УДК 539.3:[69.04]

© Г. Н. Ширунов, канд. техн. наук, доцент
(Государственный университет морского и речного
транспорта им. адм. С. О. Макарова)
E-mail: guriyn@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-2-54-61

© G. N. Shirunov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping)
E-mail: guriyn@mail.ru

ИЗГИБ ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ, УСИЛЕННОЙ СЛОЕМ ВНЕШНЕГО АРМИРОВАНИЯ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

BENDING OF A THICK PLATE STRENGTHENED WITH A LAYER OF EXTERNAL REINFORCEMENT UNDER ITS OWN WEIGHT

Приводятся результаты расчета толстой изотропной квадратной плиты, имеющей слой внешнего армирования, изгибаемой распределенными силами собственного веса и внешней распределенной нагрузкой, приложенной к верхней грани. Задача решена в рамках линейной теории упругости с помощью метода начальных функций (МНФ) для бесконечного слоя без введения упрощающих гипотез о распределении компонентов напряженно-деформированного состояния по объему плиты. Используется универсальное частное решение системы уравнений равновесия Ламе для объемных сил веса, применяемое в алгоритме МНФ, сконструированное для многослойной конструкции.

Ключевые слова: теория упругости, метод начальных функций, частное решение, многослойная плита, внешнее армирование.

The article presents the calculation results of a thick isotropic square plate with a layer of external reinforcement, which is bent under effect of distributed forces of its own weight and external distributed load applied to the upper face. The problem is solved on the basis of linear elasticity theory by the method of initial functions (IFM) for infinite layer without introducing the simplifying hypotheses about distributing the components of the stress-strain state in the volume of the plate. The author uses a universal particular solution of the Lamé equilibrium equations for volume weight forces applied in the initial function method algorithm (IFM), designed for multilayer structure.

Keywords: elasticity theory, initial functions method, particular solution, multilayer plate, external reinforcement.

Введение

Современные карбопластики находят все большее применение в строительстве для усиления конструкций, работающих под нагрузкой [2]. Расчет элементов, усиливаемых наклейкой слоев внешнего армирования, проводится на основании обычных для строительной механики и сопротивления материалов технических теорий для стержней и пластин, а соответствующие методики достаточно полно разработаны и закреплены в нормах¹. В изгибаемых толстых плитах на восприятие сил собственного веса уходит значительный ресурс несущей способности (например, в таких как железобетонные, фибробетонные конструкции [8]), и применение внешне-

го армирования может эффективно увеличивать их прочность. При этом получаемые результаты расчета компонентов НДС по упрощенным расчетным схемам, в которых вес учитывается в виде распределенных нагрузок, приложенных к той или иной поверхности плиты, могут приводить к существенным погрешностям при оценке прочности. С увеличением относительной толщины плиты такие погрешности возрастают. Для учета действительного распределения компонентов НДС и снижения таких погрешностей задачу следует решать в рамках теории упругости без введения упрощающих гипотез. В данной работе рассмотрена задача об изгибе толстой плиты под действием равномерно распределенных сил собственного веса, усиленной путем наклей-

¹ СП 164.1325800.2014. Усиление железобетонных конструкций композитными материалами. Правила проектирования. М., 2015.

ки на нижнюю растянутую грань слоя внешнего армирования, к верхней грани которой после образования двухслойной конструкции приложена равномерно распределенная нагрузка.

С целью учета всех компонентов НДС, их действительного распределения и снижения возможных погрешностей, обусловленных введением упрощающих гипотез, решение задачи получено методом начальных функций (МНФ), позволяющим удобно рассчитывать многослойные конструкции. Используя построенные ранее частные решения задачи теории упругости для алгоритма МНФ, можно решить задачу усиления плиты с учетом последовательности ее изготовления и нагружения.

