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_o); \quad (1 + \frac{k_3}{k_2}) \dot{\beta}_o = \frac{k_3}{k_2} \dot{\beta}_{11}; \\ (1 + \frac{k_3}{k_2}) \frac{1 - 2v_\beta}{3} \dot{\beta}_{11} &= \frac{k_3}{k_2} \dot{\beta}_{11}; \\ v_\beta &= \frac{1}{2} (1 - \frac{3k_3}{k_2 + k_3}) = \frac{1}{2} \frac{k_2 - 2k_3}{k_2 + k_3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что это есть мгновенный (дифференциальный) коэффициент Пуассона, т. е. отношение скорости поперечной деформации к скорости продольной деформации со знаком минус. Согласно (19) при $k_3 = 0$, как это видно и непосредственно из (17), $v_\beta = 0,5$. Если $k_3 = 0,5k_2$, то $v_\beta = 0$. Большие значения k_3 , очевидно, недо-

пустимы. Нетрудно убедиться в том, что дифференциальный коэффициент Пуассона нелинейной ползучести совпадает с интегральным:

$$v_\beta = \frac{v_\beta \beta}{\beta} = v_\beta, \quad (19)'$$

что неверно для суммарного коэффициента Пуассона, учитывающего линейную и нелинейную ползучесть (см. ниже).

Постоянные положительные коэффициенты k_1, k_2, k_3 подлежат косвенному определению из опыта. Если предположить, что в момент разрушения скорость ползучести становится бесконечно большой, то согласно (17)

$$k_1 k'_2 = 1. \quad (20)$$

Принимаем это для всего дальнейшего. Соответственно расчетные уравнения (16), (17) приводим к виду

$$\dot{r}_i = -3G \left[\frac{\dot{f}(\sigma_o)}{r_i} + \frac{k_1 \dot{Q}_\alpha}{r_i - \sigma_i} \right]; \quad (21)$$

$$\dot{\beta}_i(t) = k_1 k_2 \frac{\dot{Q}_\alpha}{r_i - \sigma_i}; \quad \dot{\beta}_o = \frac{k_3}{k_2} \dot{\beta}_i. \quad (22)$$

Напомним, что β_o есть объемная деформация, обусловленная повреждением (разрыхлением) материала в процессе деформации формоизменения, поэтому $\beta_o = 0$ при $\beta_i = 0$.

В расчетных формулах (21), (22) осталась неопределенная величина $\dot{Q}_\alpha$ — мощность удельной диссипации энергии в процессе формоизменения при линейной ползучести. Обратимся теперь к установлению этой величины, следуя работе [32]. Полная удельная работа формоизменения равна

$$W_\alpha(t) = \int_0^t \sigma_i(\tau) \dot{\alpha}_i(\tau) d\tau.$$

Часть этой работы выделяется в виде тепла Q_α , а другая часть накапливается в виде потенциальной энергии деформации $U_\alpha(t)$. Вторую часть можно найти как работу при бесконечно медленном нагружении материала. Действительно, при таком нагружении диссипация энергии отсутствует, вся работа переходит в потенциальную энергию, каковая, будучи функцией состояния, не зависит от пути нагружения.

Пусть $\sigma_i(t) = \chi t$, где χ есть бесконечно малая величина (ниже в выкладках индекс i опущен). Тогда при использовании традиционной простейшей меры ползучести (4)'

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sigma(0)C(t) + \int_0^t \dot{\sigma}(\tau)C(t-\tau) d\tau = \\ &= \chi \int_0^t C(t-\tau) d\tau = -\chi \int_t^0 C(\xi) d\xi; \\ \dot{\alpha}(t) &= \chi C(t); \\ U_\alpha(t) &= \int_0^t \sigma_\tau \dot{\alpha}_\tau d\tau = \chi^2 \int_0^t \tau C_\tau d\tau = \\ &= \chi^2 \int_0^\theta \tau C_\tau d\tau + \chi^2 \int_\theta^t \tau C_\infty d\tau = \\ &= \chi^2 \left(\int_0^\theta \tau C_\tau d\tau - C_\infty \frac{\theta^2}{2} \right) + C_\infty \frac{\chi^2 t^2}{2}.\end{aligned}$$

