УДК 539.3

© Л. М. Казан-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-3-29-35

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

УТОЧНЕНИЕ МЕТОДОВ УЧЕТА СДВИГОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОГИБОВ И СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

IMPROVEMENT OF METHODS FOR SHEAR ACCOUNTING IN CALCULATION OF DEFLECTIONS AND NATURAL FREQUENCIES OF ELASTIC RODS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

В изгибаемых стержнях переменного сечения касательные напряжения в поперечном сечении зависят не только от поперечной силы, но и от изгибающего момента. Существующие методы вычисления прогибов с учетом сдвигов учитывают переменность сечения, объявляя изгибную и сдвиговую жесткости зависящими от координаты сечения. Такой подход не принимает во внимание влияние изгибающего момента на касательные напряжения. Предлагаемая работа исправляет указанный недостаток теории, вносит соответствующие уточнения в формулу Максвелла–Мора и в теорию балки Тимошенко. Уточненные формулы применяются к вычислению прогибов и собственных частот короткой консоли. В рассмотренных примерах поправки за счет сдвига, вычисленные по новым формулам, изменились в 1–1,5 раза, в зависимости от степени переменности сечения.

Ключевые слова: учет сдвигов, прогибы, собственные частоты, стержни переменного сечения.

In bent rods with variable cross-section, shear stress in the cross-section depends not only on the shear force, but also on the bending moment. Existing methods to calculate deflections with regards of shear take variability of the section into account, assuming bending stiffnesses and shear stiffnesses dependant on coordinate. Such approach neglects the effect of the bending moment on the shear stress. The proposed article corrects this deficiency, introduces required improvements into the Maxwell–Mohr formula and into the Timoshenko beam theory. The improved formulas are applied to calculation of deflections and natural frequencies of a short cantilever. In the examples considered corrections due to shear calculated by means of the new formulas change in 1–1,5 times, depending on the degree of cross-section variability.

Keywords: account of shear, deflections, natural frequencies, rods with variable cross-section.

Как известно, сдвиговые деформации заметно влияют на прогиб короткого упругого стержня. Это влияние учитывают формула Максвелла–Мора и теория балки Тимошенко. Оба подхода оперируют понятием коэффициента сдвига k . Коэффициент k формулы Максвелла–Мора вычисляется из энергетических соображений по известным касательным напряжениям в поперечном сечении изгибаемого стержня. Обще-

принятый способ вычисления коэффициента k второго подхода до сих пор отсутствует. Оба коэффициента считаются одинаковыми у стержней постоянного и переменного сечений при одной и той же форме сечения.

Касательные напряжения в балке постоянного сечения зависят только от поперечной силы, в балке переменного сечения — от поперечной силы и от изгибающего момента. Существующая

теория последнюю особенность не принимает во внимание. Предлагаемая работа исправляет этот недостаток, уточняя оба известных способа учета сдвигов. Уточнение представляет интерес для расчета машиностроительных и строительных конструкций, в которых используются короткие стержни переменного сечения.

Немного истории. В начале XX века теория вычисления перемещений в статических задачах расчета упругих стержней приняла свой завершенный вид. Было показано [1], что два разных подхода к вычислению, подход Максвелла и Мора [3, 4] и подход Кастильяно [5], приводят к одной и той же формуле¹

$$w = \int_{(L)} \frac{N_1 N_p}{EA} dx + \int_{(L)} \frac{M_1 M_p}{EI} dx + \int_{(L)} \frac{\kappa Q_1 Q_p}{GA} dx. \quad (1)$$

Подход Кастильяно дополнительно дает способ вычисления коэффициента κ [1]:

$$\kappa = \frac{A}{Q^2} \iint_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) dA. \quad (2)$$

В начале XX века влияние переменности сечения на касательные напряжения известно не было. Коэффициенты κ для простейших сечений были вычислены по формулам для τ_{xz} , τ_{xy} призматического стержня [2, с. 8 русскоязычного издания], для круглого сечения получено $\kappa = \frac{32}{27}$. Саму формулу (1) с зависящим только от формы сечения коэффициентом κ применяли и к стержням переменного сечения [2]. Автору статьи не известны современные работы, в которых такое применение формулы ставится под сомнение.