Постановка и решение задачи

В случае действия объемных сил собственного веса система уравнений равновесия Ламе в перемещениях представляется в виде

$$\begin{aligned} & \left[2(\nu-1) \partial_x^2 + (2\nu-1) (\partial_y^2 + \partial_z^2) \right] u - \\ & - \partial_x \partial_y v - \partial_x \partial_z w = 0; \\ & - \partial_x \partial_y u + \left[2(\nu-1) \partial_y^2 + (2\nu-1) (\partial_x^2 + \partial_z^2) \right] v - \\ & - \partial_y \partial_z w = 0; \\ & - \partial_x \partial_z u - \partial_y \partial_z v + \\ & + \left[2(\nu-1) \partial_z^2 + (2\nu-1) (\partial_x^2 + \partial_y^2) \right] w = \\ & = - \frac{K_z (2\nu-1)}{G}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v и w — искомые функции перемещений по координатам x , y и z соответственно; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; $K_z = \rho g$ — проекция объемной силы, действующей на элементарный объем по направлению вертикальной оси z ; ρ — объемный вес материала; g — ускорение свободного падения.

Решение системы (1) складывается из решения однородной системы и частного решения для сил собственного веса. С помощью МНФ получены многочисленные однородные решения для разнообразных конструкций с различными граничными условиями (ГУ), а описание его применения достаточно широко представлено в литературе [11–14].

В матричной форме решение МНФ системы (1) может быть записано в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^{part}, \quad (2)$$

где $\mathbf{Z}\mathbf{U}^0$ — вектор-столбец решения соответствующей (1) однородной системы; $\mathbf{U}^{part}$ — вектор частного решения, обращающийся в нуль на начальной плоскости [3]. Условие $\mathbf{U}^{part}(0) = 0$ накладывается для того, чтобы добавка $\mathbf{U}^{part}$ к решению однородной системы $\mathbf{Z}\mathbf{U}^0$ не искажала ГУ на начальной плоскости [4, 16].

Вектор начальных функций представляется следующими двойными тригонометрическими рядами:

$$\mathbf{U}^0 = \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn}^0 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{mn}^0 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{yz mn}^0 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{xz mn}^0 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \end{bmatrix},$$

где $\alpha_m = \frac{m\pi}{l_x}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{l_y}$, m и n — целые числа; позволяет удовлетворить на боковых гранях плиты ГУ свободного опирания в смысле Сен-Венана (отсутствие перемещений в плоскостях опорных граней), а решение задачи сводится к вычислению коэффициентов разложения функций НДС в ряды Фурье. В этом случае соотношение (2) запишется в виде

$$\mathbf{U}_{mn} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn} \mathbf{U}_{mn}^0 + \mathbf{U}_{mn}^{part}, \quad (3)$$

где $\mathbf{U}_{mn}$ — вектор коэффициентов разложения компонентов НДС для mn -й гармоники ряда; $\tilde{\mathbf{Z}}_{mn}$ — значения операторов МНФ на тригонометрических функциях [8]; $\mathbf{U}_{mn}^{part}$ — вектор коэффициентов разложения компонентов частного решения.

Частное решение алгоритма МНФ для изотропного слоя (4) получено для случая равномерно распределенных сил веса с распределением нормальных (вертикальных) напряжений по гидростатическому закону [5, 6]:

$$\begin{aligned} u^{part} &= v^{part} = 0; \\ w^{part} &= - \frac{\rho g (1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)} z^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^{part} &= -\rho g z; \\ \sigma_x^{part} &= \sigma_y^{part} = -\frac{\rho g v}{1-v} z; \\ \tau_{xy}^{part} &= \tau_{xz}^{part} = \tau_{yz}^{part} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Для многослойной конструкции (рис. 1) частное решение системы (1) построено из условия полного контакта на границе слоев.

Компоненты частного решения определяются из соотношений

$$\left. \begin{aligned}w_i^{part}(z_i) &= -A_i(h_1 + h_2 + \dots + h_{i-1} + z_i)^2 + \\ &+ (A_i - A_{i-1})(h_1 + h_2 + \dots + h_{i-1})^2 + \\ &+ (A_{i-1} - A_{i-2})(h_1 + h_2 + \dots + h_{i-2})^2 + \\ &+ \dots + (A_3 - A_2)(h_1 + h_2)^2 + (A_2 - A_1)h_1^2; \\ \sigma_{z,i}^{part}(z_i) &= -\rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 - \dots - \\ &- \rho_{i-1} g h_{i-1} - \rho_i g z_i; \\ \sigma_{x,i}^{part}(z_i) &= \sigma_{y,i}^{part}(z_i) = \\ &= -g \frac{\rho_i v_i}{1-v_i}(h_1 + h_2 + \dots + h_{i-1} + z_i); \\ z &\in \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j, \sum_{j=1}^i h_j \right]; \\ z &= \sum_{j=1}^{i-1} h_j + z_i; \\ z_i &\in [0, h_i],\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где $A_i = \frac{\rho_i g (1+v_i)(1-2v_i)}{2E_i(1-v_i)}$.