Здесь θ — конечный отрезок времени, за который мера ползучести $C(t)$ успевает «практически» достигнуть своего максимального значения C_∞ . Величина в скобках — конечная, поэтому ее произведение с χ^2 равно нулю. Таким образом, окончательно имеем при бесконечно медленном нагружении

$$U_\alpha(t) = \frac{\sigma_i^2(t)}{2C_\infty^{-1}}.$$

Обратим внимание на аналогию с «упругой» формулой

$$U = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Если принять во внимание, что при бесконечно медленном нагружении во всякий конечный момент времени имеет место предельное состояние $\alpha = \sigma C_\infty$, то станет ясно, что указанная аналогия распространяется и на другие подобные формулы, то есть

$$U_\alpha(t) = \frac{\sigma_i^2(t)}{2C_\infty^{-1}} = \frac{C_\infty^{-1} \alpha_i^2(t)}{2} = \frac{\sigma_i \alpha_i}{2}.$$

Это относится к случаю бесконечно медленного нагружения. Теперь заметим, что потенциальная энергия U_α является функцией состояния системы и, следовательно, не зависит от способа нагружения. При этом полной характеристикой состояния рассматриваемой системы является деформация α_i (но не напряжение σ_i), поэтому именно формула

$$U_\alpha(t) = \frac{C_\infty^{-1} \alpha_i^2(t)}{2} \quad (23)$$

справедлива для произвольного режима нагружения.

Соответственно, мощность рассеяния энергии в α -процессе

$$\dot{Q}_\alpha = \sigma_i \dot{\alpha}_i - \dot{U}_\alpha = (\sigma_i - C_\infty^{-1} \alpha_i) \dot{\alpha}_i. \quad (24)$$

Рис. 1

Формулу для $\dot{Q}_\alpha$ можно получить иначе, воспользовавшись для выражения деформации α_i реологической механической моделью (рис. 1).

Здесь μ — жесткость пружины, λ — вязкость амортизатора. В начальный момент времени вся нагрузка воспринимается вязким элементом, так что $\sigma_i = \lambda \dot{\alpha}_i(0) = \lambda \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_i \dot{C}(0)$, откуда

$$\lambda = \frac{3}{2(1+\nu)\dot{C}(0)}.$$

Диссипация энергии происходит в вязком элементе:

$$\dot{Q}_\alpha = \sigma_\alpha \dot{\alpha}_\alpha = \lambda \dot{\alpha}_\alpha \dot{\alpha}_\alpha = \lambda \frac{4}{9}(1+\nu)^2 \sigma_i^2 \dot{C}^2,$$

окончательно

$$\dot{Q}_\alpha(t) = \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{\dot{C}(0)} \sigma_i^2(t) \dot{C}^2(t). \quad (24)'$$

Формула (24)' оказалась более удобной в применении, чем формула (24), поэтому ниже мы используем именно ее.

На этом построение общего расчетного аппарата теории завершено. В итоге отметим следующее. Величина Π рассматривается как характеристика поврежденности материала, но не как критерий разрушения, т. е. достижение ею некоторого стандартного значения не служит условием разрушения. Решающим фактором здесь является удельный запас упругой энергии формоизменения: чем он выше, тем при меньшей поврежденности материала случится разрушение. Согласно вышеизложенному величины R_i , r_i зависят от шаровой части тензора напряжений, поэтому разрушение вызывается не только девиатором напряжений, но и шаровым напряжением.

Библиографический список

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры

и влажности с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1973. 432 с.

2. Александровский С. В. Об одной интересной форме уравнений теории упруго-ползучего тела // Проблемы ползучести и усадки бетона. М.: Стройиздат, 1974. С. 6–22.

3. Александровский С. В., Васильев П. И. Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. Состояние проблемы и перспективы развития / под ред. С. В. Александровского. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.

4. Александровский С. В., Соломонов В. В. Ползучесть бетона при переменных во времени напряжениях сжатия, достигающих высокого уровня // Проблемы ползучести и усадки бетона. М.: Стройиздат, 1974. С. 33–43.

5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952. 324 с.

6. Арутюнян Н. Х., Александровский С. В. Современное состояние развития теории ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. Состояние проблемы и перспективы развития / под ред. С. В. Александровского. М.: Стройиздат, 1976. С. 5–96.

7. Берг О. Я., Щербаков Е. Н., Писанко Г. Н. Высокопрочный бетон. М.: Стройиздат, 1971. 208 с.

8. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 288 с.

9. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона // Известия ВНИИГ. 1953. Т. 49. С. 83–113.

10. Гвоздев А. А., Яшин А. В., Петрова К. В., Белобров И. К., Гузев Е. А. Прочность, структурные изменения и деформации бетона / под ред. А. А. Гвоздева. М.: Стройиздат, 1978. 299 с.

11. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

12. Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.

13. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2009. 16 с.

14. Катин Н. И. Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях // В сб. НИИЖБ: Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций. Вып. 4. М.: Стройиздат, 1959. С. 74–153.

