УДК 539.3

© Л. М. Кagan-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-1-61-66

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА

THE METHOD FOR CALCULATING THE NATURAL FREQUENCIES OF ELASTIC RODS BY APPLICATION OF DIRECT INTEGRATION OF DIFFERENTIAL BENDING EQUATION

Задача вычисления частот собственных колебаний упругих стержней переменного сечения решается указанным в заголовке способом. Способ предложен автором для решения задач устойчивости. Он удобен, прост в применении, дает результаты высокой точности. В частности, в данной работе первые несколько частот стержня с непрерывно изменяющимся сечением вычислены с точностью в десять значащих цифр.

Ключевые слова: собственные частоты, стержень переменного сечения, новый метод вычисления.

The problem of calculating the natural frequencies of elastic rods with variable cross-section is solved by the method specified in the article title. This method is proposed by the author for solving the problems of stability. It is convenient, easy to use, and provides the results of high accuracy. In particular, the first few frequencies of the rod with continuously variable cross sections are calculated with an accuracy of ten significant digits.

Keywords: natural frequencies, rod with variable cross-sections, new calculation method.

Частоты колебаний стержня переменного сечения лишь в исключительных случаях можно отыскать точно, а именно, вычислить как корни трансцендентного уравнения. В остальных случаях частоты находят приближенно, применяются метод конечных элементов, Релея — Ритца, Бубнова — Галеркина и другие методы. Численным вычислениям обычно предшествуют аналитические выкладки, часто достаточно громоздкие.

Предлагаемая работа применяет к обсуждаемой задаче прямое интегрирование дифференциальных уравнений. Способ предложен автором ранее [1], вычисления просто реализуются средствами Mathcad, приемы вычислений подробно разъяснены в работе [1]. К этой работе отсылаем за вычислительными подробностями.

Идея подхода. Рассматриваются малые изгибные колебания упругого стержня в отсутствие диссипации, $w(x)$, $M(x)$ — амплитуды прогибов и изгибающих моментов, ω — частота собственных колебаний.

Амплитуды $w(x)$, $M(x)$ являются нетривиальными решениями линейной краевой задачи с однородными граничными условиями, отыскиваются с точностью до множителя. Используя это свойство решения, вводим в рассмотрение вспомогательную краевую задачу. Выбираем некоторую компоненту f решения и задаем ее значение в точке x_0 , приняв $f(x_0) = 1$. Заменяем какое-либо однородное граничное условие, например, условие $g(0) = 0$, неоднородным условием $f(x_0) = 1$. Получаем вспомогательную неоднородную краевую

задачу, которая содержит неизвестный параметр ω , решение этой задачи для каждого ω единственно. Решив вспомогательную задачу численно или аналитически, частоту ω находим из отброшенного граничного условия $g(0) = 0$. Числовое значение назначено в условии $f(x_0) = 1$ произвольно. По этой причине подход применим, в первую очередь, к линейным задачам о колебаниях¹.

Формы колебаний получаем, вычислив амплитуды колебаний вспомогательной задачи при уже известной частоте.

Частоты стержня Бернулли — Эйлера.

Дифференциальное уравнение изгиба записывается в виде системы двух уравнений

$$w'' = -M / EI, M'' = -q = -\omega^2 m w. \quad (1)$$

Здесь m — интенсивность распределенной массы. Запись (1) не требует дифференцирования жесткости EI , удобна при работе со ступенчатыми стержнями.

Для стержней со стандартными опорными закреплениями в табл. 1 приведены граничные условия исходной и вспомогательной задач (столбцы 1, 2 соответственно), а также уравнения для вычисления частот. В этой таблице и далее значения прогибов и моментов на торцах отмечены индексами 0, 1 соответственно. Обратим внимание на то, что вспомогательную задачу можно формулировать по-разному, а в табл. 1 представлен один из вариантов.

