УДК 624.07

© Ю. Л. Рутман, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
© С. О. Чепилко, инженер
(ООО «Институт строительных экспертиз»)
E-mail: chep-65@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-4-53-63

© Yu. L. Rutman, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
© S. O. Chepilko, engineer
(LLC «Institut stroitelnykh ekspertyz»)
E-mail: chep-65@mail.ru

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

STRESS AND STRAIN STATE OF THE STEEL-CONCRETE COMPOSITE BEAM

Предложена методика расчета напряженно-деформированного состояния в сталежелезобетонной балке, учитывающая геометрию поверхности прогиба бетонной плиты и позволяющая подбирать параметры балки, при которых максимально используется работа бетона на сжатие. Указаны формулы для отыскания нейтральной поверхности СЖБ-балки (поверхности внутри СЖБ-балки, в которой напряжения изгиба равны нулю). Полученные результаты использованы для разработки алгоритма вычисления входящей в уравнение Софи Жермен жесткости. Приведены результаты сравнительных расчетов по различным методикам.

Ключевые слова: сталежелезобетонная балка, напряженно-деформированное состояние.

A new method of calculation of the stress-strain state of the steel-concrete composite beam is proposed taking into account the deflection surface geometry of the concrete slab, which allows selecting such parameters of the beam which would optimize the maximum use of concrete compression. The formula for finding the neutral surface of the SCC-beams (surfaces inside the steel-concrete composite beam where bending stresses are equal to zero). The results obtained were used to develop an algorithm for calculating the rigidity entering the Sophie Germain equation. Results of comparative calculations in accordance with various methods are presented.

Keywords: steel-concrete composite beam, stress-strain state.

*Светлой памяти профессора А. А. Веселова
посвящается*

Рассмотрим математическую модель сталежелезобетонной балки (СЖБ-балки). Основой модели является уравнение Софи Жермен.

Принятые допущения

Под СЖБ-балкой понимается участок железобетонной плиты, лежащей на стальных балках, П-образного профиля в поперечном сечении с шириной, равной шагу стальных балок. При этом считается, что обеспечена совместная работа железобетонной плиты и стальных балок (рис. 1). Приняты следующие допущения:

1) конструктивно обеспечено отсутствие сдвига между бетонной плитой и стальными балками;

2) рассматривается упругая стадия работы СЖБ-балки;

3) в стальных балках учитываются только напряжения растяжения-сжатия (σ_y) в одном направлении — продольном;

4) поверхность прогибов железобетонной плиты удовлетворяет уравнению Софи Жермен.

Кроме того, далее будут предполагаться выполненными еще два условия:

5) загрузки соседних СЖБ-балок (смежных пролетов) одинаковы и симметричны по координатам x и y (см. рис. 1);

6) граничные условия также симметричны.

Условия 5 и 6 отвечают основным расчетным случаям и позволяют существенно упростить анализ напряженно-деформированного состояния СЖБ-балки. Разработанная ниже методология позволяет рассмотреть также антисимме-

Рис. 1. Расчетная схема СЖБ-балки и принятые координаты

тричные загрузки и граничные условия. Зная решения для симметричных и антисимметричных случаев, можно получать решения, отвечающие суперпозиции симметричных и антисимметричных условий.

Требования чисто математического порядка — формальное рассмотрение гладкости функций, граничных условий, особенностей и т. п. соображений, необходимых при строгом использовании математического аппарата, — не рассматриваются и, если не делаются специальные оговорки, считаются выполненными.

Если в балках нейтральная ось может считаться физической характеристикой, зависящей только от геометрии сечения и материала балки (в случае, если она состоит из нескольких материалов), то в СЖБ-балках положение нейтральной поверхности зависит как от типа загрузки, так и от граничных условий (помимо собственно геометрических и физических характеристик компонент СЖБ-балки). Это обстоятельство необходимо отметить, поскольку в стандартной методике расчета СЖБ-балок

(например, в [9, 13]) используется нейтральная ось, как она понимается в теории балок.