15. Карапетян К. С. Ползучесть бетона при кручении // Ползучесть строительных материалов и конструкций / под ред. А. Р. Ржаницына. М.: Стройиздат, 1964. С. 25–35.

16. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.

17. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

18. Котов А. А. К теории нелинейной ползучести и длительной прочности бетона // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 133–141.

19. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / пер. с англ. М. И. Рейтмана; под ред. Г. С. Шапиро. М.: Мир, 1974. 338 с.

20. Мамуня Н. У., Ткачук В. М. Ползучесть бетона при двухосном напряженном состоянии // Проблемы ползучести и усадки бетона. Материалы совещания. М.: Стройиздат, 1974. С. 41–47.

21. Маслов Г. Н. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона // Известия ВНИИГ. 1941. Т. 28. С. 175–183.

22. Петров В. И., Бильченко А. В. Экспериментально-теоретические исследования ползучести бетона при двухстороннем сжатии // Проблемы ползучести и усадки бетона. Материалы совещания. М.: Стройиздат, 1974. С. 34–40.

23. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1969. 212 с.

24. Попкова О. М. Экспериментальное исследование нелинейной ползучести стареющего бетона при сжатии // Длительные деформативные процессы в бетонных и железобетонных конструкциях: материалы конф. молодых специалистов / под ред. С. В. Александровского. М.: Стройиздат, 1970. С. 23–37.

25. Прокопович И. Е., Зедгенидзе В. А. Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.

26. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

27. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

28. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

29. Ржаницын А. Р. Разработка основ общей нелинейной теории ползучести / Исследование прочности, пластичности и ползучести строительных материалов: сб. ЦНИИПС / под ред. А. А. Гвоздева. М.: Госстройиздат, 1955. С. 33–44.

30. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.

31. Роцин А. В. Задача о кручении круглого стержня в энергетической теории нелинейной ползучести и длительной прочности // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 142–146.

32. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности нестареющего бетона при сжатии // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 13. Л.: ЛИСИ, 1980. С. 137–148.

33. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (I) // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 14. Л.: ЛИСИ, 1981. С. 11–17.

34. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (II) // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1982. С. 136–141.

35. Харлаб В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов (III) // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 127–132.

36. Харлаб В. Д. Приложение энергетической теории нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов к описанию виброползучести бетона (I) // Расчет строительных конструкций с учетом физической нелинейности материала на статические и динамические нагрузки: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1984. С. 68–73.

37. Харлаб В. Д. Приложение энергетической теории нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов к описанию виброползучести бетона (II) // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1985. С. 128–132.

38. Харлаб В. Д. Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону). СПб.: СПбГАСУ, 2014. 207 с.

39. Яшин А. В. Деформации бетона под длительным воздействием высоких напряжений и его длительное сопротивление при сжатии // Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций: сб. ст. / под ред. А. А. Гвоздева и С. М. Крылова. М.: Стройиздат, 1969. С. 38–76.

References

1. Aleksandrovskiy S. V. *Raschet betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiy na izmeneniya temperatury i vlazhnosti s uchetom polzuchesti* [Calculation of concrete and reinforced concrete structures for changes in temperature and humidity, taking into account creep]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1973, 432 p.

2. Aleksandrovskiy S. V. *Ob odnoy interesnoy forme uravneniy teorii uprugopolzuchego tela* [About an

interesting form of equations of the elastic-creeping body theory]. *Problemy polzuchesti i usadki betona* [Problems of creep and shrinkage of concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, pp. 6–22.

3. Aleksandrovskiy S. V., Vasil'ev P. I. *Ehksperimental'nye issledovaniya polzuchesti betona* [Experimental studies of concrete creep]. *Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruksiy. Sostoyanie problemy i perspektivy razvitiya* [Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures. The present state of the problem and development prospects]. Ed. by Aleksandrovskiy S. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1976, pp. 97–152.

4. Aleksandrovskiy S. V., Solomonov V. V. *Polzuchest' betona pri peremennykh vo vremeni napryazheniyakh szhatiya, dostigayushchikh vysokogo urovnya* [Creep of concrete under variable in time compression stresses reaching a high level]. *Problemy polzuchesti i usadki betona* [Problems of creep and shrinkage of concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, pp. 33–43.

5. Arutyunyan N. Kh. *Nekotorye voprosy teorii polzuchesti* [Some issues of the creep theory]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1952, 324 p.

6. Arutyunyan N. Kh., Aleksandrovskiy S. V. *Sovremennoe sostoyanie razvitiya teorii polzuchesti betona* [The present state of the concrete creep theory development]. *Polzuchest' i usadka betona i zhelezobetonnykh konstruksiy. Sostoyanie problemy i perspektivy razvitiya* [Creep and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures. The present state of the problem and development prospects]. Ed. by Aleksandrovskiy S. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1976, pp. 5–96.