Другой способ учета сдвигов восходит к работам Тимошенко [8, 9], посвященным колебаниям стержней. Способ представляет угол поворота θ поперечного сечения стержня суммой слагаемых θ_n , θ_c , обусловленных изгибом и сдвигом: $\theta = \theta_n + \theta_c$. Пропорциональность между θ_c и Q постулируется. Результатом являются уравнения

$$w = w_n + w_c; \quad w_n'' = -M/EI; \quad w_c' = \kappa Q/GA, \quad (3)$$

в которых κ — просто коэффициент пропорциональности.

¹ В формуле опущены слагаемые, учитывающие податливость опорных связей. Абсолютная жесткость связей понимается в энергетическом смысле, а именно, работа опорных сопротивлений при деформации системы приравнивается к нулю.

² В современных учебниках [6, 7] коэффициент вычисляется с учетом только составляющей τ_{xz} , что для круглого сечения дает $\kappa = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$.

До сих пор применяются три способа вычисления коэффициента κ формулы (3), которые дают разные результаты: сравнивают сдвиг, вызванный касательными напряжениями, равномерно и неравномерно распределенными по сечению [10]; анализируют энергию деформации [11]; сопоставляют частоты колебаний, вычисленные точно методами теории упругости и по приближенной технической теории [9]. Дополнительные сведения о состоянии вопроса можно почерпнуть, например, в работе [12].

Учет переменности сечения на основе подхода Кастильяно. Без каких-либо изменений повторяется подход, известный в начале XX века, но учитывается зависимость касательных напряжений от изгибающего момента.

Рассматриваются прямолинейные стержни моносимметричного сечения, в которых размеры всех поперечных сечений пропорционально изменяются вдоль оси. Соответствующие формулы для касательных напряжений в массивных стержнях получены в работе [13]:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^0}{b I_y} + \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z^2 - \frac{S_y^0}{b} \right); \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{b'_z}{b} \frac{Q_z S_y^0}{b I_y} y + \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z - \frac{b'_z S_y^0}{b^2} \right) y. \quad (5)$$

Здесь s — расстояние с учетом знака от сечения до точки оси, в которой пересекаются плоскости, касающиеся наружной поверхности в точках контура сечения: $s = h/h'$; h — высота сечения, точнее, длина отрезка оси z , находящегося внутри сечения; h' — производная от h по x . Традиционные обозначения не разъясняются. Формула (5) содержит производную b'_z ширины сечения b по вертикальной координате z , по этой причине она справедлива для сечений с плавно изменяющимся контуром. В работе [13] представлены также формулы для окружного τ_θ и радиального τ_r касательных напряжений при изгибе стержня с сечением в виде тонкостенного кольца.

Вычисляется обусловленная сдвигом погонная энергия u упругой деформации

$$u = \frac{1}{2G} \iint_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2) dA = \frac{1}{2G} \iint_A (\tau_r^2 + \tau_\theta^2) dA = \frac{1}{2GA} (\kappa_0 Q^2 + \kappa_1 \frac{M^2}{s^2} + \kappa_2 Q \frac{M}{s}) \quad (6)$$

и энергия $U = \int_L u dx$ упругой деформации стержня.

Для массивного стержня зависящие только от формы сечения коэффициенты $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ таковы:

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= \frac{A}{I^2} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{S_y^2}{b} \left(1 + \frac{b_z'^2}{12}\right) dz; \\ \kappa_1 &= \frac{A}{I^2} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left[\left(z^2 - \frac{S_y^0}{b}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(zb - b_z' \frac{S_y^0}{b}\right)^2 \right] b dz; \quad (7) \\ \kappa_2 &= 2 \frac{A}{I^2} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left[\left(z^2 - \frac{S_y^0}{b}\right) + \frac{b_z'}{12} \left(zb - b_z' \frac{S_y^0}{b}\right) \right] S_y^0 dz.\end{aligned}$$

Значения $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ для трех простейших сечений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Сечение	κ_0	κ_1	κ_2
Круг	32/27	80/27	-40/27
Тонкостенное кольцо*	2	4	-4
Прямоугольник $b \times h$	6/5	$9/5 + (b/h)^2$	-6/5

* Вычислены по формулам для τ_θ, τ_r работы [15].