Примеры иллюстрируют возможности и точность подхода. В них рассматривается стержень длиной l . Начало координат расположено на левой опоре. Используются безразмерные координата $x \equiv x/l$, прогиб $w \equiv w/l$, изгибающий момент $M \equiv Ml/EI_0$, изгибная жесткость $e_x = EI/EI_0$, погонная масса $m_x = m/m_0$. Вычисляются безразмерные частоты $\omega \equiv \omega l^2 \sqrt{m_0/EI_0}$. EI_0 , m_0 — жесткость и погонная масса в начале координат. При вычислении для перехода к без-

размерным величинам нужно положить $l = EI_0 = m_0 = 1$.

В новых обозначениях уравнения (1) принимают вид

$$w'' = -M / e_x, M'' = -\omega^2 m_x w. \quad (2)$$

Первый пример демонстрирует точность способа и простоту вычислений. Рассматривается стержень на двух опорах, для которого величины e_x , m_x в уравнениях (2) изменяются по закону

$$e_x = \exp(\delta x), m_x = \exp(\delta x).$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$w_0 = 0, w_1 = 0, M_0 = 0, M_1 = 0.$$

Для такого стержня известно точное решение [2], а именно, частота ω является корнем уравнения

$$4\delta^2 \lambda_1 \lambda_2 (\operatorname{ch} \lambda_2 \cos \lambda_1 - 1) + (8\omega^2 - \delta^4) \operatorname{sh} \lambda_2 \sin \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, 5\sqrt{4\omega - \delta^2}, \lambda_2 = 0, 5\sqrt{4\omega + \delta^2}.$$

Вспомогательная задача получается заменой однородного граничного условия $w_1 = 0$ неоднородным условием $w'_0 = 1$. Условие $w_1 = 0$ служит для вычисления частот.

Расчетный лист Mathcad (рис. 1, а) иллюстрирует простоту выполнения вычислений, а таблица (рис. 1, б), в которой даны значения десяти частот для $\delta = 1$ — точность способа. График

Таблица 1

Закрепления стержня	Граничные условия в задачах		Уравнение частот
	1	2
$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_1 = 0,$ $M'_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_0 = 1,$ $M'_1 = 0$	$M_1 = 0$
$w_0 = 0,$ $w_1 = 0,$ $M_0 = 0,$ $M_1 = 0$	$w'_0 = 0,$ $w'_0 = 1,$ $M_0 = 0,$ $M_1 = 0$	$w_1 = 0$
$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $w_1 = 0,$ $M_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_1 = 0,$ $M_0 = 1$	$w_1 = 0$
$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $w_1 = 0,$ $w'_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_0 = 1,$ $w'_1 = 0$	$w_1 = 0$

¹ В [1] идея подхода иллюстрирована простым примером. К сожалению, уравнения (2) этого примера неправильные, должны быть заменены следующими:

$$w = \frac{\cos kl}{\sin kl} \sin kx - \cos kx + 1; w' = \frac{k \cos kl}{\sin kl} \cos kx + k \sin kx. \quad (2)$$

а) Расчетный лист Mathcad

$$\delta := 1 \quad e(x) := \exp(\delta \cdot x) \quad m(x) := \exp(\delta \cdot x) \quad \text{TOL} := 10^{-14}$$

Given

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{e(x)} \quad M''(x) = -\omega^2 \cdot m(x) \cdot w(x)$$

$$w(0) = 0 \quad w(1) = 0 \quad w'(0) = 1 \quad M(0) = 0$$

$$\text{Res}(\omega) := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} M \\ w \end{pmatrix}, x, 1\right] \quad f(\omega) := \begin{cases} f \leftarrow \text{Res}(\omega)_0 \\ f(1) \end{cases}$$

$$\max := 50 \quad i := 0..50 \quad x_1 := 0 + \max \cdot \frac{i}{50} \quad z_1 := f(x_1)$$

$$\omega := 90. \quad \text{root}(f(\omega), \omega) = 88.970522901186$$

б) Собственные частоты

Номер частоты	Частота	
	Точная	Приближенная
1	9,77291040266	9,77291040267
2	39,5703660350	39,5703660359
3	88,97052285	88,97052290
4	158,08418929	158,08418933
5	246,92650017	246,92650000
6	355,50273816	355,50273870
7	483,8151631	483,8151622
8	631,864907	631,866*
9	799,652598	799,68*
10	987,178616	987*

в) График вблизи десятой частоты

Рис. 1

рис. 1, в говорит о заметной погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений для высоких частот. По этой причине для частот начиная с восьмой не удастся найти корень уравнения $f(\omega) = 0$ с помощью функции root. Значения определены с меньшей точностью по графику.