Представление прогибов

Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$D_{sb} \nabla^4 w(x, y) = q(x, y). \quad (1)$$

Следуя [2], запишем решение однородного уравнения Софи Жермен для прямоугольной области $\left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]$ в виде ряда:

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = & \sum A_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi ky}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{a}\right) + \\ & + \sum B_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi ky}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{a}\right) + \\ & + \sum C_k y \operatorname{sh}\left(\frac{\pi ky}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{a}\right) + \\ & + \sum D_k y \operatorname{ch}\left(\frac{\pi ky}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi kx}{a}\right) + \\ & + \sum E_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ky}{L}\right) + \sum F_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ky}{L}\right) + \\ & + \sum G_k x \operatorname{sh}\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ky}{L}\right) + \\ & + \sum H_k x \operatorname{ch}\left(\frac{\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ky}{L}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как рассматривается случай симметричных граничных условий и симметричной нагрузки, поверхность прогибов также должна быть симметричной. Это позволяет упростить предыдущее выражение, оставив только четные функции в разложении:

$$\begin{aligned} w_0(x, y) = & \sum A_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + \\ & + \sum C_k y \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi k x}{a}\right) + \\ & + \sum E_k \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k y}{L}\right) + \\ & + \sum G_k x \operatorname{sh}\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k y}{L}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Случай шарнирного опирания СЖБ-балки по сторонам $y = \pm \frac{L}{2}$ является основным для дальнейшего анализа. Такой выбор конкретных граничных условий не умоляет общности разрабатываемой математической модели, но делает выкладки более короткими и наглядными.

Под шарнирным опиранием СЖБ-балки по опорам $y = \pm \frac{L}{2}$ здесь и далее понимается шарнирное опирание бетонной плиты и шарнирное опирание стальной балки при условии $y = \pm \frac{L}{2}$. В случае шарнирного опирания по опорам $y = \pm \frac{L}{2}$ выражение (3) упростится еще больше и примет вид:

$$w_0(x, y) = \sum [E_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + G_k x \operatorname{sh}(\beta_k x)] \cos(\beta_k y), \quad (4)$$

$$\text{где } \beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{L}.$$

Для получения полного решения уравнения Софи Жермен к $w_0(x, y)$ нужно добавить частное решение w_1 , удовлетворяющее уравнению (1).

Рассмотрим параметр D_{sb} , имеющий размерность Н · м, который будем называть СЖБ-жесткостью. D_{sb} требует определения и является приведенной цилиндрической жесткостью СЖБ-балки, поскольку в рассматриваемой постановке СЖБ-балка в некотором смысле обладает чертами как балки, так и изотропной пластины. СЖБ-жесткость, как и нейтральная поверхность СЖБ-балки, зависит не только от геометрии сечения и свойств материалов, но и от типа (формы) нагружения и типа закрепления.

Для симметричного по обеим координатам нагружения $q(x, y)$ для достаточно широкого

класса функций допустимо представление:

$$q(x, y) = \sum_{k,n} q_{kn} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_k y), \quad (5)$$

$$\text{где } \alpha_n = \frac{2\pi n}{a}; \beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{L}.$$

Частное решение уравнения (1) для случая, когда $q(x, y)$ имеет вид (5), может быть легко выписано:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{D_{sb}} \sum_{k,n} \frac{q_{kn}}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_k y).$$

Для шарнирно опертой СЖБ-балки (по сторонам $y = \pm \frac{L}{2}$) функция прогибов примет вид:

$$\begin{aligned} w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y) = \\ = \frac{1}{D_{sb}} \sum_k \left[A_k \operatorname{ch}(\beta_k x) + B_k \frac{x}{a} \operatorname{sh}(\beta_k x) + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{q_{kn}}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} \cos(\alpha_n x) \right] \cos(\beta_k y). \end{aligned}$$

В последнем выражении были проведены некоторые переобозначения по отношению к (4) и использовано то обстоятельство, что представление для w_0 выписано с точностью до постоянного множителя, что и позволило вынести $\frac{1}{D_{sb}}$ за скобки. Коэффициенты A_k и B_k определяются из граничных условий.

Загружения

Поскольку конструктивно СЖБ-балка состоит из стальной балки и железобетонной плиты, то расчетное нагружение естественным образом может быть представлено в виде трех компонент:

- 1) от веса железобетонной плиты q_b ;
- 2) от веса стальной балки q_s ;
- 3) собственно полезной нагрузки q_u .

