УДК 624.074.433

© В. Г. Соколов, д-р техн. наук, доцент

© А. В. Дмитриев, аспирант

(Тюменский индустриальный университет)

E-mail: dandid@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-2-29-34

© V. G. Sokolov, Dr. Sci. Tech., Associate Professor

© A. V. Dmitriev, post-graduate student

(Tyumen Industrial University)

E-mail: dandid@mail.ru

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ УЧАСТКОВ ГАЗОПРОВОДОВ

FREE OSCILLATIONS OF STRAIGHT THIN WALLED UNDERGROUND PIPELINES

Решается задача о свободных изгибных колебаниях тонкостенного подземного газопровода с учетом влияния грунта. Получено частотное характеристическое уравнение, позволяющее определить влияние геометрических характеристик, таких как отношения толщины стенки, а также длины к радиусу средней поверхности, продольная сила, внутреннее давление, присоединенная масса грунта, на спектр частот для оболочечных форм колебаний.

Ключевые слова: газопровод, свободные колебания, продольная сжимающая сила, сила упругого отпора и присоединенная масса грунта.

The problem of free bending oscillations of thin-walled underground gas pipeline taking into account the influence of the soil is solved. There is obtained the frequency characteristic equation that allows determining the influence of such geometric characteristics as the ratio of wall thickness and the length of the median surface radius, longitudinal force, internal pressure, the attached ground mass, on the frequency spectrum for the shell shaped oscillations.

Keywords: gas pipeline, free oscillations, longitudinal compressive force, elastic resistance force and added soil mass.

Строительство и функционирование предприятий энергетики, нефтегазовой отрасли, коммунального хозяйства невозможно без строительства и эксплуатации различных по назначению инженерных трубопроводных систем.

Для развития и укрепления энергетической базы страны в последнее время уделяется большое внимание строительству тонкостенных магистральных трубопроводов протяженностью свыше двух тысяч километров. При строительстве таких трубопроводов ставятся очень важные задачи обеспечения надежности в процессе эксплуатации, снижения энергопотребления, стоимости при применении труб 1020–1040 мм и внутреннего рабочего давления свыше 12 МПа, как, например, в газопроводе «Сила Сибири».

Наиболее ответственными участками трубопроводов являются подземные участки, на которые накладываются дополнительные требования при проектировании по сравнению с други-

ми видами прокладки, что происходит по таким причинам, как:

- влияние реальной среды (грунт, связанный со структурой перемещения частиц, ползучесть, фильтрации и т. д.);
- влияние продольной сжимающей силы, вызванное горячими продуктами (нефть), изменением физико-механических свойств грунтов.

Изучение поведения подземных трубопроводов при динамических воздействиях, вызванных нестационарным внутренним давлением, импульсными сейсмическими нагрузками, до сих пор остается актуальным. Во избежание резонансных явлений динамическим расчетом особо выделяется задача в оценке частот и форм собственных колебаний в зависимости от геометрических характеристик, внутреннего рабочего давления, влияния грунта, продольной силы. Далее необходимо отметить, исходя из нормативных документов (СП, ВСН), что до сих пор

в основном расчет трубопроводов производится по стержневой теории без учета деформации поперечного сечения, что неприменимо для тонкостенных трубопроводов и является весьма приближенным.

Для решения поставленной задачи по определению спектра частот свободных колебаний подземного тонкостенного трубопровода в качестве расчетной схемы принята цилиндрическая оболочка конечной длиной L , радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки h , которая подвержена влиянию постоянного внутреннего рабочего давления p_0 , продольной сжимающей силы F , реакции упругого отпора грунта и давления грунта.

Для вывода уравнения движения подземного тонкостенного трубопровода учитывается:

- во-первых — давление грунта на стенку деформируемой оболочки в виде дополнительной распределенной радиальной нагрузки, пренебрегая тангенциальной составляющей (рис. 1) [9]:

$$q_{гр} = \gamma H (2 - \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \cos 2\theta), \quad (1)$$

где H — толщина обжимаемого слоя; γ — объемный вес грунта; θ — безразмерная координата в круглом направлении.