Второй пример также демонстрирует точность способа. Рассматривается консоль постоянной ширины в виде острого клина. Для такой консоли

$$e_x = (1-x)^3, \quad m_x = 1-x.$$

Точное решение задачи является первым в истории решением для стержня переменного сечения, получено Кирхгофом [3]. Частота ω является корнем уравнения

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \omega^{2i}}{((i+1)!)^2 (2i+1)!} = 0.$$

Точные и приближенные частоты даны в табл. 2. Так как жесткость в остром клине $e_x(1) = 0$, при численном интегрировании нельзя задать граничные условия в точке $x = 1$, принято

Таблица 2

Номер частоты	Частота	
	Точная	Приближенная
1	5,31509944	5,31509942
2	15,2071682	15,2071679
3	30,0198105	30,0198091
4	49,7633546	49,763344
5	74,439759	74,440028

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

$x = 0,99998$, что вносит дополнительную погрешность. Формы первых трех колебаний показаны на рис. 2.

Третий пример рассматривает влияние небольшой вмятины, которая находится на расстоянии a от опоры, на первые три собственные частоты шарнирно опертого стержня постоянного сечения.

Максимальное уменьшение жесткости обозначим за δ , считаем, что на длине c жесткость уменьшается по закону квадратной параболы, то есть $e_x = 1 - \delta[1 - (2(x-a)/c)^2]$ при $|x-a| \leq c/2$, иначе $e_x = 1$. $m_x = 1$.

Выполняя вычисления, можно воспользоваться расчетным листом рис. 1, заменив функции m_x, e_x . На рис. 3 показана зависимость относительного изменения в процентах трех первых частот от положения дефекта.

Четвертый пример рассматривает консоль, сжатую силой P на торце. Сила не является следящей. Вычисляются три первые частоты. Теперь дифференциальные уравнения изгиба (2) принимают вид

$$w'' = -M/e_x, \quad M'' + \frac{K}{e_x}M = -\omega^2 m_x w, \quad (3)$$

где $K = Pl^2/EI_0$ — параметр сжимающей силы.

Граничные условия таковы:

$$w_0 = 0, w'_0 = 0, M_1 = 0, M'_1 = Kw'_1.$$

Граничные условия вспомогательной задачи:

$$w_0 = 0, w'_0 = 0, M_0 = 1, M_1 = 0.$$

Условие, определяющее частоту, имеет вид

$$M'_1 = Kw'_1.$$

Вычисления проделаны для стержня

$$e_x = (1 - 0,9x)^3, \quad m_x = 1 - 0,9x.$$

Критическое значение K для такого стержня $K^* = 0,32087$, первые три частоты ненагруженного стержня: $\omega_1^0 = 4,631$, $\omega_2^0 = 14,931$, $\omega_3^0 = 32,833$. (Значения найдены прямым интегрированием дифференциальных уравнений, приведены

с округлением.) На рис. 4 показана зависимость трех первых частот от отношения K/K^* .

Частоты стержня Тимошенко. В технической теории, вычисляя перемещения стержня с учетом сдвигов, оперируют условными плоскими сечениями и пропорциональным поперечной силе Q углом сдвига v' между нормалью к сечению и осью стержня². Прогиб v , вызванный сдвигом, является дополнительной неизвестной функцией теории. Разрешающие уравнения теории обычно записывают в виде, который не содержит v , известны их различные варианты, что приводит в некоторых задачах к разным результатам для одного и того же стержня. В частности, в теории колебаний может появляться второй спектр частот, который не отвечает ограничениям, вытекающим из физических соображений [4]. Такой эффект объясняется несогласованностью между дифференциальными уравнениями задачи и граничными условиями. Получим используемый вариант уравнений.

Разрешающие уравнения. Прогиб стержня Тимошенко складывается из двух слагаемых, учитывающих изгиб и сдвиг

$$w_p = w + v.$$

В стержне постоянного сечения эти слагаемые подчинены уравнениям

$$w'' = -M/EI, \quad v' = \kappa Q/GA, \quad (4)$$

в которых коэффициент κ вычисляется энергетически, его величина зависит от точности вычисления касательных напряжений.