Одной из возможностей единообразного рассмотрения нагружений является представление нагружений типа q_s распределенными не по отрезкам (линиям) $x = \pm \frac{a}{2}$, а по полосам вида

$$\left[-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right] \times \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right] \text{ и } \left[\frac{a}{2} - \frac{b}{2}; \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right],$$

где b — ширина полки стальной балки. Например, если $q_b = \text{const}$ и $q_s = \text{const}$, то нагружения q_b и q_s можно представить в таком виде:

$$q_b(x, y) = \frac{4q_b}{L} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\beta_k} \cos(\beta_k y) \right];$$

$$q_s(x, y) = \frac{4q_s}{La} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\beta_k} \cos(\beta_k y) + \frac{16q_s}{Lab} \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n+1}}{\pm_n \beta_k} \sin\left(\frac{\alpha_n b}{2}\right) \cos(\alpha_n x) \cos(\beta_k y),$$

где q_b — погонный вес плиты, Н/м²; q_s — погонный вес балки, Н/м; b — ширина полки балки; $\alpha_n = \frac{2\pi n}{a}$; $\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{L}$.

Известно, что при приближении разрывных функций тригонометрическими рядами (а q_s и q_b являются таковыми, поскольку вне прямоугольника $\left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right] \cdot \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]$ их можно считать равными нулю) в точках разрыва проявляется эффект Гиббса — значение суммы тригонометрического ряда в этих точках несколько больше истинного значения (на 17,9 %). Однако на общем решении уравнения эффект Гиббса практически не сказывается.

Определение положения нейтральной поверхности

В качестве основного представления $w(x, y)$ для определения положения нейтральной поверхности будет использоваться следующее:

$$w(x, y) = \frac{1}{D_{sb}} \sum_k F_k(x) \cdot \cos(\beta_k y). \quad (8)$$

Считая положение нейтральной поверхности (далее — НП) $z = z_0(y)$ фиксированным, можно выписать выражения для относительных деформаций и напряжений в пластине, которую мы считаем эквивалентной СЖБ-балке:

$$\varepsilon_x = (z_0 - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{z_0 - z}{D_{sb}} \sum_k F_k''(x) \cos(\beta_k y);$$

$$\varepsilon_y = (z_0 - z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{z_0 - z}{D_{sb}} \sum_k F_k(x) \beta_k^2 \cos(\beta_k y);$$

$$\gamma_{xy} = 2(z_0 - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{2(z_0 - z)}{D_{sb}} \sum_k F_k'(x) \beta_k \sin(\beta_k y).$$

Напряжения в бетоне определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x^b &= \frac{E_b \cdot (z_0 - z)}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{E_b (z_0 - z)}{D_{sb} (1 - \nu^2)} \sum_k \left(F_k''(x) - \nu \beta_k^2 F_k(x) \right) \cos(\beta_k y); \\ \sigma_y^b &= \frac{E_b (z_0 - z)}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{E_b (z_0 - z)}{D_{sb} (1 - \nu^2)} \sum_k \left(\nu F_k''(x) - \beta_k^2 F_k(x) \right) \cos(\beta_k y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^b &= \frac{E_b \cdot (z_0 - z)}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{E_b (z_0 - z)}{D_{sb} (1 + \nu)} \sum_k F_k'(x) \beta_k \sin(\beta_k y). \end{aligned}$$

В стальных балках верна гипотеза плоских сечений. Поэтому напряжения в поперечном сечении балки равны:

$$\sigma_y^s = E_s \cdot \varepsilon_y = -E_s \frac{z_0 - z}{D_{sb}} \sum_k F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y).$$

Будем считать, что внешние силы растяжения-сжатия на СЖБ-балку не действуют. Тогда в любом поперечном сечении СЖБ-балки должно выполняться условие равновесия внутренних усилий:

$$\int_{A_s} \sigma_y^s dA_s + \int_{A_b} \sigma_y^b dA_b = 0,$$

где A_s , A_b — области интегрирования, соответствующие поперечным сечениям стенки и полки (стальной балки и железобетонной плиты), которые будут обозначать также величины площадей данных областей.

Проинтегрируем по области A_s :

$$\begin{aligned} \int_{A_s} \sigma_y^s dA_s &= \int_{A_s} \left(-E_s \frac{z_0 - z}{D_{sb}} \sum_k F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y) \right) dA_s = \\ &= -\frac{E_s}{D_{sb}} \sum_k F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y) \int_{A_s} (z_0 - z) dA_s = \\ &= -\frac{E_s A_s}{D_{sb}} (z_0 - z_s) \cdot \sum_k F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y), \end{aligned}$$

где z_s — центр тяжести сечения стальной балки в принятой местной системе координат.