Решение неоднородной краевой задачи на действие собственного веса проводится по следующему алгоритму МНФ. Компоненты НДС частного решения представляются соответствующими двойными рядами Фурье. Для заданных ГУ на верхней грани многослойной плиты составляются уравнения, удовлетворяющие выполнению ГУ на нижней грани с учетом напряжений от частного решения. Из решения данной системы находятся неизвестные начальные функции. Все компоненты НДС определяются с помощью основного соотношения МНФ (2) плиты с добавлением в каждом слое $w_i^{part}(z)$, $\sigma_{z,i}^{part}(z)$, $\sigma_{x,i}^{part}(z)$ и $\sigma_{y,i}^{part}(z)$, остальные компоненты частного решения нулевые.

Для многослойной плиты с количеством слоев в пакете k со свободными от напряжений верхней и нижней гранями система уравнений

Рис. 1. Схема многослойного пакета

для удовлетворения ГУ на нижней грани составляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^6 \tilde{Z}_{4,j,mn}^{(k)}(h_k) U_{j,mn}^{0,k} &= \sigma_{z,mn}^{part,h}, \\ \sum_{j=1}^6 \tilde{Z}_{5,j,mn}^{(k)}(h_k) U_{j,mn}^{0,k} &= 0; \\ \sum_{j=1}^6 \tilde{Z}_{6,j,mn}^{(k)}(h_k) U_{j,mn}^{0,k} &= 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где $U_{j,mn}^{0,k}$ — компоненты вектора $\mathbf{U}_{mn}^{0,k}$ коэффициентов разложения компонентов НДС на границе $(k-1)$ -го и k -го слоев, являющиеся начальными функциями для k -го слоя, определяемого как

$$\mathbf{U}_{mn}^{0,k} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(k-1)}(h_{k-1}) \cdot \dots \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(i)}(h_i) \times \\ \times \dots \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(2)}(h_2) \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(1)}(h_1);$$

$$\mathbf{U}_{mn}^0 = \{u_{mn}^{0,k}, v_{mn}^{0,k}, w_{mn}^{0,k}, \sigma_{z,mn}^{0,k}, \tau_{yz,mn}^{0,k}, \tau_{xz,mn}^{0,k}\},$$

где m и n — номера гармоник;

$$\sigma_{z,mn}^{part} = -\frac{16}{mn\pi^2} \sum_{i=1}^k \rho_i g h_i,$$

$m, n = 1, 3, 5, \dots$ — коэффициенты разложения в двойной ряд Фурье по координатам x и y функции нормальных напряжений частного решения на нижней грани.

Из решения системы (6) определяются коэффициенты разложения неизвестных начальных функций u_{mn}^0, v_{mn}^0 и w_{mn}^0 . Для i -го слоя коэффици-

енты разложения компонентов НДС в сечениях $z = \text{const}$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{U}_{mn}^{(i)} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(i)}(z_i) \cdot \dots \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(2)}(z_2) \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(1)}(h_1) \mathbf{U}_{mn}^0 + \mathbf{U}_{mn}^{(i), \text{part}}; \quad z_i \in [0, h_i], \quad (7)$$

где

$$\mathbf{U}_{mn}^{(i), \text{part}} = \{0, 0, w_{mn}^{(i), \text{part}}, \sigma_{z, mn}^{(i), \text{part}}, 0, 0, \sigma_{x, mn}^{(i), \text{part}}, \sigma_{y, mn}^{(i), \text{part}}, 0\} — \text{вектор коэффициентов разложений функций частного решения для } i\text{-го слоя, который определяется на основе формул (5):}$$

$$w_{mn}^{(i), \text{part}} = \frac{8}{mn\pi^2} w_i^{\text{part}}(z_i);$$

$$\sigma_{z, mn}^{(i), \text{part}} = -\frac{16}{mn\pi^2} \sigma_{z, i}^{\text{part}}(z_i);$$

$$\sigma_{x, mn}^{(i), \text{part}} = \sigma_{y, mn}^{(i), \text{part}} = -\frac{16}{mn\pi^2} \sigma_{x, i}^{\text{part}}(z_i)$$

