УДК 539.3:624.04

© Е. А. Кобелев, канд. техн. наук, зав. кафедрой
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: kobelev.e.a.@lan.spbgasu.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-6-30-36

© Е. А. Kobelev, PhD in Sci. Tech., Head of Department
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: kobelev.e.a.@lan.spbgasu.ru

МЕТОД ВАРИАЦИОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ

METHOD OF VARIATION APPROXIMATIONS IN THE THEORY OF NONLINEAR DEFORMATION OF IRREGULAR SPATIAL SYSTEMS

Метод вариационных аппроксимаций (МВА), предложенный автором ранее для расчета упругих тонкостенных пространственных систем с нарушениями регулярности в виде локальных нагрузок, изломов срединной поверхности, подкрепляющих элементов, дискретных и односторонних связей различных типов, которые учитываются с помощью обобщенных функций, развивается в настоящей работе применительно к расчету физически и конструктивно нелинейных систем. Для получения полуканалитического решения высокой точности на каждом этапе нагружения оно разыскивается МВА при двумерной аппроксимации перемещений обобщенными функциями при помощи итерационного процесса уменьшения невязок.

Ключевые слова: метод вариаций распределений, нарушение регулярности, обобщенная функция, двумерная аппроксимация, функционал, нагружение.

The method of variation approximations (MVA), proposed by the author earlier for the calculation of elastic thin-walled spatial systems with irregularities in the form of local loads, fractures of the middle surface, reinforcing elements, discrete and one-sided connections of various types, which are taken into account with the help of generalized functions, is developed in this work with respect to the calculation of physically and structurally nonlinear systems. To obtain a semi-analytical solution of high accuracy at each stage of loading, it is sought by the MVA at two-dimensional approximation of displacements by generalized functions using the iterative process of reducing the discrepancy.

Keywords: method of variation approximations (MVA), regularity violation, generalized function, two-dimensional approximation, functional, loading.

Анализ современных потребностей инженерной практики показывает, что проблема совершенствования математических моделей, корректно описывающих процессы деформирования тонкостенных пространственных систем зданий и сооружений по уточненным расчетным схемам, является весьма актуальной [1–7].

Разработке новых численно-аналитических методов многоуровневого расчета строительных конструкций, зданий и сооружений (дискретно-континуальные методы), а также развитию

математических моделей, связанных с локализацией и фрагментацией областей расчетной схемы с высокими градиентами напряженно-деформированного состояния, посвящены многие исследования [8–12].

Рассмотрим тонкостенные пространственные системы с нарушениями регулярности в виде локальных нагрузок, ступенчатого изменения толщин, изломов срединной поверхности, подкрепляющих элементов, ребер, диафрагм жесткости, дискретных связей, различных дефектов и т. п.

Конструктивная нелинейность обусловлена наличием односторонних связей различных типов и возможностью изменения расчетной схемы в ходе прогрессирующего разрушения несущих элементов под нагрузкой. Указанные разрывные параметры учитываются с помощью математического аппарата теории обобщенных функций [1, 2, 5, 13].

В качестве исходной модели принимается физически и конструктивно нелинейная нерегулярная пространственная система в общем случае с криволинейными элементами переменной толщины, значительно меньшей других размеров конструкции.

Начало координат выбирается в произвольной точке O срединной поверхности тонкостенной конструкции, при этом ось z направляется вдоль образующей, ось s — вдоль контура поперечного сечения, а ось n — вдоль нормали к срединной поверхности (рисунок).

На криволинейных участках срединной поверхности, в общем случае двоякой кривизны, координатные линии z, s совмещаются с линиями главных кривизн k_1, k_2 , которые для каждого рассматриваемого участка принимаются постоянными. Знак кривизны срединной поверхности определяется в зависимости от совпадения выпуклости линии в окрестности рассматриваемой точки с направлением положительных или отрицательных значений n .

