УДК 539.3

© Л. М. Казан-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-2-43-47

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

О КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ ИЗГИБЕ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

CONCERNING THE SHEAR STRESS FOR BENT ELASTIC ROD WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Вычисление касательных напряжений в изогнутой тонкостенной конической трубе по двучленной формуле технической теории изгиба приводит к неверному результату, так что сама формула нуждается в корректировке. Предлагаемая работа строит теорию касательных напряжений в стержне переменного сечения заново, рассматривая стержень как совокупность волокон, наклоненных к оси. Результатом являются новые формулы для двух составляющих касательного напряжения.

Ключевые слова: изгиб, стержень переменного сечения, касательные напряжения, корректировка технической теории.

The calculation of shear stress in a bent thin-walled conical tube using the two-term formula of the technical theory of bending leads to an incorrect result, so the formula itself needs to be corrected. The proposed article forms the theory of shear stress for a rod of variable cross-section anew, considering the rod as a set of fibers inclined to the axis. As a result we have new formulas for the two shear stress components.

Keywords: bending, rod with variable cross-section, shear stress, corrections of technical theory.

Касательные напряжения τ в прямолинейном стержне переменного сечения зависят от поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y . В технической теории изгиба их вычисляют, суммируя обусловленные поперечной силой и моментом составляющие τ^Q и τ^M :

$$\tau = \frac{Q_z S_y^0}{I_y b} + \frac{M_y}{b} \left(\frac{S_y^0}{I_y} \right)' \quad (1)$$

Здесь и далее штрихом отмечено дифференцирование вдоль оси стержня по координате x . Другие обозначения не разъясняются. Составляющая τ^M появляется только в стержне переменного сечения, является одинаковой для чистого и поперечного изгибов.

Результат применения формулы (1) обычно демонстрируют примерами стержней массивного сечения [1, 2], вычисляя в этом случае напряжение $\tau = \tau_{xz}$. Однако подразумевается при-

годность формулы и к тонкостенным стержням замкнутого профиля, когда постоянное по толщине стенки напряжение τ имеет в каждой точке сечения свое направление.

Для тонкостенной конической трубы радиуса r с постоянной толщиной δ стенки напряжение τ направлено по касательной к контуру. Подставляя в формулу (1) величины

$$b = 2\delta, I_y = \pi r^3 \delta, A = 2\pi r \delta, S_y^0 = 2r^2 \delta \sqrt{1 - z^2 / r^2},$$

$$\left(\frac{S_y^0}{I_y} \right)' = \frac{2r'}{\pi r^2} (2z^2 / r^2 - 1) / \sqrt{1 - z^2 / r^2},$$

получаем

$$\tau = \frac{Q_z}{A} 2\sqrt{1 - z^2 / r^2} - \frac{2Mr'}{rA} \frac{1 - 2z^2 / r^2}{\sqrt{1 - z^2 / r^2}} \quad (2)$$

Эпюра τ^M представлена на рис. 1. При $\theta = \pi/4$ напряжение меняет знак, при $z = r$ становится бесконечным. Этот явно неверный результат по-

будил автора рассмотреть вопрос вычисления касательных напряжений заново.

Напряжения в конической тонкостенной трубе. Считаем толщину δ стенки трубы постоянной. Нормальные напряжения вычисляем по формуле, применимость которой не вызывает сомнений:

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}. \quad (3)$$

Касательные напряжения задаем составляющими τ_θ , τ_r , действующими в окружном и радиальном направлениях. Хотя известно [3], что в стержне переменного сечения составляющая $\tau_r \neq 0$, покажем это.

Введем цилиндрическую систему координат. В этой системе координат нормаль $\mathbf{n}$ к боковой поверхности трубы имеет постоянные составляющие. Опуская множитель $\sqrt{1-r'^2}$ вследствие малого наклона образующей к оси, имеем

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -r' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Боковая поверхность свободна от напряжений, поэтому на поверхности формулы для напряжений на наклонной площадке дают

$$-\sigma_x r' + \tau_r = 0, \quad -\tau_r r' + \sigma_r = 0, \quad -\tau_\theta r' + \tau_{r\theta} = 0.$$

Видим, что все напряжения не равны нулю, но при малом r' напряжения σ_r , $\tau_{r\theta}$ много меньше τ_r и τ_θ , ими пренебрегаем. Остается уравнение

$$\tau_r = \sigma_x r', \quad (4)$$

то есть касательное напряжение, перпендикулярное контуру сечения, может быть заметным.