при $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Задачу о нагружении усиленной плиты решаем в три этапа. Сначала определяются компоненты НДС верхнего фибробетонного слоя при действии сил собственного веса. На втором этапе решается задача изгиба двухслойной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q , приложенной к верхней грани, с нулевой плотностью верхнего слоя и заданной плотностью нижнего слоя. Окончательное решение для усиленной плиты получается на третьем этапе суммированием соответствующих компонентов НДС плиты, полученных на первом и втором этапах (рис. 2).

На первом этапе решается задача изгиба о нагружении плиты силами собственного веса, где неизвестные начальные функции находятся из условий отсутствия напряжений на горизонтальных верхней и нижней гранях, а затем из основного соотношения МНФ (3) определяются компоненты НДС.

На втором этапе коэффициенты разложения неизвестных начальных функций определяются по условию отсутствия напряжений на нижней грани из систем уравнений при равенстве нормальных напряжений σ_z^0 (начальной функции общей задачи) заданной нагрузке q :

$$\sum_{j=1}^6 \tilde{\mathbf{Z}}_{4j, mn}^{(2)}(h_2) U_{j, mn}^{0, (2)} = \sigma_{z, mn}^{\text{part}, h};$$

$$\sum_{j=1}^6 \tilde{\mathbf{Z}}_{5j, mn}^{(2)}(h_2) U_{j, mn}^{0, (2)} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^6 \tilde{\mathbf{Z}}_{6j, mn}^{(2)}(h_2) U_{j, mn}^{0, (2)} = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{U}_{mn}^{0, 2} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(1)}(h_1) \mathbf{U}_{mn}^0 = \{u_{mn}^{0, (2)}, v_{mn}^{0, (2)}, w_{mn}^{0, (2)}, \sigma_{z, mn}^{0, (2)}, \tau_{yz, mn}^{0, (2)}, \tau_{xz, mn}^{0, (2)}\}.$$

Компоненты НДС 2-го этапа определяются из уравнений:

• для первого слоя:

$$\mathbf{U}_{mn}^{(1)} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(1)}(z_1) \mathbf{U}_{mn}^0 + \mathbf{U}_{mn}^{(1), \text{part}}; \quad z_1 \in [0, h_1], \quad (9)$$

где

$$\mathbf{U}_{mn}^{(1), \text{part}} = \{0, 0, w_{mn}^{(1), \text{part}}, \sigma_{z, mn}^{(1), \text{part}}, 0, 0, \sigma_{x, mn}^{(1), \text{part}}, \sigma_{y, mn}^{(1), \text{part}}, 0\};$$

• для второго слоя:

$$\mathbf{U}_{mn}^{(2)} = \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(2)}(z_2) \tilde{\mathbf{Z}}_{mn}^{(1)}(h_1) \mathbf{U}_{mn}^0 + \mathbf{U}_{mn}^{(2), \text{part}}; \quad z_2 \in [0, h_2], \quad (10)$$

где

$$\mathbf{U}_{mn}^{(2), \text{part}} = \{0, 0, w_{mn}^{(2), \text{part}}, \sigma_{z, mn}^{(2), \text{part}}, 0, 0, \sigma_{x, mn}^{(2), \text{part}}, \sigma_{y, mn}^{(2), \text{part}}, 0\}.$$

Рис. 2. Схема алгоритма расчета усиления плиты

Для числового примера приняты материалы с упругими характеристиками первого слоя: плотность $\rho_1 = 2200 \text{ кг/м}^3$; модуль упругости $E_1 = 20\,500 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0,2$; $R^+ = 0,75 \text{ МПа}$, $R^- = 8,5 \text{ МПа}$ [9]. В качестве второго слоя используем холсты из углепластика Sika Wrap [17] с плотностью $\rho_2 = 1600 \text{ кг/м}^3$; модулем упругости $E_2 = 231\,000 \text{ МПа}$; коэффициентом Пуассона $\nu_1 = 0,3^2$; $R^+ = 3800 \text{ МПа}$. Размеры плиты в плане $l_x \times l_y = 3 \times 3 \text{ м}$, толщина верхнего бетонного слоя $h_1 = 1 \text{ м}$, толщина нижнего слоя армирования принята равной суммарной толщине холста и клеевого шва $h_2 = 0,0014 \text{ м}$. Интенсивность внешней нагрузки q принята равной удвоенной величине собственного веса: $2q_{\text{экр}} = 2\rho gh = 43\,164 \text{ Н/м}^2$.