Обозначим:

$$K_1(y) = \sum_k F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y). \quad (9)$$

Тогда

$$\int_{A_s} \sigma_y^s dA_s = -\frac{E_s A_s}{D_{sb}} (z_0 - z_s) K_1(y).$$

Проинтегрируем по области A_b :

$$\begin{aligned} \int_{A_b} \sigma_y^b dA_b &= \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{E_b (z_0 - z)}{D_{sb} (1 - \nu^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_k \left[\nu F_k''(x) - \beta_k^2 F_k(x) \right] \cos(\beta_k y) \right) = \\ &= \frac{E_b z_0 h}{D_{sb} (1 - \nu^2)} \sum_k \left(\int_{-a/2}^{a/2} \left(\nu F_k''(x) - \beta_k^2 F_k(x) \right) dx \right) \cos(\beta_k y). \end{aligned}$$

Обозначим

$$K_2(y) = \sum_k \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (-v F_k''(x) + \beta_k^2 F_k(x)) dx \right) \cos(\beta_k y). \quad (10)$$

Тогда с учетом того, что $A_b = ah$, можно записать

$$\int_{A_b} \sigma_y^b dA_b = -\frac{E_b A_b z_0}{D_{sb}(1-v^2)} K_2(y).$$

Уравнение для определения z_0 имеет вид:

$$-\frac{E_s A_s}{D_{sb}} (z_0 - z_s) K_1(y) - \frac{E_b A_b}{D_{sb}(1-v^2)} z_0 K_2(y) = 0, \quad (11)$$

откуда легко получить

$$z_0 = z_0(y) = \frac{1}{1+m} \frac{K_2(y)}{K_1(y)} z_s, \quad (12)$$

где

$$m = \frac{E_b A_b}{(1-v^2) E_s A_s}. \quad (13)$$

Назовем величину

$$\bar{z}_0 = \frac{1}{1+m} z_s \quad (14)$$

стандартным значением НП в СЖБ-балке, поскольку именно эта величина используется в стандартной методике расчета СЖБ-балок (см., например, [9]) с той лишь разницей, что обычно величина m берется в виде

$$m = \frac{E_b A_b}{E_s A_s}.$$

Представления (13), (14) для z_0 были предложены в работе [1].

Сравнивая z_0 и $\bar{z}_0$, можно заметить, что z_0 и $\bar{z}_0$ будут близки, если отношение $\frac{K_2(y)}{K_1(y)}$ будет мало отличаться от единицы.

Заметим также, что в случае неразрезного опирания по сторонам $x = \pm \frac{a}{2}$ (т. е. при выполнении условия $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0$) выражение (10) для $K_2(y)$ упрощается, поскольку

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0 \Rightarrow F_k'(x) \Big|_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} K_2(y) &= \sum_k \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (-v F_k''(x) + \beta_k^2 F_k(x)) dx \right) \cos(\beta_k y) = \\ &= \sum_k \beta_k^2 \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F_k(x) dx \right) \cos(\beta_k y) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_k \left(\frac{F_k'(x)}{a} \Big|_{-a/2}^{a/2} \right) \cos(\beta_k y) = \\ &= \sum_k \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F_k(x) dx \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y); \end{aligned}$$

$$K_2(y) = \sum_k \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F_k(x) dx \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y). \quad (15)$$

Сравнивая $K_1(y)$ и $K_2(y)$, видим, что в $K_1(y)$ функция F_k входит в виде $F_k \left(\frac{a}{2} \right)$, а в $K_2(y)$ — как среднее значение $F_k(x)$ на отрезке $\left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right]$:

$$\bar{F}_k = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} F_k(x) dx.$$

Очевидно, что при $a \rightarrow 0$ $K_1(y)$ и $K_2(y)$ становятся равными. То же касается $z_0(y)$ и $\bar{z}_0$, т. е. можно записать

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{K_2(y)}{K_1(y)} = 1;$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{z_0(y)}{\bar{z}_0} = 1.$$

Функции $K_1(y)$ и $K_2(y)$ зависят как от вида нагружения, так и от условий опирания. Таким образом, показано, что положение НП $z_0(y)$ в СЖБ-балках зависит от этих факторов.