Окружное напряжение τ_θ определим из равновесия, считая σ_x известным. Сечениями, про-

ходящими через радиусы, из элемента трубы длиной dx выделим фрагмент, показанный на рис. 2. Боковые грани фрагмента не перпендикулярны его торцам, обозначаем за α угол, задающий отклонение грани от перпендикулярности, площадь боковой грани $\delta dx / \cos \alpha$. Напряжения на боковых гранях представим составляющими t и σ_s , соответственно параллельными и перпендикулярными оси стержня. Введем также величину $\bar{t} = t / \cos \alpha$. Легко проверить, что вместо закона парности касательных напряжений теперь имеем $\bar{t} = \tau_\theta$.

Считая τ_θ и t не изменяющимися вдоль радиуса, проектируем на ось стержня силы, действующие на фрагмент. Получаем

$$\frac{d\bar{t}}{d\theta} = \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = -\frac{d}{dx}(\sigma_x r'). \quad (5)$$

Уравнение (5) не содержит составляющую τ_r , именно по этой причине рассмотрен фрагмент, показанный на рис. 2.

Координата $z = r \sin \theta$ в уравнении (3) зависит от x , учитывая это, принимая во внимание $\pi r \delta = A/2$, $I_y = Ar/2$, получаем

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = -\frac{2Q_z}{A} \sin \theta + \frac{2r'}{rA} M_y \sin \theta.$$

Интегрируя по θ в пределах от θ до $\pi/2$, приходим к окончательному результату:

$$\tau_\theta = \tau_\theta^0 + \tau_\theta^M = \frac{2Q_z}{A} \cos \theta - \frac{2r'}{rA} M_y \cos \theta. \quad (6)$$

Здесь учтено, что на оси симметрии отыскиваемая составляющая касательного напряжения отсутствует: $\tau_\theta(\pi/2) = 0$.

Считая напряжение τ_r также не изменяющимся вдоль радиуса, вычислим его по формуле (4):

Рис. 1

Рис. 2

$$\tau_r = \sigma_x r' = \frac{M_y}{I_y} z r' = \frac{2r'}{rA} M_y \sin \theta. \quad (7)$$

Равнодействующая касательных напряжений, вызванных переменностью сечения, равна нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_\theta^M \cos \theta r \delta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_r \sin \theta r \delta d\theta \right) = \\ = \frac{4r'}{rA} M_y \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Равнодействующая же напряжений, вызванных поперечной силой Q_z , равна этой силе. Таким образом, равновесие для сечения целиком выполнено.

Пусть радиус трубы растет вместе с x , а момент M_y растягивает нижние волокна. Для такой трубы на рис. 3, а показана эпюра напряжений τ_θ^M (кривая 1). Она лишь в центральной части близка эпюре, построенной по уравнению (1) (кривая 2). На рис. 3, б дана эпюра τ_r^M .

Формулы (6), (7) используют единственное весьма надежное допущение, а именно, к стержню переменного сечения применяется формула (3), точная при чистом изгибе стержня постоянного сечения. Остальное является следствием равновесия.

Полученный результат подсказывает следующий общий способ учета переменности сечения.

Рассматриваем стержень как совокупность волокон, наклоненных к оси. Напряжения σ_b в волокнах вычисляем по формуле для нормаль-

ного напряжения σ_x . Вводим напряжение τ_r^M , имеющее смысл проекции σ_b на сечение. Равнодействующая напряжений τ_r^M не равна нулю, уравниваем ее касательными напряжениями, распределенными по сечению как в стержне постоянного сечения.