Далее вводится обобщенная сила F , отвечающая отыскиваемому обобщенному перемещению w , усилия Q, M вычисляются от совместного действия нагрузки P и силы F , применяется теорема Кастильяно $w = \partial U / \partial F$, а сила F устремляется к нулю. Для стержневой системы с жесткими опорными связями имеем:

$$\begin{aligned}w &= \int_L \frac{M_1 M_p}{EI} dx + \kappa_0 \int_L \frac{Q_1 Q_p}{GA} dx + \kappa_1 \int_L \frac{1}{s^2} \frac{M_1 M_p}{GA} dx + \\ &+ \kappa_2 \int_L \frac{1}{s} \frac{(Q_1 M_p + Q_p M_1) / 2}{GA} dx.\end{aligned} \quad (8)$$

Напомним, что предполагается подобное изменение размеров сечений вдоль оси каждого стержня.

Придадим уравнению (8) более компактный вид. Обозначая

$$\frac{1}{EI_{\text{пр}}} = \frac{1}{EI} + \kappa_1 \frac{1}{s^2} \frac{1}{GA},$$

получаем

$$\begin{aligned}w &= \int_L \frac{M_1 M_p}{EI_{\text{пр}}} dx + \kappa_0 \int_L \frac{Q_1 Q_p}{GA} dx + \\ &+ \kappa_2 \int_L \frac{1}{s} \frac{(Q_1 M_p + M_1 Q_p) / 2}{GA} dx.\end{aligned} \quad (9)$$

Перемещение, возникающее при одновременном действии изгибающего момента M и попе-

речной силы Q , представлено суммой трех слагаемых. Первое слагаемое определяет перемещение за счет M в отсутствие Q , учитывая влияние касательных напряжений. Второе слагаемое дает вклад Q в отсутствие M , совпадает с соответствующим слагаемым формулы Максвелла–Мора. Действия M и Q нельзя просто суммировать, так как имеется взаимное влияние, учитываемое третьим слагаемым.

Результат (9) удобно представить еще в одной форме, в виде суммы слагаемых, обусловленных взаимным поворотом и взаимным сдвигом сечений:

$$\begin{aligned}w &= w_H + w_c; \\ w_H &= \int_L \frac{M_1 M_p}{EI_{\text{пр}}} dx + \kappa_2 \int_L \frac{1}{2s} \frac{M_1 Q_p}{GA} dx; \\ w_c &= \kappa_0 \int_L \frac{Q_1 Q_p}{GA} dx + \kappa_2 \int_L \frac{1}{2s} \frac{Q_1 M_p}{GA} dx.\end{aligned} \quad (10)$$

Особенности представленных формул иллюстрируются примерами.

Пример 1. Поперечный изгиб консоли. Тонкостенная коническая труба со стенкой постоянной толщины изгибается силой P , приложенной к торцу (рис. 1). Радиус стержня в текущем сечении $R(x) = R_0(1 - kx/l)$, множитель $1/s = k/(l - kx)$. Вычисления проделаны для трубы при $R_0/l = 0,1$, конусность трубы $k = 1 - R_1/R_0$ является параметром. Для сравнения перемещения за счет M и Q вычислены и по традиционным формулам:

Рис. 1

Рис. 2

$$w_0^M = \int_0^l \frac{P(1-x)^2}{EI} dx; w_0^Q = \kappa_0 \int_0^l \frac{P}{GA} dx.$$

Рис. 2 сопоставляет дополнительный прогиб за счет сдвигов $w^Q = w - w_0^M$, вычисленный по предлагаемой теории, с величиной w_0^Q . Видим большое различие, причем стержень переменного сечения оказывается более жестким. Понять полученный результат помогают эпюры дополнительных касательных напряжений τ_r, τ_θ^M , показанные на рис. 3, который взят из работы [13]: напряжения τ_r направлены вдоль радиуса, окружные напряжения τ_θ^M направлены противоположно напряжениям τ_θ в стержне постоянного сечения, за счет этого стержень и оказывается более жестким.

Рис. 4 сравнивает вклад изгиба и сдвигов в перемещения. Видим, что в коротких стержнях вклад сдвигов заметен, а уточнение теории оправданно.