Известные автору работы учитывают переменность сечения зависимостью жесткостей EI , GA в уравнениях (4) от координат, что не совсем правильно. Действительно, на касательные на-

² Иногда [5] различают сдвигающие усилия, связанные с сечением стержня до и после деформации. Автор данной статьи использует поперечную силу в сечении деформированного стержня, так как только такое усилие нужно для вычисления напряжений и перемещений.

пряжения τ в стержне переменного сечения влияют и поперечная сила, и изгибающий момент

$$\tau = QS^{\text{отс}} / bI + (S^{\text{отс}} / I) M / b,$$

а формулы (4) нуждаются в небольшой корректировке.

Предлагаемая работа посвящена лишь новой технике вычисления частот, поэтому применяет формулы (4) без корректив.

Разрешающие уравнения получим, добавив к зависимостям (4) условия равновесия, которые в отсутствие продольной силы имеют вид

$$M'' = -q = -\omega^2 m w_p = -\omega^2 m(w + v), M' = Q. \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) образуют систему уравнений задачи, M , Q , v , w — неизвестные функции. Эту систему не станем приводить к одному уравнению более высокого порядка относительно одной функции. Во-первых, в такое уравнение войдут производные жесткостей EI , GA , что неудобно при работе со ступенчатыми стержнями, во-вторых, не совсем ясна запись граничных условий, гарантирующая отсутствие посторонних решений.

Граничные условия. Перемещение v вызвано только сдвигом, поэтому в одном сечении балки (на опоре) $v = 0$, угол сдвига во всех сечениях задан значением поперечной силы ($v' = \gamma_0 Q$, $\gamma_0 = \kappa / GA$), так что это перемещение определено полностью.

Когда из уравнений исключаются усилия, угол сдвига v' обязательно задать, учитывая равенство $v' = \gamma_0 Q$. Однако так поступают не всегда, например, Тимошенко допускает граничные условия вида $v' = \alpha \gamma_0 Q$ при $\alpha \neq 1$ [6, с. 247–249]. Результатом являются некорректные решения, в которых работа консервативной нагрузки зависит от последовательности приложения отдельных сил. Покажем это.

На рис. 5 изображены перемещения за счет сдвига в консоли, нагруженной консервативными силами $P_1 = 1$, $P_2 = 1$. Граничное условие в защемлении имеет вид $v' = \alpha \gamma_0 Q$. Сплошной линией и пунктиром показаны изогнутые оси при $\alpha \neq 1$ и $\alpha = 1$ соответственно. Так как система консервативна, перемещения $w_{12} = \alpha \gamma_0 a$, $w_{21} = \alpha \gamma_0 [a - (1 - \alpha)b]$ должны совпадать, что имеет место только в случае $\alpha = 1$.

Граничные условия при стандартных опорных закреплениях стержня и уравнения частот представлены в табл. 3.

Рис. 5

Вид граничного условия $w_1 + v_1 = 0$ вспомогательной задачи для стержня с защемленными торцами не предусмотрен «решателями» Mathcad. Для такого стержня нужно, положив $f = w + v$, переписать уравнения (4)–(5), граничные условия вспомогательной задачи и уравнения частот в виде

Таблица 3

Закрепления стержня	Граничные условия в задачах		Уравнение частот
	1	2	
	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_1 = 0,$ $M'_1 = 0,$ $M''_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0$ $v_0 = 0$ $M_0 = 1,$ $M'_1 = 0$	$w_0 = 0$
	$w_0 = 0,$ $w_1 + v_1 = 0,$ $v_0 = 0,$ $M_0 = 0,$ $M_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 1,$ $v_0 = 0,$ $M_0 = 0,$ $M_1 = 0$	$w_1 + v_1 = 0$
	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $M_1 = 0,$ $M_0 = 1,$ $M_1 = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $v_0 = 0,$ $M_0 = 1,$ $M_1 = 0$	$w_0 = 0$
	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $v_0 = 0,$ $w_1 + v_1 = 0,$ $w'_1 + \frac{\kappa M'_1}{GA_1} = 0$	$w_0 = 0,$ $w'_0 = 0,$ $v_0 = 0,$ $w_1 + v_1 = 0,$ $M_0 = 1$	$\frac{\kappa M'_1}{GA_1} + w'_1 = 0$