Напряжения в массивном коническом стержне. Рассматриваем стержень, предполагая все его поперечные сечения подобными. В таком стержне плоскости, касающиеся наружной поверхности в точках контура поперечного сечения, пересекаются с осью стержня в точке B (рис. 4), которая находится на расстоянии s от сечения:

$$s = h / h' = c / c'.$$

Здесь h, c — высота и ширина сечения, точнее, длины отрезков осей y и z , находящихся внутри сечения.

Напряжение σ_b в волокне CD , наклоненном к сечению под малым углом

$$\alpha = \frac{1}{s} \sqrt{y^2 + z^2},$$

раскладываем на нормальную к сечению составляющую $\sigma_b \approx \sigma_x$ и касательную составляющую, направленную вдоль радиуса, $\tau_r \approx \sigma_x \alpha$. Имеется также касательная составляющая τ_θ , направленная перпендикулярно радиусу. В точках контура составляющая τ_r обеспечивает отсутствие напряжений на площадках наклонной поверхности стержня.

Опираясь на результат для конической трубы, учитываем радиальную составляющую τ_r отдель-

Рис. 3

Рис. 4

ным слагаемым, задавая ее компонентами в декартовой системе координат

$$\tau_{xy}^r = \frac{1}{s} \sigma_x y, \quad \tau_{xz}^r = \frac{1}{s} \sigma_x z. \quad (8)$$

Проекция на вертикаль равнодействующей напряжений τ_r не равна нулю:

$$\int_{(A)} \tau_{xz}^r b(z) dz = \frac{M_y}{s}.$$

Уравновесим напряжения (8) напряжениями, распределенными как в стержне постоянного сечения.

Техническая теория изгиба для стержня постоянного сечения использует формулу Журавского – Ренкина – Бресса¹

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^o}{b I_y} \quad (9)$$

и формулу Грасгофа – Харлаба²

$$\tau_{xy} = \frac{b'_z}{b} y \tau_{xz}. \quad (10)$$

Здесь b'_z — производная ширины b сечения на уровне z по z .

Суммируя (8) с напряжениями (9), (10), вычисленными при $Q_z = -M_y / s$, получаем напряжения, обусловленные переменностью сечения,

$$\tau_{xz}^M = \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z^2 - \frac{S_y^o}{b} \right), \quad \tau_{xy}^M = \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z - \frac{b'_z}{b} \frac{S_y^o}{b} \right) y$$

и полные напряжения

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^o}{b I_y} + \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z^2 - \frac{S_y^o}{b} \right), \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{b'_z}{b} \frac{Q_z S_y^o}{b I_y} y + \frac{1}{s} \frac{M_y}{I_y} \left(z - \frac{b'_z}{b} \frac{S_y^o}{b} \right) y. \quad (12)$$

Напомним, что параметр s не зависит от координат точек поперечного сечения, но зависит от продольной координаты x .

Остается проверить, соблюдается ли уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{S_y^o}{b} = -z - \frac{b'_z}{b^2} S_y^o, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{I_y} = -\frac{1}{I_y} \frac{I'_y}{I_y},$$

причем в коническом стержне $I'_y / I_y = 4/s$, то равновесие имеет место.

Рассмотренный стержень, в котором все размеры сечения изменяются вдоль оси по одному и тому же закону, наиболее важен для практического применения. Ограничимся этим случаем и сравним полученные уравнения (11), (12) с известными: с формулой (1) для τ_{xz} и с формулой для τ_{xy}

$$\tau_{xy} = \frac{b'_z}{b} \frac{Q_z S_y^o}{b I_y} y + \frac{M_y z}{I_y} \frac{b'}{b} y, \quad (13)$$

предложенной в [6], как обобщение (10) на случай стержня переменного сечения. В ней b' — производная ширины b сечения на уровне z по x .

По внешнему виду формула (11) отличается от формулы (1), однако для простейших сечений (прямоугольника и круга) дает то же самое. Отметим, что формула (11) проще формулы (1), так как не содержит операцию дифференцирования по координате.