Для сглаживания функций решения использовались σ -множители Ланцоша, количество удерживаемых членов в рядах Фурье $M = N = 79$. Количество гармоник определялось из последовательного сравнения значений касательных напряжений, которые сходятся наиболее медленно. Сравнивались результаты с количеством гармоник 19, 39, 59 и 79. Последовательность значений относительной погрешности между данными смежными решениями составила 1,9, 0,4 и 0,1 %, после чего ряд считался сошедшимся. Для преодоления вычислительной неустойчивости счета длина мантиссы в представлении действительных чисел определена с помощью методики, изложенной в работах [9, 10], а для тригонометрических полиномов с 79 гармониками принята равной 59 знакам.

Результаты расчетов показаны на рис. 3–6, где приведены перемещения w , нормальные напряжения σ_z и σ_x в центральном сечении плиты и распределение касательных напряжений в центре опорной грани.

Ввиду малой толщины армирующего холста (второго слоя) эпюры перемещений $w(z)$ и напряжений $\sigma_z(z)$ по высоте меняются почти линейно, а напряжения $\sigma_x(z)$ и $\sigma_y(z)$ постоянны по высоте.

Заключение

С помощью метода начальных функций, позволяющего удобно учитывать многослойность объектов, решена задача теории упругости для

Рис. 3. Эпюры перемещений $w(z)$, м, по толщине плиты в центре при $x = l_x/2$ и $y = l_y/2$

Рис. 4. Эпюры напряжений $\sigma_z(z)$, Па, по толщине плиты в центре при $x = l_x/2$ и $y = l_y/2$

двухслойной толстой плиты с учетом последовательности изготовления с устройством слоя внешнего армирования. В отличие от технических теорий, в основе которых лежат упрощающие гипотезы о характере распределения компонентов НДС, решение получено для всех компонентов без использования интегральных силовых факторов — изгибающих моментов и поперечных сил, перемещения определяют

² Композиты от Sika — это сила конструкций. 11.08.2010. URL: <http://www.ckf.ru/news/70/>

Рис. 5. Эпюры напряжений $\sigma_x(z)$, Па, по толщине плиты в центре при $x = l_x/2$ и $y = l_y/2$

Рис. 6. Эпюры напряжений $\tau_{xz}(z)$, Па, по толщине плиты в центре боковой грани при $x = 0$ и $y = l_y/2$

ся для всех точек конструкции, а не только для срединной плоскости. Предложенный алгоритм решения может быть использован в качестве основного линейного расчета в пошаговой процедуре при разработке методов исследования многослойных конструкций, обладающих физическими и конструктивными нелинейными свойствами.

Библиографический список

1. Шилин А. А., Пшеничный В. А., Картузов Д. В. Внешнее армирование железобетонных конструкций композиционными материалами. М.: Стройиздат, 2007. 184 с.
2. Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963. 203 с.
3. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости // Вестник гражданских инженеров. 2014. № 1 (42). С. 136–144.
4. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Моделирование методом начальных функций изгиба плит под действием собственного веса // Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций: XXVI Междунар. конф. Санкт-Петербург, 28–30 сентября 2015 г. СПб., 2015. С. 220–222.
5. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Толстая плита под собственным весом // Материалы III междунар. конф. «Устойчивость и процессы управления». Санкт-Петербург, 5–9 октября 2015 г. СПб., 2015. С. 382–383.
6. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Analyzing thick layered plates under their ownweight by the method of initial functions // Materials physics and mechanics. 2017. Vol. 31. № 1/2. Pp. 36–39.
7. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Метод суперпозиции в решении задачи упругого изотопного параллелепипеда // Вестник СПбГУ. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 2. С. 77–90.
8. Морозов В. И., Онбул Э. К. Расчет изгибаемых сталефибробетонных элементов по нелинейной деформационной модели с использованием опытных диаграмм деформирования сталефибробетона // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 5 (58). С. 51–55.
9. Пухаренко Ю. В., Пантелеев Д. А., Морозов В. И., Магдеев У. Х. Прочность и деформативность полиармированного фибробетона с применением аморфной металлической фибры // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 107–111.
10. Ширунов Г. Н. Вычислительная устойчивость метода начальных функций в пространственных задачах теории упругости для изотропного тела // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 1 (48). С. 212–217.
11. Ширунов Г. Н. Параметры оценки вычислительной устойчивости метода начальных функций в пространственных задачах теории упругости // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 2 (49). С. 75–79.