Ввиду значительной жесткости конструкции перемещения точек срединной поверхности

Перемещения, нагрузки и усилия, приведенные к срединной поверхности

вдоль координатных линий, соответственно z, s, n , принимаются достаточно малыми по сравнению с ее толщиной

$$U^T = [u_1 u_2 u_3],$$

где «Т» — знак транспонирования матрицы.

Деформации произвольного слоя в технической теории оболочек выражаются через деформации срединной поверхности по формуле

$$e = \varepsilon + n\chi, \quad (1)$$

где $e^T = [e_1 e_2 e_{12}]$; $\varepsilon^T = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega]$; $\chi^T = [\chi_1 \chi_2 \chi]$.

Деформации срединной поверхности оболочки выражаются через перемещения следующим образом

$$\varepsilon = (I_0 + I^*)U; \chi = (J_0 + J^*)U, \quad (2)$$

а уравнения неразрывности деформаций имеют вид

$$(D_0 + D^*)\varepsilon + (C_0 + C^*)\chi = 0, \quad (3)$$

где « 0 » — обозначает матричные операторы теории гладких оболочек [5]; « * » — матричные операторы с разрывными коэффициентами, отражающими наличие локальных нагрузок, нарушения регулярности геометрии оболочек [1], а также односторонние связи [13].

Физические соотношения приняты в соответствии с деформационной теорией малых упруго-пластических деформаций [14] в виде

$$[T | M]^T = [A_{ij}][\varepsilon | \chi]^T, \quad (4)$$

где $[T]^T = [T_1 T_2 S]$; $[M]^T = [M_1 M_2 M_{12}]$; $i = 1, 2, 3, \dots, 6$; $j = 1, 2, 3, \dots, 6$; A_{ij} — матрица условных жесткостей системы.

В общем случае учитываются разгрузка по линейно-упругому закону и сжимаемость материала при произвольной диаграмме $\sigma_i - \varepsilon_i$. Детально исследуется случай нелинейно-упругого несжимаемого материала.

Усилия определяются через напряжения по формулам

$$T_{1(2)} = \int_{-n}^n \sigma_{1(2)} dn; S = \int_{-n}^n \tau dn; M_{1(2)} = \int_{-n}^n \sigma_{1(2)} n dn; \\ M_{12} = \int_{-n}^n \tau n dn.$$

Положительные направления перемещений и соответствующие им усилия, действующие в общем случае на бесконечно малый элемент срединной поверхности двоякой кривизны, принимаются согласно технической теории нелинейно-упругих пологих оболочек [3, 5]. Отделим про-

межуточные опоры и заменим их действие на рассматриваемую систему неизвестными реакциями отброшенных связей

$$X^T =$$

$$= \{ \Sigma X_1^j \xi_1^j(z) \eta_1^j(s) \Sigma X_2^k \xi_2^k(z) \eta_2^k(s) \Sigma X_3^n \xi_3^n(z) \eta_3^n(s) \},$$

где $X_l^i(z, s)$ — закон распределения l -го неизвестного ($l = j, k, n$) по i -му направлению для рассматриваемой тонкостенной пространственной системы под действием произвольной внешней нагрузки

$$P^T = \{ p_1 \xi_1(z) \eta_1(s) p_2 \xi_2(z) \eta_2(s) p_3 \xi_3(z) \eta_3(s) \},$$

где $p_i(z, s)$ — закон распределения нагрузки по i -му направлению; $\xi_i^l(z)$, $\eta_i^l(s)$ — обобщенные функции, соответствующие характеру распределения локальных нагрузок или типу контактных усилий, приведенных к срединной поверхности конструкции. Теперь составим функционал Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, \varepsilon) = & \oint_{s, z} [\Phi(\varepsilon) - (P + X)U] dz ds - \\ & - \int_{\Omega} (TU + Q_\Gamma u_3 + M_n \partial u_3 / \partial n) d\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi(\varepsilon) = \int_{-n}^n \Pi(\varepsilon_i) dn$; $\Pi(\varepsilon_i) = K\Theta^2 / 2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i$ — потенциал работы деформаций в деформационной теории пластичности [5, 14, 15].