Определение СЖБ-жесткости

Определение СЖБ-жесткости может быть произведено энергетическим методом.

Удельная потенциальная энергия деформации бетонной плиты равна:

$$\begin{aligned} V_b(x, y, z) &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x^b \cdot \sigma_x^b + \varepsilon_y^b \cdot \sigma_y^b + \gamma_{xy}^b \cdot \tau_{xy}^b) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_b (z_0 - z)^2}{(1-v^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Подставим сюда выражение для $w(x, y)$ вида

$$w(x, y) = \frac{1}{D_{sb}} \sum_k F_k(x) \cos(\beta_k y).$$

Тогда

$$V_b(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{D_{sb}^2} \frac{E_b (z_0 - z)^2}{(1-v^2)} \left(\sum_{k,n=1}^{\infty} [F_k''(x) \cdot F_n''(x) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2\nu\beta_n^2 F_k''(x)F_n'(x) + \\
 & + \beta_k^2 \cdot \beta_n^2 F_k'(x)F_n'(x) \cos(\beta_k x) \cos(\beta_n y) + \\
 & + 2(1-\nu)\beta_k\beta_n F_k'(x)F_n'(x) \sin(\beta_k x) \sin(\beta_n y) = \\
 & = \frac{1}{2D_{sb}^2} \cdot \frac{E_b(z_0 - z)^2}{(1-\nu^2)} \cdot \sum_{k,n=1}^{\infty} \Phi_{k,n}(x, y). \quad (16)
 \end{aligned}$$

В (16) принято:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{k,n}(x, y) &= \varphi_{k,n}(x) \cos(\beta_k y) \cos(\beta_n y) + \\
 & + \psi_{k,n}(x) \sin(\beta_k y) \sin(\beta_n y),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_{k,n}(x) &= F_k''(x)F_n''(x) - 2\nu\beta_n^2 F_k''(x)F_n'(x) + \\
 & + \beta_k^2 \beta_n^2 F_k'(x)F_n'(x); \\
 \psi_{k,n}(x) &= 2(1-\nu)\beta_k\beta_n F_k'(x)F_n'(x).
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\bar{\varphi}_{k,n} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_{k,n}(x) dx; \quad \bar{\psi}_{k,n} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \psi_{k,n}(x) dx.$$

После ряда преобразований можно получить:

$$\begin{aligned}
 V_b &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \left(\left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) \sum_{k,n=1}^{\infty} \Phi_{k,n}(x, y) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_{k,k} + \bar{\psi}_{k,k}) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_{k,k} - \bar{\psi}_{k,k}) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) \cos(2\beta_k y) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} (\bar{\varphi}_{k,k} + \bar{\psi}_{k,k}) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) \cos((\beta_k - \beta_n)y) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} (\bar{\varphi}_{k,k} - \bar{\psi}_{k,k}) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) \cos((\beta_k + \beta_n)y) dy.
 \end{aligned}$$

Можно показать, что входящие в V_b интегралы, содержащие косинусы, на полтора порядка (и более) меньше интеграла, не содержащего косинусов, т. е.

$$V_b \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\varphi}_{k,k} + \bar{\psi}_{k,k}) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{h^3}{12} + h z_0^2(y) \right) dy. \quad (17)$$

Определим потенциальную энергию деформации стальной балки.

Момент внутренних сил в сечении стальной балки равен:

$$\begin{aligned}
 M_s(y) &= \int_{A_s} \sigma_y^s(z_0(y) - z) dA_s = \\
 &= \int_{A_s} \left(-E_s \frac{(z_0(y) - z)}{D_{sb}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y) \right) dA_s = \\
 &= -\frac{E_s}{D_{sb}} \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y) \int_{A_s} (z_0(y) - z)^2 dA_s = \\
 &= -\frac{E_s}{D_{sb}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z)^2 \right) \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y) = \\
 &= -\frac{E_s I_s}{D_{sb}} \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \cos(\beta_k y),
 \end{aligned}$$

где $I_s = I_s^0 + A_s (z_0(y) - z)^2$; I_s^0 , A_s — собственный момент инерции и площадь сечения стальной балки.