Сопоставим результаты для τ_{xy} на примере конического стержня круглого сечения радиуса r , для которого $b = 2\sqrt{r^2 - z^2}$, $b' = 2r/\sqrt{r^2 - z^2}$, $b'_z = -2z/\sqrt{r^2 - z^2}$, $S_y^o = \frac{2}{3}(r^2 - z^2)^{3/2}$, $I_y = \pi r^4 / 4$, $s = r / r'$. Уравнение (12) превращается в простую формулу

$$\tau_{xy}^M = \frac{4}{3} \frac{r' M_y}{r I_y} z y.$$

На рис. 5, а для стержня, радиус которого уменьшается с ростом x , показаны графики составляющей τ_{xy}^M , вычисленной при $z = 0,25r$ и при $z = 0,75r$ согласно (12) и (13) (прямые 1 и 2 соответственно). Когда $z \rightarrow r$, вычисления согласно (13) дают ошибочное бесконечное значение.

¹ Название общеизвестной формулы выглядит непривычно, но соответствует исторической действительности. Привычное для русскоязычного читателя название введено в 1949 г. по соображениям, далеким от науки. История появления формулы со ссылками на первоисточники изложена в работе [4].

² Формула получена Грасгофом в 1878 г., но впоследствии забыта. Вновь, спустя сто лет, независимо получена В. Д. Харлабом [5].

Рис. 5

На рис. 5, б представлен график изменения вдоль контура составляющей τ_{xy}^M , построенный по формуле (12). Когда $z \rightarrow r$, имеем верное значение, равное нулю.

Заключение. Выше заново построена техническая теория касательных напряжений при изгибе упругого стержня переменного сечения. Стержень рассмотрен как совокупность волокон, наклоненных к его продольной оси. Ввиду малого наклона волокон напряжения в них вычислены по формуле для нормального напряжения σ_x . Наклон волокон приводит к появлению в плоскости сечения неуравновешенной системы касательных напряжений τ_x . Последние уравновешены напряжениями, распределенными как в стержне постоянного сечения.

Полученные в результате формулы удовлетворяют как дифференциальным уравнениям равновесия, так и условиям равновесия на наклонной к оси боковой поверхности.

Библиографический список

1. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Наука, 1977. 456 с.
2. Александров А. В., Потанов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1995. 560 с.
3. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
4. Каган-Розенцвейг Л. М. К истории создания технической теории касательных напряжений в балке // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 6 (71). С. 250–258.
5. Харлаб В. Д. О касательных напряжениях в элементарной теории плоского изгиба // Исследования

по механике строительных конструкций и материалов. Труды ЛИСИ. Л., 1991. С. 92–95.

6. Сливкер В. И. О касательных напряжениях при изгибе стержней // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: межвуз. тематич. сб. тр. СПб.: СПбГАСУ, 2002. С. 90–96.

References

1. Gastev V. A. *Kratkij kurs soprotivlenija materialov* [Short course on resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
2. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1995, 560 p.
3. Birger I. A., Mavlyutov R. R. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 560 p.
4. Kagan-Rosenzweig L. M. K istorii sozdaniya *tehnicheskoy teorii kasatel'nyh naprjazhenij v balke* [Concerning the creation history of applied theory for shear stress in beam]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2018, no. 6 (71), pp. 250–258.
5. Kharlab V. D. O *kasatel'nyh naprjazhenijah v jelementarnoj teorii ploskogo izgiba* [On the shear stress in the elementary beam theory]. *Issledovanija po mehanike stroitel'nyh konstrukcij i materialov* [Research on the mechanics of building structures and materials]. Coll. works LISI. Leningrad, 1991, pp. 92–95.
6. Slivker V. I. O *kasatel'nyh naprjazhenijah pri izgibe stержney* [On the shear stresses in bending of rods]. *Issledovanija po mehanike stroitel'nyh konstrukcij i materialov mezhvuzovskij tematicheskij sbornik trudov* [Research on the mechanics of building structures and materials. Inter-university thematical coll. works]. St. Petersburg, SPbGASU Publ., 2002, p. 90–96.