Второе слагаемое в формуле (5) учитывает работу усилий и моментов, заданных на части контура Ω .

Условиями стационарности функционала (5) являются:

- статические условия в области и на контуре при вариациях по функциям перемещений;
- геометрические условия в области и на контуре при вариациях по усилиям;
- физические условия в форме связи усилий с деформациями базисной поверхности при вариациях по деформациям.

Если нагрузка меньше предельной, то задача упругопластического расчета конструктивно-нелинейной пространственной тонкостенной системы с нарушениями регулярности имеет решение, которое минимизирует выпуклый функционал (5) в точке его стационарности.

Таким образом, напряженно-деформированное состояние рассматриваемого объекта в процессе его нелинейного деформирования описы-

вается системой нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих обобщенные функции и их производные. Чрезвычайная сложность задачи расчета в общем случае произвольной пространственной системы не допускает получения аналитически точного решения в замкнутой форме и предполагает для инженерных целей использование приближенных методов.

С целью построения решения высокой точности для расчета нерегулярных пространственных систем при минимальных затратах машинного времени ниже предлагается полуаналитический метод вариационных аппроксимаций, основанный на применении эффективных средств функционального анализа [5–7], широкое использование математического аппарата теории обобщенных функций [16] и современных численных методов расчета сложных строительных конструкций [3, 6, 11].

Решение рассматриваемой вариационной проблемы можно осуществить методами нелинейного программирования в континуальной форме (оптимизация в гильбертовом пространстве) или в дискретной форме (методы градиентного или координатного спуска). Однако применение этих методов сопряжено с многократным вычислением функционалов или их вариаций, что при произвольной диаграмме $\sigma_i - \varepsilon_i$ требует выполнения большого числа операций при интегрировании по толщине конструкции. Поэтому на практике более эффективными оказываются различные способы линеаризации, позволяющие существенно уменьшить объем вычислений и свести решение нелинейной задачи к последовательности решений линейных задач. Это методы упругих решений [14], последовательных нагружений [17], метод наискорейшего спуска [18] и другие известные разновидности метода Ньютона.

За возможными изменениями конструктивно-нелинейной расчетной схемы предлагается следовать, осуществляя поэтапное приложение внешней нагрузки, поэтому линеаризация исходного функционала (5) производится методом последовательных нагружений [17].

Вся нагрузка P разбивается на ряд ступеней (этапов нагружения) ΔP_m таким образом, чтобы в пределах каждого этапа были справедливы положения линейной теории.

Тогда решение исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$F(U) = P,$$

где F — матрица нелинейных дифференциальных операторов; P — вектор заданной нагрузки, на m -м этапе нагружения можно найти из системы уравнений, справедливой для возмущенного состояния исходной расчетной схемы:

$$F'(U_m) \Delta U_m = \Delta P_m,$$

где $U_m = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta U_k$, $P_m = \sum_{k=1}^{m-1} \Delta P_k$, при этом $U_1 = P_1 = 0$.

Функционал Лагранжа $\Theta(U + \Delta U, P + \Delta P)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta = & \oint_{s=0}^1 \{ [T + \Delta T]^T [\varepsilon + \Delta \varepsilon] + [M + \Delta M]^T [\chi + \Delta \chi] \} / 2 - \\ & - ([P + \Delta P] + [X + \Delta X])[U + \Delta U] - \\ & - [X^M + \Delta X^M][\gamma + \Delta \gamma] dz ds - \\ & - \left[\oint_{\Omega_1} (T_1 + \Delta T_1)(u_1 + \Delta u_1) ds + \oint_{\Omega_2} (S + \Delta S)(u_2 + \Delta u_2) ds + \right. \\ & \quad \left. + \oint_{\Omega_3} (Q_1 + \Delta Q_1)(u_3 + \Delta u_3) ds + \right. \\ & \quad \left. + \oint_{\Omega} (M_1 + \Delta M_1)(u_3 + \Delta u_3)'_z \Big|_{z=0}^{z=l} dz + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_1} (T_2 + \Delta T_2)(u_2 + \Delta u_2) dz + \int_{\Gamma_2} (S + \Delta S)(u_1 + \Delta u_2) dz + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_3} (Q_2 + \Delta Q_2)(u_3 + \Delta u_3) dz + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_4} (M_2 + \Delta M_2)(u_3 + \Delta u_3)'_s \Big|_{s=0}^{s=s_k} dz - \right. \\ & \quad \left. - (X_3 + \Delta X_3)(u_3 + \Delta u_3) \Big|_{z=0}^{z=l} \Big|_{s=0}^{s=s_k} \right], \quad (6) \end{aligned}$$