12. Ширунов Г. Н. Метод начальных функций в модели упругого многослойного основания под действием нормальной локальной нагрузки // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1. С. 91–96.

13. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Оценка краевых эффектов в задаче взаимодействия нагруженной полосы и упругой среды // Вестник гражданских инженеров. 2014. № 2 (43). С. 61–64.

14. Ширунов Г. Н. Моделирование нормальной сосредоточенной силы в задаче линейно деформируемого основания // Вестник Гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2015. № 1 (29). С. 52–59.

15. Shirunov G. N. A method of initial functions in analyzing a stress of an elastic layer // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA). Ed. E. I. Veremey. Санкт-Петербург, 30 июня — 4 июля 2014 г. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014. С. 166–167.

16. Матросов А. В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестник СПбГУ. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2007. № 2. С. 55–65.

17. Матросов А. В., Ширунов Г. Н. Замкнутая форма операторов метода начальных функций для пространственной задачи теории упругости // Труды 44-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», Санкт-Петербург, 1–4 апреля 2013 г. / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. С. 256–262.

18. Кучер Н. К., Земцов М. П. Деформирование и прочность слоистых углепластиков при температурах 293 и 77 К // Проблемы прочности. 2001. № 3. С. 46–56.

References

1. Shilin A. A., Pshenichnyy V. A., Kartuzov D. V. *Vneshnee armirovanie zhelezobetonnykh konstruktсий kompozitsionnymi materialami* [External reinforcement of reinforced concrete structures with composite materials]. Moscow, Stroyizdat Publ., 2007, 184 p.

2. Agarev V. A. *Metod nachal'nykh funktsiy dlya dvumernykh kraevykh zadach teorii uprugosti* [The initial functions method for solving two-dimensional boundary value problems of elasticity theory]. Kiev, Academy of Sciences USSR Publ., 1963, 203 p.

3. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Algoritmy polucheniya zamknutykh form operatorov metoda nachal'nykh funktsiy dlya prostranstvennykh zadach teorii uprugosti* [Algorithms for obtaining closed forms of the operators of the initial functions method for three-dimensional problems of the elasticity theory]. *Vestnik*

grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2014, no. 1 (42), pp. 136–144.

4. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Modelirovanie metodom nachal'nykh funktsiy izgiba plit pod deystviem sobstvennogo vesa* [Simulation by the method of initial functions of the plate bending under the action of its own weight]. *Trudy XXVI Mezhdunar. konf. Sankt-Peterburg*, 28–30 sentyabrya 2015 g. «*Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie v mekhanike deformiruemyykh sred i konstruktсий*» [Proc. XVI Int. conf. St. Petersburg, September 28–30, 2015 “Mathematical and computer modeling in the mechanics of deformable media and structures”]. St. Petersburg, pp. 220–222.

5. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Tolstaya plita pod sobstvennym vesom* [Thick plate under its own weight]. *Trudy III mezhdunar. konf. «Ustoychivost' i protsessy upravleniya»* [Proc. of the III Int. conf. “Stability and Control Processes”]. St. Petersburg, October 5–9, 2015, pp. 382–383.

6. Matrosov A. V., Shirunov G. N. Analyzing thick layered plates under their own weight by the method of initial functions. *Materials of Physics and Mechanics*, 2017, vol. 31, no. 1–2, pp. 36–39.

7. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Metod superpozitsii v reshenii zadachi uprugogo izotropnogo parallelepipeda* [Method of superposition in the solution of the problem of elastic isotopic box]. *Vestnik SPbGU. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Bulletin of St. Petersburg State University. Series 10: Applied mathematics. Informatics. Management process*, 2015, no. 2, pp. 77–90.