Влияние грунта на стенку оболочки можно условно привести к эквивалентной нагрузке, которая направлена навстречу внутреннему рабочему давлению (рис. 1, а), а коэффициенты α_1 и α_2 определяются подбором, $\alpha_1 > \alpha_2$;

- во-вторых — на основании [12] учитывается присоединенная масса упругой среды (грунт), вовлекаемая трубопроводом при изгибных колебаниях,

$$\mu_{bj} = \kappa_{bj} \mu_b, \quad (2)$$

где κ_{bj} — поправочный коэффициент, зависящий от номера тона колебаний (j — номер тона колебаний); μ_{bj} — присоединенная масса грунта на единицу длины трубопровода, определяемая по формуле

$$\mu_{bj} = \frac{\rho_{гр} \pi d^2}{4}, \quad (3)$$

где $\rho_{гр}$ — плотность грунта, окружающего трубопровод; d — внешний диаметр трубопровода с учетом толщины стенки h ;

- в-третьих — влияние упругого отпора среды, обусловленного перемещением (деформацией поперечного сечения трубы). По модели Фусса–Винклера величина упругого отпора характеризуется коэффициентом κ , зависящим от модуля грунта E_0 и коэффициента Пуассона ν_0 . Отпор грунта принимается радиальным (рис. 2):

$$q_0 = R^0 w, \quad (4)$$

где w — радиальное перемещение срединной поверхности оболочки, отнесенное к радиусу R .

κ — коэффициент упругого отпора грунта, когда труба подвергается действию внутреннего давления [3]. Представим его в виде

$$\kappa = \frac{E_0}{R(1 + \nu_0)}. \quad (5)$$

Рис. 1. Эпюры давления грунта: а — действующая; б — радиальная (β — коэффициент бокового давления грунта; ρ — плотность грунта; d_1 — внешний диаметр поперечного сечения трубы с учетом толщины h ; p_0 — внутреннее давление в трубе; G — вес трубы с транспортируемым продуктом, уравнивает разницу между верхним и нижним давлением)

Рис. 2. Радиальный отпор грунта и внутреннее рабочее давление p_0 , действующее на стенку трубы

За основу принято уравнение движения, полученное в работах В. П. Ильина, В. Г. Соколова [6, 13]. Опираясь на геометрически нелинейную теорию оболочек среднего изгиба Муштари-Галимова и допущения полубезмоментной теории Власова-Новожилова, уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} T_1 \right) - \\ & - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \\ & + R \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - R \frac{\partial X_2}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} (R_2^* X_3) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где ρ — плотность материала оболочки; $\xi = \frac{X}{R}$ — безразмерная координата цилиндрической оболочки в продольном направлении; R_1^*, R_2^* — радиусы кривизны оболочки в деформированном состоянии (индекс 1 обозначает продольное направление, индекс 2 — окружное):

$$\frac{1}{R_1^*} = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); R_2^* = R \left(1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \right), \quad (7)$$

где ϑ_2 — угол поворота касательной к срединной линии поперечного сечения; τ — кручение срединной поверхности; T_1 — продольное нормальное усилие; M_2 — изгибающий момент в поперечном (кольцевом) направлении;

$$X_1 = -Rhp \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; X_2 = -Rhp \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$X_3 = -Rhp \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - \gamma H (2 - \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \cos 2\theta) -$$

$$- \kappa R w + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

В отличие от полученных ранее решений, в уравнении (6) в слагаемом X_3 , кроме сил инерции материала оболочки и внутреннего рабочего давления, дополнительно учитываются влияние давления грунта на стенку деформированной оболочки, погонная присоединенная масса грунта, вовлекаемая трубопроводом при изгибных упругих колебаниях, и влияние упругого отпора среды, вызванное деформацией поперечного сечения.

Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки, выполненной из изотропного однородного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , по своему малому отношению толщины h к радиусу средней линии поперечного сечения R удовлетворяющей гипотезам Кирхгофа-Лява, принимаются следующие допущения полубезмоментной теории цилиндрических оболочек [6, 7, 10, 11]:

1. Относительное удлинение ε_2 считается малой величиной в окружном направлении поперечных сечений оболочки:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0. \quad (8)$$

2. Относительный сдвиг срединной поверхности оболочки w считается малым по сравнению с ее углом поворота в поперечном и продольном направлениях:

$$\omega^* = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

где u и v — перемещения срединной поверхности в продольном и окружном направлениях, отнесенные к радиусу R .

3. Угол поворота касательной к средней линии поперечного сечения оболочки ϑ_2 , относительная деформация μ , кручение срединной поверхности τ выражаются через компоненты перемещения u , v и w по общим соотношениям оболочки:

$$\vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v; \tau = \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi}; \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial \xi}; \varepsilon_0 = \frac{F}{EA}, \quad (10)$$

где ε_0 — исходная деформация трубы, определяемая в предположении недеформируемости сечения; A — площадь поперечного сечения оболочки.

4. Соотношения между усилиями и деформациями имеют вид:

$$T_2 = Eh\mu; M_2 = D \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi} \right); D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (11)$$

Решая задачу в перемещениях, в уравнение (6) подставим соотношения полубезмоментной теории оболочек между деформациями и перемещениями (8)–(11). Сохранив только нелинейные члены относительно неизвестных функций, получим линеаризованное дифференциальное уравнение движения оболочки в деформированном состоянии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + h_v^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\theta} + \vartheta_2 \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \varepsilon_0 \right) - \\ & - \frac{R}{Eh} p_0 \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} + \frac{R \mu_{bj}}{Eh} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{R^2 \kappa \cdot \partial^2 w}{Eh \cdot \partial \theta^2} + \\ & + R \gamma H \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} (2 - \alpha_1 \cos \theta - 2 \cos 2\theta) + \\ & + R \gamma H \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} \alpha_1 \sin \theta + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} 2 \alpha_2 \sin 2\theta \right) + \\ & + R \gamma H \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \alpha_1 \cos \theta - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} 4 \alpha_2 \cos 2\theta \right) - \\ & - \frac{R^2 \rho}{E} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \xi \partial t} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

где u, v, w — компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу R ; h_v — параметр относительной толщины оболочки:

$$h_v = \frac{h}{R \sqrt{12(1 - \nu^2)}}, \quad (13)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала оболочки;

$$P = \frac{F}{F_s},$$

F — продольная сила; F_s — эйлерова сила.

Полученная система уравнений (12) содержит четыре неизвестных функций координат и времени t : u, v, w и ϑ_2 . Опираясь на метод разделения переменных для решения данного уравнения, представим функцию $w(\xi, \theta, t)$, удовлетворяющую условию шарнирного опирания концов трубопровода и периодичности по окружной координате θ , в виде

$$w = \sum_{m,n} b_{mn} \varphi(t) \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \cos(m\theta), \quad (14)$$

где $\bar{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L}$, $m, n = 1, 2, \dots$ — волновые числа в окружном и продольном направлениях.

Остальные компоненты перемещений и угол поворота ϑ_2 определяются из соотношений полубезмоментной теории оболочек (8)–(10):

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{\bar{\lambda}_n}{m^2} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \cos(m\theta); \\ v &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{1}{m} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \sin(m\theta); \\ \vartheta_2 &= - \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{m^2 - 1}{m} \sin(\bar{\lambda}_n \xi) \sin(m\theta). \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что свободные колебания оболочки осуществляют движение по гармоническому закону, имеем

$$\varphi(t) = \sin \omega_{mn} t; \quad \varphi''(t) = -\omega_{mn}^2 \sin \omega_{mn} t, \quad (16)$$