где символом Δ обозначены весьма малые приращения параметров системы при ее переходе из исходного состояния в возмущенное.

Варьируя последовательно перемещения u_i (при $i = 1, 2, 3$), получим уравнения равновесия

$$D^* T + C^* M = P + X,$$

где D^* и C^* — матричные дифференциальные операторы с разрывными коэффициентами, отражающими наличие локальных нагрузок и нарушения регулярности геометрии оболочек [1], а также односторонние связи [13].

Варьируя затем в функционале (6) последовательно $(u_i + \Delta u_i)$, получим аналогичные уравнения в приращениях перемещений. Подставив в выражение (6) физические соотношения (4),

а затем выразив деформации через перемещения с помощью выражений (2), получим линейризованный функционал Лагранжа относительно функций перемещений u_i и их приращений Δu_i .

Если в качестве основной системы была выбрана нерегулярная система, то необходимо удовлетворить дополнительным условиям внутри области, занимаемой конструкцией. Для определения реакций отброшенных связей составляются условия совместности деформаций в областях контакта.

При многократном повторении процедуры метода последовательных нагружений накапливаются погрешности, допущенные при линейризации. Величина погрешности зависит от размера ступени нагружения и характера нелинейности, который может изменяться при переходе от одного этапа нагружения к другому.

Для повышения точности линейризации на каждом этапе нагружения решение разыскивается с помощью итерационного процесса уменьшения невязок решения. При этом в пределах каждой итерации задача решается методом последовательных приближений, сводящим решение нелинейной системы дифференциальных уравнений к последовательному решению ряда линейных систем. При этом переменные коэффициенты каждой из этих систем определяются по результатам решения задачи в предыдущем приближении.

Решение линейной задачи в рамках каждого приближения осуществляется методом вариационных аппроксимаций (МВА). Проиллюстрируем процедуру МВА на примере решения рассматриваемой задачи в перемещениях.

На n -м этапе нагружения имеют место следующие соотношения:

$$p_i^n = \sum_{q=1}^{n-1} \Delta p_i^q; \quad u_i^n = \sum_{q=1}^{n-1} \Delta u_i^q; \quad X_i^n = \sum_{q=1}^{n-1} \Delta X_i^q.$$

Задав на этом этапе нагружения малое приращение внешней нагрузке Δp , приращения разрешающих функций перемещений на k -й итерации представим в виде ряда

$$\Delta u_i^n = \sum_{l=1}^m f_i^{kl}(s) U_i^{kl}(z) + \Delta u_i^{k-1}(s, z), \quad (7)$$

где m — число удерживаемых членов ряда, определяющее номер приближения; $i = 1, 2, 3$; $f_i^{kl}(s)$, $U_i^{kl}(z)$ — искомые обобщенные аппроксимиру-

ющие функции, отвечающие физическому смыслу задачи и удовлетворяющие граничным условиям. Назначение этих функций состоит в том, чтобы корректировать уже известные функции $\Delta u_i^{k-1}(s, z)$, представляющие собой приращения перемещений, накопленные за предыдущие итерации.