8. Morozov V. I., Opubl. Eh. K. *Raschet izgibaemykh stalefibrozhelezobetonnykh ehlementov po nelineynoy deformatsionnoy modeli s ispol'zovaniem opytnykh diagramm deformirovaniya stalefibrobetona* [Calculation of steel-fiber reinforced concrete members subjected to bending according to the nonlinear deformation model using test deformation diagrams of steel-fiber reinforced concrete]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 5 (58), pp. 51–55.

9. Pukhareno Yu. V., Panteleev D. A., Morozov V. I., Magdeev U. Kh. *Prochnost' i deformativnost' poliarmirovannogo fibrobetona s primeneniem amorfnoy metallicheskoj fibry* [Strength and deformability of poly-reinforced fiber concrete with the use of amorphous metal fiber]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo – Academia. Architecture and construction*, 2016, no. 1, pp. 107–111.

10. Shirunov G. N. *Vychislitel'naya ustoychivost' metoda nachal'nykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti dlya izotropnogo tela* [Computational stability of the initial functions method in three-dimensional problems of elasticity theory for isotropic body]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 1 (48), pp. 212–217.

11. Shirunov G. N. *Parametry otsenki vychislitel'noy ustoychivosti metoda nachal'nykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti* [Parameters of estimating computational stability in the method of initial functions for three-dimensional elasticity problems]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 2 (49), pp. 75–79.
12. Shirunov G. N. *Metod nachal'nykh funktsiy v modeli uprugogo mnogosloynogo osnovaniya pod deystviem normal'noy lokal'noy nagruzki* [The method of initial functions in the model of elastic multilayer base under normal local load]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Civil Engineering Journal*, 2015, no. 1, pp. 91–96.
13. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Otsenka kraevykh ehffektov v zadache vzaimodeystviya nagruzhennoy polosy i uprugoy sredy* [Estimation of edge effects in the problem of the interaction of a loaded strip and elastic medium]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2014, no. 2 (43), pp. 61–64.
14. Shirunov G. N. *Modelirovanie normal'noy sosredotochennoy sily v zadache lineynogo deformiruemogo osnovaniya* [Modeling of the normal concentrated force in the problem of linearly deformable base]. *Vestnik Gos. un-ta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova – Bulletin of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping*, 2015, no. 1 (29), pp. 52–59.
15. Shirunov G. N. A method of initial functions in analyzing a stress of an elastic layer. *Proc. of the 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA)*. Ed. Veremey E. I. St. Petersburg, June 30–July 4, 2014. St. Petersburg, SPSU Publ., 2014, pp. 166–167.
16. Matrosov A. V. *Chislennno-analiticheskoe reshenie granichnoy zadachi deformirovaniya lineynogo-uprugogo anizotropnogo pryamougol'nika* [Numerical and analytical solution of the boundary value problem of deformation of a linear elastic anisotropic rectangle]. *Vestnik SPbGU. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Bulletin of SPSU. Series 10. Applied mathematics. Informatics. Management process*, 2007, no. 2, pp. 55–65.
17. Matrosov A. V., Shirunov G. N. *Zamknutaya forma operatorov metoda nachal'nykh funktsiy dlya prostranstvennoy zadachi teorii uprugosti* [The closed form of operators of the method of initial functions for the spatial problem of elasticity]. *Trudy 44-y Mezhdunar. nauch. konf. aspirantov i studentov «Protsessy upravleniya i ustoychivost'», Sankt-Peterburg, 1–4 aprelya 2013* [Proc. of the 44-th. Int. sci. conf. of graduate and undergraduate students "Processes of control and stability", St. Petersburg, April 1–4, 2013]. Ed. by Smirnov N. V., Smirnova T. E. St. Petersburg, SPbGU Publ., 2013, pp. 256–262.
18. Kucher N. K., Zemtsov M. P. *Deformirovanie i prochnost' sloistyykh ugleplastikov pri temperaturakh 293 i 77 K* [Deformation and strength of laminated carbon fiber reinforced plastics at temperatures 293 and 77 K]. *Problemy prochnosti – Problems of strength*, 2001, no. 3, pp. 46–56.