где ω_{mn} — первая частота свободных изгибных колебаний по форме, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Подставляя (14)–(16) в уравнение (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях $\cos(m\theta)$ при $m, n = 1, 2, 3, \dots$, получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных значений b_{mn} радиальной составляющей перемещения w . Коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях обозначим a_{ij} :

$$\begin{aligned} \text{при } m=1 \quad & a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + a_{1,3}b_3 = 0; \\ \text{при } m=2 \quad & a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + a_{2,3}b_3 + a_{2,4}b_4 = 0; \\ \text{при } m=3 \quad & a_{3,1}b_1 + a_{3,2}b_2 + a_{3,3}b_3 + a_{3,4}b_4 + a_{3,5}b_5 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Полученную систему линейных однородных алгебраических уравнений запишем в виде

$$\begin{aligned} & a_{m,m-2}b_{m-2,n} + a_{m,m-1}b_{m-1,n} + a_{m,m}b_{m,n} + \\ & + a_{m,m+1}b_{m+1,n} + a_{m,m+2}b_{m+2,n} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$; $m \pm 1 > 0$; $m \pm 2 > 0$, а коэффициенты a_{ij} определяются выражением

$$\begin{aligned} a_{m,m} &= A_{m,n} - B_{m,n} \omega_{mn}^2; a_{m,m \pm 1} = \\ &= - \frac{m^5 (m \pm 2)}{2} q_{\Gamma P}^* \alpha_1; a_{m,m \pm 2} = \\ &= - \frac{m^4 [(m \pm 2)^2 - 1]}{2} q_{\Gamma P}^* \alpha_2; \\ A_{m,n} &= \lambda_n^4 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - 2q_{\Gamma P}^*) + \\ &+ \kappa^* m^4 - \lambda_n^4 m^4 P / n^2; \\ B_{m,n} &= \rho^* R h (\lambda_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_{bj}^* m^4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p^* &= p_0 \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \rho^* = \rho_0 \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \kappa^* = \frac{R^2 \kappa}{Eh \cdot h_v^2}; \\ q_{\Gamma P}^* &= \frac{\gamma H R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \lambda_n = \frac{n\pi R}{L \sqrt{h_v}}; \\ \mu_{bj}^* &= \mu_{bj} \frac{R}{Eh \cdot h_v^2}; \quad \lambda_n = \frac{n\pi R}{L \sqrt{h_v}}; \end{aligned}$$

$$P = \frac{F}{F_3}, \quad (19)$$

где F — продольная сила; $F_3 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ — эйлера сила; $I = \pi R^3 h$.

Коэффициенты данной системы уравнений (19) являются безразмерными при внутреннем рабочем давлении p_0 в МПа, коэффициенте упругого отпора k в кН/м^3 , плотности материала оболочки ρ_0 в $(\text{кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}^4$.

Полученную систему однородных линейных уравнений (18) представим в матричной форме:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & \dots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & \dots & a_{5n} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & \dots & a_{6n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{pp-6} & a_{pp-5} & a_{pp-4} & a_{pp-3} & a_{pp-2} & a_{pp-1} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ b_{n3} \\ b_{n4} \\ b_{n5} \\ b_{n6} \\ \dots \\ b_{np} \end{bmatrix} = 0. \quad (20)$$

Поскольку решение этой однородной системы линейных алгебраических уравнений отлично от нуля, так как величины амплитудных значений радиального перемещения срединной поверхности оболочки $b_{mn} \neq 0$, определитель коэффициентов однородной системы (20) должен равняться нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{1n} - B_{1n}\omega^2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & A_{2n} - B_{2n}\omega^2 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & A_{3n} - B_{3n}\omega^2 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & A_{4n} - B_{4n}\omega^2 & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-41} & a_{p-31} & a_{p-21} & a_{p-11} & \dots & A_{pn} - B_{pn}\omega^2 \end{vmatrix} \times \frac{1}{B_{1n}B_{2n}B_{3n}B_{4n} \dots B_{pn}} = 0. \quad (21)$$