Здесь в начале применяется метод Власова — Канторовича, а затем метод вариационных итераций. Как показано в работах [2, 7, 13, 16], двумерная аппроксимация обобщенными функциями, математически корректно учитывающими особенности нарушения регулярности системы, обеспечивает высокую точность решения, поэтому в выражениях (7) можно ограничиться удержанием одного-двух членов ряда

$$\Delta u_i^n = f_i^k(s) U_i^k(z) + \Delta u_i^{k-1}(s, z). \quad (8)$$

Полагая Δu_i^{k-1} и аппроксимирующие функции одной из переменных — для определенности $f_i^k(s)$ — известными в результате выполнения $(k - 1)$ -й итерации, варьируются обобщенные функции $U_i^k(z)$. Тогда вариации от приращений перемещений примут вид

$$\delta(\Delta u_i^n) = f_i^k(s) \delta U_i^k(z).$$

Вариационные уравнения символически представляются в виде

$$\oint A_i(s, z) f_i^k(s) ds = 0.$$

Полученные при этом выражения представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решение которой при заданных граничных условиях дает искомые функции $U_i^k(z)$.

После построения функций (8) определяется разность между правой частью и полученной в результате решения левой частью каждого уравнения равновесия. Принимая в качестве интенсивности нагрузки найденную невязку решения, варьируются функции $f_i^k(s)$ при аппроксимирующих функциях $U_i^k(z)$. Тогда вариации от приращений перемещений и вариационные уравнения будут иметь вид, соответственно

$$\begin{aligned} \delta(\Delta u_i^n) &= U_i^k(z) \delta f_i^k(s); \\ \int_0^l A_i(s, z) U_i^k(z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяются функции $f_i^k(s)$ нового уровня и снова находится невязка решения. Повторяя смену направления интегрирования, получаются новые аппроксимирующие функции $U_i^k(z)$ и более точное решение задачи, и т. д.

При данном подходе локальный характер внешней нагрузки и расположение неизвестных контактных усилий учитывается в направлении двух координат при помощи специально подобранных аппроксимирующих обобщенных функций. Таким образом, расчетная схема МВА является обобщенно-континуальной.

Процесс МВА, последовательно реализующий поочередное уточнение систем аппроксимирующих функций, выполняется до сходимости решения с заданной точностью. При этом на каждой последующей итерации в качестве базисных используются функции, полученные в результате выполнения предыдущей итерации. Двумерная аппроксимация обобщенными функциями и процедура последовательных уменьшений невязок решения обеспечивают высокую скорость сходимости итерационного процесса при удержании малого числа членов ряда как в гладкой части системы, так и в зонах особенностей.

Метод последовательных нагружений в совокупности с МВА имеет двойную цикличность процесса решения — переход от одной ступени нагружения к другой и улучшение точности решения на каждой ступени нагружения. В обоих случаях связь между решениями систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений осуществляется посредством переменных коэффициентов этих систем.

Заключение

Таким образом, рациональный выбор обобщенных аппроксимирующих функций, с высокой степенью точности описывающих разрывные параметры системы при удержании малого числа членов ряда [16], а также простота логики алгоритмизации предлагаемого метода вариационных аппроксимаций в сочетании с методом последовательных нагружений [18] создают широкие возможности по комплексному исследованию процессов нелинейного деформирования нерегулярных пространственных систем [7, 19] как при разработке новых методов многоуровневого расчета строительных конструкций с уче-

том локальных нелинейных эффектов [11–13], так и при создании современных программных комплексов автоматизированного проектирования экономически эффективных зданий и сооружений [20].