Пример 2. Чистый изгиб консоли. Прогибы правого торца при изгибе консоли (рис. 1) моментом m , приложенным на торце, согласно предлагаемой теории и формуле Максвелла — Мора таковы:

$$w = m \left(\int_0^l \frac{1-x}{EI_{\text{пр}}} dx + \kappa_2 \int_0^l \frac{1}{2s} \frac{1}{GA} dx \right); w_0 = m \int_0^l \frac{1-x}{EI} dx.$$

Рис. 3

Рис. 4

Для трубы рис. 1 параметр $s < 0$, так что слабые в предлагаемой формуле для w имеют разные знаки.

Зависимость величины $\Delta w / w_0 = 1 - w / w_0$ от конусности $k = 1 - R_1 / R_0$ показана на рис. 5. Принято $R_0 / l = 0,1$. Наблюдаем небольшое увеличение жесткости, не превышающее 1,5 %. При $k \rightarrow 1$ относительная поправка $\Delta w / w_0$ становится пренебрежимо малой, что связано с ростом w_0 . Абсолютная же поправка Δw растет монотонно вместе с k .

Пример 3. Консоль под действием собственного веса. Пусть w_0^M, w_0^Q — прогибы, вычисленные по традиционной формуле Максвелла—Мора для консоли (рис. 1), нагруженной собственным весом. $w^Q = w - w_0^M$ — прогиб, обусловленный сдвигами, вычисленный по формулам предлагаемой теории. Графики зависимостей w_0^Q / w_0^M , w^Q / w_0^M (кривые 1 и 2 соответственно) от конусности k представлены на рис. 6, принято $R_0 / l = 0,1$. Видим две различные зависимости, причем формула Максвелла—Мора завышает перемещения за счет сдвигов.

Учет переменности сечения при подходе Тимошенко. Строим дифференциальные уравнения изгиба, опираясь на результат (10). Так как дифференциальные уравнения не могут зависеть от типа закрепления стержня, применяем (10)

Рис. 5

Рис. 6

к консоли. Помещая начало координат в защемлении, вычисляем прогиб в произвольном сечении x : $M_1(x, \bar{x}) = -(x - \bar{x})$, $Q_1(x, \bar{x}) = 1$ при $\bar{x} < x$, иначе $M_1 = Q_1 = 0$. Опуская индекс «р», отмечающий усилия вследствие нагрузки, для прогиба в произвольном сечении x имеем:

$$w_{\text{и}} = -\int_0^x \frac{(x - \bar{x})M}{EI_{\text{пр}}} d\bar{x} - \kappa_2 \int_0^x \frac{1}{2s} \frac{(x - \bar{x})Q}{GA} d\bar{x};$$

$$w_{\text{с}} = \kappa_0 \int_0^x \frac{Q}{GA} d\bar{x} + \kappa_2 \int_0^x \frac{1}{2s} \frac{M}{GA} d\bar{x}.$$

Дифференцируя по x , находим углы поворота сечений:

$$\frac{dw_{\text{и}}}{dx} = -\left(\int_0^x \frac{M}{EI_{\text{пр}}} d\bar{x} + \kappa_2 \int_0^x \frac{1}{2s} \frac{Q}{GA} d\bar{x}\right);$$

$$\frac{dw_{\text{с}}}{dx} = \kappa_0 \frac{Q}{GA} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{M}{GA}.$$

Дифференцируя $dw_{\text{и}}/dx$ еще раз, получаем два уравнения, определяющие перемещение $w = w_{\text{и}} + w_{\text{с}}$:

$$\frac{d^2 w_{\text{и}}}{dx^2} = -\left(\frac{M}{EI_{\text{пр}}} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{Q}{GA}\right); \quad (11)$$

$$\frac{dw_{\text{с}}}{dx} = \kappa_0 \frac{Q}{GA} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{M}{GA}. \quad (11')$$

Уравнения (11) отличаются от уравнений (2) для балки Тимошенко в первую очередь тем, что оба перемещения $w_{\text{и}}$, $w_{\text{с}}$ зависят от M и от Q . Вторым отличием является определенность коэффициентов κ_0 , κ_1 , κ_2 , они заданы формулами (7).

Не станем приводить уравнения (11) к одному уравнению более высокого порядка, так как появляются производные от жесткостей и дополнительные трудности в работе со ступенчатыми стержнями.

Примененный способ построения дифференциальных уравнений определяет также вид кинематических граничных условий, а именно: граничные условия в опорах, энергия деформации которых равна нулю, должны соответствовать уравнениям (10). Когда защемление или шарнирная опора находятся в начале координат, вызванные единичной силой усилия $M_1 = Q_1 = 0$, так что для обоих типов закрепления перемещение $w_{\text{с}}$ в точке опоры подчиняем одному и тому же граничному условию $w_{\text{с}} = 0$.