7. Berg O. Ya., Shcherbakov E. N., Pisanko G. N. *Vysokoprochnyy beton* [High-strength concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1971, 208 p.

8. Bugakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov* [Creep of polymeric materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 288 p.

9. Vasil'ev P. I. *Nekotorye voprosy plasticheskikh deformatsiy betona* [Some issues concerning plastic deformation of concrete]. *Izvestiya VNIIG – Bulletin of VNIIG*, 1953, vol. 49, pp. 83–113.

10. Gvozdev A. A., et al. *Prochnost', strukturnye izmeneniya i deformatsii betona* [Strength, structural changes and deformation of concrete]. Ed. by Gvozdev A. A. Moscow, Stroyizdat Publ., 1978, 299 p.

11. Gol'denblat I. I., Kopnov V. A. *Kriterii prochnosti i plastichnosti konstruksionnykh materialov* [Criteria of strength and plasticity of structural materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 192 p.

12. Gol'denblat I. I., Bazhanov V. L., Kopnov V. A. *Dlitelnaya prochnost' v mashinostroenii* [Long-term

strength in engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 248 p.

13. Gur'eva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Simplified theory of nonlinear creep of non-aging concrete in compression. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2009, 16 p.

14. Katin N. I. *Issledovanie polzuchesti betona pri vysokikh napryazheniyakh* [Study concrete creep at high stresses]. *Sb. trudov NIIZhB «Issledovanie svoystv betona i zhelezobetonnykh konstruksiy»* [Coll. works NIIZhB "Study of properties of concrete and concrete structures"]. Iss. 4. Moscow, Stroyizdat Publ., 1959, pp. 74–153.

15. Karapetyan K. S. *Polzuchest' betona pri kruchenii* [Creep of concrete at torsion]. *Polzuchest' stroitel'nykh materialov i konstruksiy* [Creep of building materials and structures]. Ed. by Rzhantsyn A. R. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964, pp. 25–35.

16. Kachanov L. M. *Teoriya polzuchesti* [The theory of creep]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 456 p.

17. Kachanov L. M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 420 p.

18. Kotov A. A. *K teorii nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti betona* [To the theory of nonlinear creep and long-term strength of concrete]. *Temat. sb. tr. Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruksiy* [Thematic coll. works "Studies on the theoretical foundations of the calculation of building structures"]. Leningrad, LISI Publ., 1983, pp. 133–141.

19. Kristensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti* [Introduction to the theory of viscous elasticity]. Transl. from English by Reytmann M. I.; ed. by Shapiro G. S. Moscow, Mir Publ., 1974, 338 p.

20. Mamunya N. U., Tkachuk V. M. *Polzuchest' betona pri dvukhosnom napryazhenom sostoyanii* [Creep of concrete at biaxial stress state]. *Problemy polzuchesti i usadki betona* [Problems of creep and shrinkage of concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, pp. 41–47.

21. Maslov G. N. *Termicheskoe napryazhennoe sostoyanie betonnykh massivov pri uchete polzuchesti betona* [Thermal stress state of concrete blocks taking into account concrete creep]. *Izvestiya VNIIG – Bulletin of VNIIG*, 1941, vol. 28, pp. 175–183.

22. Petrov V. I., Bil'chenko A. V. *Ehksperimental'no-teoreticheskie issledovaniya polzuchesti betona pri dvukhsbornom szhatii* [Experimental and theoretical studies of creep of concrete under bilateral compression]. *Problemy polzuchesti i usadki betona* [Problems of creep and shrinkage of concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, pp. 34–40.

23. Pisarenko G. S., Lebedev A. A. *Soprotivlenie materialov deformirovaniyu i razrusheniyu pri slozhnom napryazhenom sostoyanii* [Resistance of materials to

deformation and destruction at complex stress state]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1969, 212 p.

24. Popkova O. M. *Ehksperimental'noe issledovanie nelineynoy polzuchesti stareyushchego betona pri szhatii* [Experimental study of nonlinear creep of aging concrete under compression]. *Trudy konf. molodykh spetsialistov «Dlitel'nye deformativnye protsessy v betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksiyakh»* [Proc. of the conf. of young professionals "Long-term deformation processes in concrete and reinforced concrete structures"]. Ed. by Aleksandrovskiy S. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1970, pp. 23–37.

25. Prokopovich I. E., Zedgenidze V. A. *Prikladnaya teoriya polzuchesti* [Applied theory of creep]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1980, 240 p.