Библиографический список

1. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л.: ЛГУ, 1980. 196 с.
2. Кобелев Е. А. Аналитический метод расчета пространственных пластинчатых систем // Строительная механика сооружений: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1988. С. 5–10.
3. Ильин В. П., Карпов В. В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. М.: АСВ, 2005. 426 с.
4. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 330 с.
5. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
6. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: В 2 ч. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит, 2011. 248 с.
7. Карпов В. В. Метод вариационных предельных преобразований в теории оболочек, имеющих нерегулярности // Вестник гражданских инженеров. 2005. № 4 (5). С. 37–42.
8. Золотов А. Б., Акимов П. А., Сидоров В. Н., Мозгалева М. Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). М.: АСВ, 2008. 336 с.
9. Золотов А. Б., Акимов П. А., Мозгалева М. Л. Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные вариационно-разностные методы. Приложения в строительстве. М.: АСВ, 2013. 418 с.
10. Акимов П. А., Негрозов О. А. О решении многогочечных краевых задач расчета конструкций в трехмерной постановке на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов. Ч. 1. Постановка и общие принципы аппроксимации задач // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14, Issue 2. Pp. 14–29.
11. Акимов П. А., Мозгалева М. Л. Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. М.: МГСУ, 2014. 632 с.

12. Мозгалева М. Л. Дискретные и дискретно-континуальные методы многоуровневого расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Vol. 11, Issue 2. Pp. 143–153.

13. Кобелев Е. А. Метод расчета нерегулярных пространственных систем с учетом нелинейных эффектов // Строительная механика сооружений и мостовых конструкций: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1990. С. 50–56.

14. Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

15. Енджиевский Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1982. 295 с.

16. Кобелев Е. А. Аналитический метод расчета дискретно-континуальных систем при двумерной аппроксимации разрывными функциями // Строительная механика сооружений: межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1989. С. 39–43.

17. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. 119 с.

18. Петров В. В. Решение нелинейных задач строительной механики методом наискорейшего спуска // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. Vol. 13, Issue 3. Pp. 103–111.

19. Karpov V. V., Semenov A. A. Mathematical models and algorithms for studying strength and stability of shell structures // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2017. Vol. 11, Issue 1. Pp. 70–81.

20. Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов: В 2 т. / под общ. ред. А. М. Белостоцкого, П. А. Акимова. М.: АСВ, 2016. Т. 1. 426 с. Т. 2. 594 с.

References

1. Mikhaylov B. K. *Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami* [Plates and shells with discontinuous parameters]. Leningrad, LSU Publ., 1980, 196 p.
2. Kobelev E. A. *Analiticheskiy metod rascheta prostranstvennykh plastinchatykh sistem* [Analytical method of analysis of spatial laminose systems]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. «Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy»* [Inter-university thematic coll. of works "Mechanics of Building Structures"]. Leningrad, LISI Publ., 1988, pp. 5–10.
3. Il'in V. P., Karpov V. V., Karpov V. V., Maslennikov A. M. *Chislennyye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki* [Numerical methods for solving problems in structural mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2005, 426 p.