Заметим, что теория балки Тимошенко не содержит указаний относительно корректного вида граничных условий. В результате в отдельных пу-

бликациях используются условия, которые приводят к зависимости перемещений от последовательности приложения сил. Здесь укажем лишь работу самого Тимошенко [14], в которой применяется условие такого вида, и сошлемся на работу [15], где вопрос рассматривается подробнее.

Собственные колебания весоного стержня.

Применим уравнения (11) к задаче о собственных колебаниях стержня, отождествляя распределенную массу с массой самого стержня. Частоты колебаний вычисляем, учитывая инерцию поворота поперечных сечений.

Рассматриваем перемещения вида $w = W(x) \sin(\omega t)$. Амплитуду W представляем суммой составляющих $W_{\text{и}}$, $W_{\text{с}}$, подчиненных уравнениям (11), (11').

Амплитуды интенсивностей инерционных силы и момента

$$q = \omega^2 \rho A W; \quad m = \omega^2 \rho I W'$$

и амплитуды усилий M , Q удовлетворяют дифференциальным зависимостям

$$M' = Q + m; \quad Q' = -q; \quad M'' = -q + m'. \quad (12)$$

Учитывая, что

$$m' = \omega^2 \rho (I W'' + I' W');$$

$$W_{\text{с}}'' = \kappa_0 \frac{-\omega^2 \rho A W}{GA} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{M'}{GA} - \frac{A'}{GA^2} (\kappa_0 Q + \kappa_2 \frac{1}{2s} M);$$

$$W'' = -\frac{M}{EI_{\text{пр}}} - \frac{1}{GA} \left[\kappa_2 \frac{Q - M'}{2s} + \kappa_0 \omega^2 \rho A W + \frac{A'}{A} (\kappa_0 Q + \kappa_2 \frac{M}{2s}) \right],$$

получаем связь M , Q и W :

$$M'' = -\omega^2 \rho A W - \omega^2 \rho I \Psi - \kappa_0 \frac{\omega^4 \rho^2 I}{G} W; \quad (13)$$

$$Q' = -\rho A \omega^2 W. \quad (13')$$

Здесь

$$\Psi = \frac{M}{EI_{\text{пр}}} + \frac{1}{GA} \left[\kappa_2 \frac{Q - M'}{2s} + \frac{A'}{A} (\kappa_0 Q + \kappa_2 \frac{M}{2s}) \right] - \frac{I'}{I} W'.$$

Составляющие прогиба $W = W_{\text{и}} + W_{\text{с}}$ удовлетворяют уравнениям

$$W_{\text{и}}'' = -\left(\frac{M}{EI_{\text{пр}}} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{Q}{GA}\right); \quad (14)$$

$$W_{\text{с}}' = \kappa_0 \frac{Q}{GA} + \kappa_2 \frac{1}{2s} \frac{M}{GA}. \quad (14')$$

Когда инерция поворота поперечных сечений не учитывается, $Q = M'$, уравнение (13) принимает вид

$$M'' = -\omega^2 \rho A W, \quad (13'')$$

а уравнение (13') становится ненужным.

Таблица 2

Учет сдвигов инерции поворота		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
$k = 0,5$				
$\frac{0}{0}$		3,82378	18,3173	47,2648
$\frac{1}{0}$	Балка Тимошенко	3,63217	14,7584	31,9430
$\frac{1}{0}$	Формулы (15)	3,69491	14,93793	32,12297
$\frac{1}{1}$		3,70111	14,84884	31,16322
$k = 0,75$				
$\frac{0}{0}$		4,17659	16,1843	38,7750
$\frac{1}{0}$	Балка Тимошенко	3,97993	13,7201	28,6445
$\frac{1}{0}$	Формулы (15)	4,06518	13,97041	28,93551
$\frac{1}{1}$		4,07336	13,91254	28,41977