После преобразований определитель (21) принимает вид характеристического уравнения матрицы A :

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} & d_{24} & \dots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} - \lambda & d_{34} & \dots & d_{3n} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} - \lambda & \dots & d_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{p-41} & d_{p-31} & d_{p-21} & d_{p-11} & \dots & d_{pn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (22)$$

где

$$d_{m,m} = \frac{a_{m,m}}{B_{m,n}}; d_{m,m\pm 1} = \frac{a_{m,m\pm 1}}{B_{m,n}}; d_{m,m\pm 2} = \frac{a_{m,m\pm 2}}{B_{m,n}}; \lambda = \omega^2.$$

Коэффициенты $A_{m,n}, B_{m,n}, a_{m,m+1}, a_{m,m+2}$ определяются по формулам (19).

Раскрывая определитель вида (22), получаем характеристическое уравнение степени, равной порядку матрицы A , корни которого λ_i называются собственными значениями, определяют квадраты частот собственных колебаний рассматриваемого участка трубопровода в зависимости от волновых чисел m и n . Полученное решение позволяет исследовать влияние геометрических характеристик ($h/R; L/R$), параметра продольной силы, внутреннего давления, присоединенной массы грунта на частоты свободных колебаний.

Библиографический список

1. Болотин В. В. Конечные деформации гибких трубопроводов // Труды МЭИ, 1956. Вып. 19. С. 272–291.
2. Бородавкин П. П. Подземные магистральные трубопроводы (Проектирование и строительство). М.: Недра, 1982. 384 с.
3. Галеркин Б. Г., Перельман Я. И. Напряжение и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе // Известия ВНИИТ. 1940. Т. 27. С. 160–192.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Денисов Г. В. К расчету участков заглубленных магистральных трубопроводов с конструктивными включениями на сейсмическое воздействие // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4. С. 200.
6. Ильин В. П. Применение полубезмоментной теории к задачам расчета тонкостенных труб // Проблемы расчета пространственных конструкций. Труды МИСИ. М., 1980. № 1. С. 45–55.
7. Ильин В. П., Халецкая О. Б. О применении полубезмоментной теории к определению частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки // Исследования по расчету строительных конструкций. Труды ЛИСИ. 1974. № 89. С. 49–60.
8. Камерштейн А. Г., Рождественский В. В., Ручимский М. Н. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга. М.: Недра, 1969. 440 с.
9. Клейн Г. К. Расчет подземных трубопроводов. М.: Стройиздат, 1969. 240 с.
10. Муштаров Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
11. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 430 с.
12. Постнов В. А., Калинин В. С., Ростовец Д. М. Вибрация корабля. Л.: Судостроение, 1983. 248 с.
13. Соколов В. Г., Разов И. О. Свободные колебания тонкостенных газопроводов большого диаметра при

полуподземной прокладке // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 6 (59). С. 114–120.

14. Соколов В. Г., Ильин В. П. Влияние закрепленных концов магистральных трубопроводов большого диаметра на частоты свободных колебаний // Промышленное и гражданское строительство. 2009. № 12. С. 41–44.

15. Соколов В. Г. Колебания, статическая и динамическая устойчивость трубопроводов большого диаметра: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 2011. 38 с.

16. Соколов В. Г., Ефимов А. А. Колебания и устойчивость магистральных газопроводов при подводной прокладке // Известия вузов. Нефть и газ. 2007. № 4. С. 47–51.

References

1. Bolotin V. V. *Konechnye deformatsii gibkikh truboprovodov* [Finite deformation of flexible pipelines]. *Trudy MEI* [Proc. of the Moscow Power Engineering Institute], 1956, iss. 19, pp. 272–291.