Таблица 4

	1	2	1	2	1	2	1	2
ω_1	3,824	3,773	7,122	7,000	12,300	11,687	16,336	15,415
$w_0 = 0$	18,317	17,198	28,952	27,143	37,527	33,243	44,981	39,426
ω_3	47,265	41,351	64,979	56,771	77,122	62,849	88,138	71,014
ω_6	219,92	148,10	259,20	173,19	282,06	176,02	303,75	187,65

$$M' = Q, Q' = -\omega^2 m f, f' = w' + \kappa Q / GA, w' = \theta, \\ \theta' = -M / EI;$$

$$w_0 = 0, w'_0 = 0, f_0 = 0, f'_1 = 0, M_0 = 1; \\ \theta_1 + \kappa Q_1 / GA_1 = 0.$$

Примеры. Работоспособность подхода иллюстрирует вычисление трех первых частот тонкостенной конической трубы со стенкой постоянной толщины. Радиусы трубы на торцах отличаются в два раза. В этом случае

$$e_x = (1 - 0,5x)^3, m_x = 1 - 0,5x.$$

Принято: максимальный радиус на левом торце $r = 0,05l$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент формы сечения $\kappa = 2$. Собственные частоты трубы при различных ее закреплениях представлены в табл. 4, столбцы 1 и 2 отвечают частотам, учитывающим и не учитывающим сдвиг.

Учет сдвигов уменьшает частоты колебаний, причем степень влияния растет с увеличением номера частоты, зависит от способа закрепления.

Заключение. Предлагаемый способ позволяет удобно с высокой точностью находить первые собственные частоты стержней переменного сечения. Точность результатов такова, что их можно применять, оценивая расчеты, выполненные различными приближенными методами.

Высокие частоты способ позволяет найти с меньшей точностью, что объясняется большей степенью влияния на эти частоты погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Библиографический список

1. Кagan-Розенцвейг Л. М. Вычисление критических сил в упругих стержнях переменного сечения прямым интегрированием дифференциального урав-

нения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 2 (67). С. 78–86.

2. Ece M. C., Aydogdu M., Taskin V. Vibration of a variable cross-section beam // Mechanics Research Communications. 2007. Vol. 34. Pp. 78–84.

3. Kirchhoff G. Gesammelte abhandlungen von G. Kirchhoff. Leipzig, 1882.

4. Stephen N. G. The second spectrum of Timoshenko beam theory — Further assessment // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 292. Pp. 372–389.

5. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. В 2 т. М.: СКАД СОФТ, 2007. Т. 1. 670 с.

6. Тимошенко С. П., Gere Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

References

1. Kagan-Rozenzweig L. M. Vychislenie kriticheskikh sil v uprugikh sterzhnyakh peremennogo secheniya pryamym integririvaniem differentsial'nogo uravneniya izgiba [Calculation of critical forces in elastic rods with variable cross section by means of direct integration of differential bending equation]. Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2018, no. 2 (67), pp. 78–86.

2. Ece M. C., Aydogdu M., Taskin V. Vibration of a variable cross-section beam. Mechanics Research Communications, 2007, vol. 34, pp. 78–84.

3. Kirchhoff G. Gesammelte abhandlungen von G. Kirchhoff. Leipzig, 1882.

4. Stephen N. G. The second spectrum of Timoshenko beam theory — Further assessment. Journal of Sound and Vibration, 2006, vol. 292, pp. 372–389.

5. Perel'muter A. V., Slivker V. I. Ustoychivost' ravnovesiya kon-struktsiy i rodstvennye problem [Stability of equilibrium of structures and related problems]. In 2 vols. Moscow, SKAD SOFT Publ., 2007, vol. 1, 670 p.

6. Timoshenko S. P., Gere Dzh. Mekhanika materialov [Mechanics of materials.]. Moscow, Mir Publ., 1976, 669 p.