Для удобства численного решения вводим безразмерную координату $\bar{x} = x/l$, обозначаем $A(x) = A_0 a(x)$, $I(x) = I_0 i(x)$, $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}} l^2 \omega$, вводим величину $\bar{W}(x) = EI_0 W(x)/l^2$, имеющую размерность момента. В таких обозначениях система (13), (14) принимает вид

$$M'' = -\bar{\omega}^2 a \bar{W} - \bar{\omega}^2 t \left\{ \frac{iM}{i_{\text{пр}}} + \frac{E}{G} t \frac{i}{a} \left[\kappa_2 \frac{Ql - M'}{2s/l} + \frac{a'}{a} (\kappa_0 Ql + \kappa_2 \frac{M}{2s/l}) \right] - i' \bar{W}' \right\} - \kappa_0 \frac{E}{G} t^2 i \bar{\omega}^4 \bar{W};$$

$$Q' = -\bar{\omega}^2 a \bar{W}; \quad (15)$$

$$\bar{W}_n'' = -\left(\frac{M}{i_{\text{пр}}} + \kappa_2 \frac{1}{2s/l} \frac{E}{G} t \frac{Ql}{a} \right);$$

$$\bar{W}_c' = \kappa_0 t \frac{E}{G} \frac{Ql}{a} + \kappa_2 \frac{1}{2s/l} t \frac{E}{G} \frac{M}{a}.$$

Здесь

$$t = \frac{I_0}{l^2 A_0}; \quad \frac{1}{i_{\text{пр}}} = \frac{1}{i} + \kappa_1 \frac{1}{(s/l)^2} \frac{EI_0}{l^2 G A_0} \frac{1}{a}.$$

Пример 4. Вычисляются частоты колебаний консоли примера 1. Применяется предложенный в [15] способ вычисления, а именно, частоты $\bar{\omega}$ отыскиваются прямым интегрированием дифференциальных уравнений (15) относительно неизвестных $\bar{W}_n$, $\bar{W}_c$, M , Q . Уравнения подчинены следующим граничным условиям:

$$\bar{W}_n(0) = 0; \bar{W}_n'(0) = 0; \bar{W}_c(0) = 0; M(1) = 0; Q(1) = 0;$$

$$M'(1) = ti(1)W_n'(1). \quad (16)$$

Последнее граничное условие получается следующим образом. Используется дифференциальная зависимость $M' = Q + m$, в которой $m = \omega^2 \rho I_0 i(W_n' + W_c')$. На верхнем торце $M = Q = 0$, поэтому согласно (14') $W_c' = 0$. В результате $M' = \omega^2 \rho I_0 i W_n'$, остается перейти к новым обозначениям.

Имеем однородную краевую задачу, $\bar{\omega}$ — ее собственные значения.

Исходная задача заменяется вспомогательной неоднородной задачей для уравнений (15), в которой последнее условие (16) заменено:

$$\bar{W}_n(0) = 0; \bar{W}_n'(0) = 0; \bar{W}_c(0) = 0; M(1) = 0; Q(1) = 0;$$

$$M(0) = 1.$$

Дифференциальные уравнения вспомогательной задачи интегрируются средствами Mathcad. Частоты $\bar{\omega}$ являются параметрами задачи, находятся из отброшенного граничного условия

$$M'(1) = ti(1)W_n'(1).$$

(Для цилиндрической трубы, когда сдвиги и инерция поворота сечений не учитываются, точные частоты $\bar{\omega}$ являются корнями уравнения $\text{ch}(\sqrt{\bar{\omega}})\cos(\sqrt{\bar{\omega}})+1=0$. Применяемый прием вычисления частоты в этом случае дает десять верных значащих цифр.)

Вычисления проделаны при двух значениях конусности $k = 1 - R_1 / R_0$ для трубы $R_0 / l = 0,1$.

Результаты вычислений, учитывающих и не учитывающих сдвиги и инерцию поворота сечений, представлены в табл. 2. Дробь в первом столбце таблицы указывают, учитывается или нет соответствующий фактор (1 — да, 0 — нет).

В представленном примере учет сдвигов по формулам (15) изменяет добавку к частоте за счет сдвигов ориентировочно в 1,5 раза. Учет инерции поворота сечений изменяет результат незначительно.

Библиографический список

1. Müller-Breslau H. Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Band II. Part 1. Leipzig, 1898. (Издано на русском: Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. Т. 2, ч. 1. СПб.: К. Л. Риккер, 1910. 452 с.)
2. Müller-Breslau H. Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Band II. Part 2. Leipzig, 1898. (Издано на русском: Мюллер-Бреслау Г. Графическая статика сооружений. Т. 2, ч. 2. СПб.: К. Л. Риккер, 1913. 674 с.)