4. Karpov V. V. *Matematicheskoe modelirovanie, algoritmy issledovaniya modeli, vychislitel'nyy ehksperiment v teorii obolochek* [Mathematical modeling, algorithms of model research, computational experiment in the theory of shells]. St. Petersburg, SPSUACE Publ., 2006, 330 p.
5. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of reinforced shells of revolution]. In 2 parts. Pt.1. *Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Models and algorithms for studying the strength and stability of reinforced shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 288 p.
6. Karpov V. V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of reinforced shells of revolution]. In 2 parts. Pt. 2. *Vychislitel'nyy ehksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeystvii* [Computational experiment with static mechanical action]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 248 p.
7. Karpov V. V. *Metod variatsionnykh predel'nykh preobrazovaniy v teorii obolochek, imeyushchikh neregulyarnosti* [Method of variation of limiting transformations in the theory of shells with irregularities]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2005, no. 4 (5), pp. 37–42.
8. Zolotov A. B., Akimov P. A., Sidorov V. N., Mozgaleva M. L. *Matematicheskie metody v stroitel'noy mekhanike (s osnovami teorii obobshchennykh funktsiy)* [Mathematical methods in structural mechanics (basics of the theory of generalized functions)]. Moscow, ASV Publ., 2008, 336 p.
9. Zolotov A. B., Akimov P. A., Mozgaleva M. L. *Mnogourovnevye diskretnye i diskretno-kontinual'nye variatsionno-raznostnye metody. Prilozheniya v stroitel'stve* [Multi-level discrete and discrete-continual variation-difference methods. Usage in construction]. Moscow, ASV Publ., 2013, 418 p.
10. Akimov P. A., Negrozov O. A. *O reshenii mnogotochechnykh kraevykh zadach rascheta konstruktsey v trekhmernoy postanovke na osnove sovmestnogo primeneniya metoda konechnykh ehlementov i diskretno-kontinual'nogo metoda konechnykh ehlementov* [About solving multipoint boundary value problems of structural analysis in the calculation of three-dimensional constructions based on the joint application of the finite element method and the discrete-continuous finite element method]. *Postanovka i obshchie printsipy approksimatsii zadach* [Formulation and general principles of approximation of problems]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14, iss. 2, pp. 14–29.
11. Akimov P. A., Mozgaleva M. L. *Mnogourovnevye diskretnye i diskretno-kontinual'nye metody lokal'nogo rascheta stroitel'nykh konstruktsey* [Multilevel discrete and discrete-continuum methods of local calculation of building structures]. Moscow, MGSU Publ., 2014, 632 p.
12. Mozgaleva M. L. *Diskretnye i diskretno-kontinual'nye metody mnogourovnevnogo rascheta stroitel'nykh konstruktsey na osnove kratnomasshtabnogo veyvlet-analiza* [Discrete and discrete-continuum methods for multilevel calculation of building structures based on multiscale wavelet analysis]. Pt. 2: Two-dimensional problems *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2015, vol. 11, iss. 2, pp. 143–153.
13. Kobelev E. A. *Metod rascheta neregulyarnykh prostranstvennykh sistem s uchetom nelineynykh ehffektov* [Method of calculating irregular spatial systems taking into account nonlinear effects]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. «Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy i mostovykh konstruktsey»* [Inter-university thematic coll. of works "Construction mechanics of structures and bridge structures"]. Leningrad, LSI Publ., 1990, pp. 50–56.
14. Il'yushin A. A. *Plastichnost'* [Plasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 376 p.
15. Endzhiievskiy L. V. *Nelineynye deformatsii rebristykh obolochek* [Nonlinear deformation of ribbed shells]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk University Publ., 1982, 295 p.
16. Kobelev E. A. *Analiticheskiy metod rascheta diskretno-kontinual'nykh sistem pri dvumernoy approksimatsii razryvnymi funktsiyami* [Analytical method for calculation of discrete-continuum systems with two-dimensional approximation by discontinuous functions]. *Mezhvuz. temat. sb. tr. «Stroitel'naya mekhanika sooruzheniy»* [Inter-university thematic coll. of works "Construction mechanics of structures"]. Leningrad, LSI Publ., 1989, pp. 39–43.
17. Petrov V. V. *Metod posledovatel'nykh nagruzheniy v nelineynoy teorii plastinok i obolochek* [Method of successive loadings in nonlinear theory of plates and shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1975, 119 p.
18. Petrov V. V. *Reshenie nelineynykh zadach stroitel'noy mekhaniki metodom naiskoreyshego spuska* [Solution of nonlinear problems in construction mechanics by the method of steepest descent]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2017, vol. 13, iss. 3, pp. 103–111.
19. Karpov V. V., Semenov A. A. Mathematical models and algorithms for studying strength and stability of shell structures. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2017, vol. 11, iss. 1, pp. 70–81.
20. *Aktual'nye problemy chislennogo modelirovaniya zdaniy, sooruzheniy i kompleksov: V 2 t.* [Actual problems of numerical simulation of buildings, constructions and complexes. In 2 vols.]. Ed. by Belostotskiy A. M., Akimov P. A. Moscow, ASV Publ., 2016, vol. 1, 426 p., vol. 2, 594 p.