Потенциальная энергия деформации стальной балки равна:

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M_s^2(y)}{E_s I_s} dy = \\
 &= \frac{E_s}{2D_{sb}^2} \times \\
 &\times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) \times \right. \\
 &\times \left. \sum_{k,n=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) F_n \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \beta_n^2 \cos(\beta_k y) \cos(\beta_n y) \right) dy = \\
 &= \frac{E_s}{2D_{sb}^2} V_s,
 \end{aligned}$$

где

$$V_s = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \left(\left(I_s^0 + A_s (z_0 - z_s)^2 \right) \times \right. \\
 \times \left. \sum_{k,n=1}^{\infty} F_k \left(\frac{a}{2} \right) F_n \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \beta_n^2 \cos(\beta_k y) \cos(\beta_n y) \right).$$

Аналогично предыдущим выводам можно записать

$$\begin{aligned}
 V_s &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \left(\left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) \times \right. \\
 &\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^4 \cos^2(\beta_k y) + \right. \\
 &+ \left. 2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} F_k \left(\frac{a}{2} \right) F_n \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \beta_n^2 \cos(\beta_k y) \cos(\beta_n y) \right) \Bigg) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^4 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) dy +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^4 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) \cos(2\beta_k y) dy + \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} F_k \left(\frac{a}{2} \right) F_n \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \beta_n^2 \times \\
 & \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) \cos((\beta_k + \beta_n)y) dy + \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} F_k \left(\frac{a}{2} \right) F_n \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^2 \beta_n^2 \times \\
 & \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) \cos((\beta_k - \beta_n)y) dy.
 \end{aligned}$$

Так как члены, содержащие косинусы, малы, то

$$V_s \approx V_{s1}, \quad (18)$$

где

$$V_{s1} = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \left(\frac{a}{2} \right) \beta_k^4 \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(I_s^0 + A_s (z_0(y) - z_s)^2 \right) dy.$$

Возможная работа внешних сил на деформации плиты равна:

$$\begin{aligned}
 q(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos \beta_k y; \\
 A &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy q(x, y) w(x, y) = \\
 &= \frac{1}{D_{sb}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \sum_{k,n=1}^{\infty} q_k F_n(x) \cos(\beta_k y) \cos(\beta_n y) = \\
 &= \frac{1}{D_{sb}} \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} F_k(x) dx = \\
 &= \frac{1}{D_{sb}} \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2 a}{\beta_k^4} \left(1 - \frac{1}{\eta + u(\beta_k a)} \right) = \frac{1}{D_{sb}} \frac{L}{2} V_A, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $V_A = \frac{L a}{2} (\Sigma_0 - \Sigma_1)$;

$$\Sigma_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{\beta_k^4}; \quad \Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{\beta_k^4} \cdot \frac{1}{\eta + u(\beta_k a)}.$$

Полная потенциальная энергия деформации СЖБ-балки равна:

$$\mathfrak{E} = U_b + U_s - A = \frac{1}{2D_{sb}^2} \frac{E_b}{1-\nu^2} V_b + \frac{1}{2D_{sb}^2} E_s V_s - \frac{1}{D_{sb}} V_A.$$

Энергия $\mathfrak{E}$ должна быть минимальна, поэтому необходимо, чтобы выполнялось

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dD_{sb}} = 0.$$

Откуда находится

$$D_{sb} = \frac{\frac{E_b}{1-\nu^2} V_b + E_s V_s}{V_A}. \quad (20)$$

При малых значениях θ , когда $z_0(y) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \bar{z}_0 = \frac{z_s}{1+m} = \text{const}$, выражение для D_{sb} примет вид:

$$\begin{aligned}
 D_{sb} &= \frac{\frac{E_b \bar{I}_b}{1-\nu^2} (\Sigma_0 - \Sigma_1 - \eta \Sigma_2) + E_s \bar{I}_s \eta^2 \Sigma_2}{a(\Sigma_0 - \Sigma_1)} = \\
 &= \frac{1}{a} \left(\frac{E_b \bar{I}_b}{1-\nu^2} [1 - \eta d(\eta, \theta)] + E_s \bar{I}_s \eta^2 d(\eta, \theta) \right), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_b &= \frac{ah^3}{12} + ah\bar{z}_0^2; \quad \bar{I}_s = I_s^0 + A_s (\bar{z}_0 - z_s)^2; \\
 d(\eta, \theta) &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0 - \Sigma_1}; \quad \Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{\beta_k^4} \cdot \frac{1}{(\eta + u(\beta_k a))^2}.
 \end{aligned}$$