3. Maxwell J. C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames // *Philosophical magazine*. 1864. Vol. 27 (182). Pp. 294–299.

4. Mohr C. O. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*. 1874. Vol. 20. S. 509–526.

5. Castigliano A. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin: A.F. Negro, 1879. 480 p.

6. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Наука, 1977. 456 с.

7. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. М.: Наука, 1978. Т. 2. 616 с.

8. Timoshenko S. P. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars // *Philosophical magazine*. 1921. Series 6, Vol. 41, Issue 245. Pp. 744–746.

9. Timoshenko S. P. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section // *Philosophical magazine*. 1922. Series 6, Vol. 43, Issue 253. Pp. 125–131.

10. Cowper G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory // *Journal of Applied Mechanics*. 1966. Vol. 33, No. 2. Pp. 335–340.

11. Renton J. D. Generalized Beam Theory Applied to Shear Stiffness // *International Journal of Solids and Structures*. 1991. Vol. 27, Issue 15. Pp. 1955–1967.

12. Steinboeck A., Kugi A., Mang H. A. Energy-consistent shear coefficients for beams with circular cross sections and radially inhomogeneous materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, No 11–12. Pp. 1859–1868.

13. Каган-Розенцвейг Л. М. О касательных напряжениях при изгибе упругого стержня переменного сечения // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 2 (73). С. 43–47.

14. Тимошенко С. П., Gere Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

15. Каган-Розенцвейг Л. М. Метод вычисления частот собственных колебаний упругих стержней прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 1 (72). С. 61–66.

References

1. Müller-Breslau H. *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. Band II. Part 1. Leipzig, 1898. (Russian edition: Myuller-Breslau G. *Graficheskaya statika sooruzheniy* [Graphical statics of building constructions]. Vol. 2, pt. 1. St. Petersburg, K. L. Rikker Publ., 1910, 452 p.

2. Müller-Breslau H. *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. Band II. Part 2. Leipzig, 1898. (Russian edition: Myuller-Breslau G. *Graficheskaya statika*

sooruzheniy [Graphical statics of building constructions]. Vol. 2, pt. 2. St. Petersburg, K. L. Rikker Publ., 1913, 674 p.

3. Maxwell J. C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *Philosophical magazine*, 1864, vol. 27 (182), pp. 294–299.

4. Mohr C. O. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. *Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 1874, vol. 20, pp. 509–526.

5. Castigliano A. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin, A.F. Negro, 1879, 480 p.

6. Gastev V. A. *Kratkiy kurs soprotivleniya materialov* [A brief course on the strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.

7. Filin A. P. *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela: soprotivlenie materialov s ehlementami teorii sploshnykh sred i stroitel'noy mekhaniki* [Applied mechanics of solid deformable bodies: resistance of materials with elements of the theory of continuous media and structural mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, vol. 2, 616 p.

8. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical magazine*, 1921, ser. 6, vol. 41, iss. 245, pp. 744–746.

9. Timoshenko S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical magazine*, 1922, ser. 6, vol. 43, iss. 253, pp. 125–131.

10. Cowper G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 335–340.

11. Renton J. D. Generalized beam theory applied to shear stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, vol. 27, iss. 15, pp. 1955–1967.

12. Steinboeck A., Kugi A., Mang H. A. Energy-consistent shear coefficients for beams with circular cross sections and radially inhomogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, no 11–12, pp. 1859–1868.

13. Kagan-Rosenzweig L. M. О касател'nykh napryazheniyakh pri izgibe uprugogo sterzhnya peremennogo secheniya [Concerning the shear stress for bent elastic rod with variable cross section]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 2 (73), pp. 43–47.

14. Timoshenko S. P., Gere Dzh. *Mekhanika materialov* [Mechanics of materials]. Moscow, Mir Publ., 1976, 669 p.

15. Kagan-Rosenzweig L. M. *Metod vychisleniya chastot sobstvennykh kolebaniy uprugikh sterzhney pryamym integririvaniem differentsial'nogo uravneniya izgiba* [The method for calculating the natural frequencies of elastic rods by application of direct integration of differential bending equation]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2019, no. 1 (72), pp. 61–66.