2. Borodavkin P. P. *Podzemnye magistral'nye truboprovody (Proektirovanie i stroitel'stvo)* [Underground main pipelines (Design and construction)]. Moscow, Nedra Publ., 1982, 384 p.

3. Galerkin B. G., Perel'man Ya. I. *Napryazhenie i peremeshcheniya v krugovom tsilindricheskom truboprovode* [Stress and displacement in a circular cylindrical pipe]. *Izvestiya VNIIT – Bulletin of VNIIT*, 1940, vol. 27, pp. 160–192.

4. Gol'denveyzer A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 512 p.

5. Denisov G. V. *K raschetu uchastkov zaglublennykh magistral'nykh truboprovodov s konstruktivnymi vklucheniymi na seismicheskoe vozdeystvie* [To calculation of sites of the buried main pipelines with constructive inclusions on seismic influence]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya – Modern problems of science and education*, 2014, no. 4, 200 p.

6. Il'in V. P. *Primenenie polubezmomentnoy teorii k zadacham rascheta tonkostennykh trub* [Application semi-membrane theory to problems of calculating thin-walled tubes]. *Trudy MISI «Problemy rascheta prostranstvennykh konstruktsiy» – Proc. of the MISI «Problems of calculating spatial structures»*, Moscow, 1980, no. 1, pp. 45–55.

7. Il'in V. P., Khaletskaya O. B. *O primenении polubezmomentnoy teorii k opredeleniyu chastot svobodnykh kolebaniy krugovoy tsilindricheskoy obolochki* [On the application of the semi-membrane theory to the determination of the free oscillation frequencies of a circular cylindrical shell]. *Trudy LSI «Issledovaniya po raschetu stroitel'nykh konstruktsiy» – Proc. of the LSI «Studies on the calculation of building structures»*, Leningrad, 1974, no. 89, pp. 49–60.

8. Kamershteyn A. G., Rozhdestvenskiy V. V., Pychimskiy M. H. *Raschet truboprovodov na prochnost'. Spravochnaya kniga* [Calculation for the pipeline strength. Reference book]. Moscow, Nedra Publ., 1969, 440 p.

9. Kleyn G. K. *Raschet podzemnykh truboprovodov* [Calculation of underground pipelines]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1969, 240 p.

10. Mushtari Kh. M., Galimov K. Z. *Nelineynaya teoriya uprugikh obolochek* [Nonlinear theory of elastic shells]. Kazan, Tatknigoizdat Publ., 1957, 431 p.

11. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1962, 430 p.

12. Postnov V. A., Kalinin V. S., Rostovets D. M. *Vibratsiya korablya* [Vibration of the ship]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1983, 248 p.

13. Sokolov V. G., Razov I. O. *Svobodnye kolebaniya tonkostennykh gazoprovodov bol'shogo diametra pri polupodzemnoy prokladke* [Free vibrations of thin-walled large-diameter gas pipelines at semi-underground laying]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 6 (59), pp. 114–120.

14. Sokolov V. G., Il'in V. P. *Vliyaniye zakreplennykh kontsov magistral'nykh truboprovodov bol'shogo diametra na chastoty svobodnykh kolebaniy* [The impact of fixed ends of large diameter main pipelines on the frequency of free oscillations]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and civil engineering*, 2009, no. 12, pp. 41–44.

15. Sokolov V. G. *Kolebaniya, staticheskaya i dinamicheskaya ustoychivost' truboprovodov bol'shogo diametra. Avtoref. diss. dokt. tekhn. nauk* [Oscillations, static and dynamic stability of large diameter pipelines. Author's thesis of Dr. Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2011, 38 p.

16. Sokolov V. G., Efimov A. A. *Kolebaniya i ustoychivost' magistral'nykh gazoprovodov pri podvodnoy prokladke* [Oscillations and stability of main pipelines during underwater installation]. *Izvestiya vuzov. Neft' i gaz – Proceedings of the universities. Oil and gas*, 2007, no. 4, pp. 47–51.