26. Rabotnov Yu. N. *Polzuchest' ehlementov konstruksiy* [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 752 p.

27. Rabotnov Yu. N. *Ehlementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solid bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 384 p.

28. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid body]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 712 p.

29. Rzhantsyn A. R. *Razrabotka osnov obshchey lineynoy teorii polzuchesti* [Development of the basics of the general linear theory of creep]. *Sb. trudov TsNIIPS «Issledovanie prochnosti, plastichnosti i polzuchesti stroitel'nykh materialov»* [Coll. works TsNIIPS "Study of strength, plasticity and creep of building materials"]. Ed. by Gvozdev A. A. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1955, pp. 33–44.

30. Rzhantsyn A. R. *Teoriya polzuchesti* [The theory of creep]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1968, 416 p.

31. Roshchin A. V. *Zadacha o kruchenii kruglogo sterzhnya v ehnergeticheskoy teorii nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti* [Problem of the round-shaped rod torsion in the energy theory of nonlinear creep and long-term strength]. *Sb. tr. «Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruksiy»* [Coll. works "Studies on the theoretical foundations of the calculation of building structures"]. Leningrad, LISI Publ., 1983, pp. 142–146.

32. Kharlab V. D. *Ehnergeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti nestareyushchego betona pri szhatii* [Energy theory of nonlinear creep and long-term strength of non-aging concrete in compression]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. «Mekhanika sterzhnevnykh sistem i sploshnykh sred»* [Int. thematic coll. works "Mechanics of rod systems and continuous media"]. Iss. 13. Leningrad, LISI Publ., 1980, pp. 137–148.

33. Kharlab V. D. *Ehnergeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (I)* [Energy theory

of nonlinear creep and long-term strength of brittle materials (I)]. *Sb. tr. «Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred»* [Coll. works "Mechanics of rod systems and continuous media"]. Iss. 14. Leningrad, LISI Publ., 1981, pp. 11–17.

34. Kharlab V. D. *Ehnergeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (II)* [Energy theory of nonlinear creep and long-term strength of brittle materials (II)]. *Sb. tr. «Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruktsiy»* [Coll. works "Studies on the theoretical basics of calculating building structures"]. Leningrad, LISI Publ., 1982, pp. 136–141.

35. Kharlab V. D. *Ehnergeticheskaya teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov (III)* [Energy theory of nonlinear creep and long-term strength of brittle materials (III)]. *Sb. tr. «Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruktsiy»* [Coll. works "Studies on the theoretical basics of calculating building structures"]. Leningrad, LISI Publ., 1983, pp. 127–132.

36. Kharlab V. D. *Prilozhenie ehnergeticheskoy teorii nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov k opisaniyu vibropolzuchesti betona (I)* [Application of the energy theory of nonlinear creep and long-term strength of brittle materials to the description of concrete vibration creep (I)]. *Sb. tr. «Raschet stroitel'nykh konstruktsiy s uchetom fizicheskoy nelineynosti materiala na staticheskie*

i dinamicheskie nagruzki» [Coll. works "Calculation of building structures taking into account the physical nonlinearity of the material on static and dynamic loads"]. Leningrad, LISI Publ., 1984, pp. 68–73.

37. Kharlab V. D. *Prilozhenie ehnergeticheskoy teorii nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti khrupko razrushayushchikhsya materialov k opisaniyu vibropolzuchesti betona (II)* [Application of the energy theory of nonlinear creep and long-term strength of brittle materials to the description of concrete vibration creep (II)]. *Sb. tr. «Issledovaniya po mekhanike stroitel'nykh konstruktsiy i materialov»* [Coll. works "Studies on the mechanics of building structures and materials"]. Leningrad, LISI Publ., 1985, pp. 128–132.

38. Kharlab V. D. *Printsipial'nye voprosy lineynoy teorii polzuchesti (s privyazkoy k betonu)* [Fundamental questions of linear creep theory (concerning concrete)]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2014, 207 p.

39. Yashin A. V. *Deformatsii betona pod dlitel'nym vozdeystviem vysokikh napryazheniy i ego dlitel'noe soprotivlenie pri szhatii* [Deformation of concrete under the long-term impact of high stresses and its long-term resistance to compression]. *Sb. trudov «Osobennosti deformatsiy betona i zhelezobetona i ispol'zovanie EhVM dlya otsenki ikh vliyaniya na povedenie konstruktsiy»* [Coll. works "Features of deformation of concrete and reinforced concrete and the use of computers to assess their impact on the behavior of structures"]. Eds. Gvozdev A. A., Krylov S. M. Moscow, Stroyizdat Publ., 1969, pp. 38–76.