Подробный анализ поведения $z_0(y)$ и D_{sb} не является целью данной работы, поэтому можно ограничиться следующими замечаниями:

1) для простых нагружений (постоянное, треугольное, по косинусу и т. п.) величина $z_0(y)$ в середине пролета (в зоне максимальных напряжений растяжения-сжатия) сравнительно мало отличается от величины $\bar{z}_0 = \frac{1}{1+m} z_s$;

2) величина D_{sb} в этих случаях мало отличается от величины $\bar{D}_{sb} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\eta}{1+\eta} \cdot (EI)_{sb}$, где

$(EI)_{sb} = E_b I_b + E_b A_b \bar{z}_0^2 + E_s I_s^0 + E_s A_s (\bar{z}_0 - z_s)^2$ — изгибная жесткость комплексной сталежелезобетонной балки;

3) в случае сосредоточенных нагружений, например, для нагружения по линии вида $q(x, y) = \begin{cases} q_0, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$ величина $z_0(y)$ в середине пролета может существенно отличаться от $\bar{z}_0$; при этом D_{sb} также может существенно отличаться от $\bar{D}_{sb}$;

4) стандартный расчет напряжений в СЖБ-балке дает для сосредоточенных нагружений

заниженные значения напряжений в бетоне; напряжения в стальной балке могут быть и больше, и меньше получаемых по предлагаемой расчетной модели в зависимости от величины параметра η ;

5) принимаемая обычно для определения напряжений σ_x в бетоне в поперечном направлении в середине пролета расчетная схема бесконечной балки единичной ширины на неподвижных опорах не соответствует реальной работе бетонной плиты; расхождения в вычисленных значениях σ_x особенно ощутимы для сосредоточенных нагрузок.

Проиллюстрируем вышеизложенное примерами.

Пусть плита выполнена из бетона класса В25, стальные балки — 40Б1 СТО АСЧМ-93 с шагом 1,16 м, пролет — 8 м, варианты нагрузки: по линии — 6,5 кН/м (соответствует кирпичной стене в полкирпича высотой 3 м); равномерная — 10 кПа. Геометрические и физические параметры:

1) стальная балка: $H = 0,396$ м;
 $A_s = 72,16$ см²; $I_s^0 = 20\,200$ см⁴; $E_s = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па;

2) бетонная плита: $h = 0,08$ м; $\nu = 0,2$;
 $A_b = ah = 0,18$ м²; $I_b^0 = 1,25 \cdot 10^{-4}$ м⁴; $E_b = 3 \cdot 10^{10}$ Па;
 $E_{b,\tau} = \frac{1}{1+\varphi} E_b = 8,571 \cdot 10^9$ Па.

Расчетные параметры: $z_s = \frac{H+h}{2} = 0,258$ м;
 $\theta = \frac{a}{L} = 0,145$; $\eta = \frac{D_b a}{D_s} = 0,0375$; $\bar{m} = \frac{2 E_b A_b}{E_s A_s} = 1,873$;
 $\bar{z}_0 = \frac{1}{1+\bar{m}} z_s = 0,0828$ м; $(EI)_{sb} = 9,846 \cdot 10^7$ Н·м;
 $D_{sb} = 3,132 \cdot 10^6$ Н·м; $\bar{D}_{sb} = 3,069 \cdot 10^6$ Н·м.

Поведение нейтральной поверхности (с учетом начального и длительного модулей деформации бетона) представлено на рис. 2.

Результаты расчета для классической комплексной СЖБ-балки:

1) максимальный балочный момент и максимальные продольные напряжения в бетоне (в верхнем волокне) и в стальной балке:

$$M = \frac{q_0 a L}{4} = 15,08 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -\frac{E_b}{(EI)_{sb}} \cdot M \left(\bar{z}_0 + \frac{h}{2} \right) = -0,564 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^s = 11,141 \text{ МПа}.$$

Рис. 2. Поведение нейтральной поверхности с учетом начального и длительного модулей деформации бетона

2) максимальные моменты в поперечном направлении и максимальные напряжения в верхних и нижних волокнах плиты в поперечном направлении в пролете и над стальными балками:

$$M = \pm \frac{q_0 a^2}{16} = \pm 0,547 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sigma_x^b \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{q_0 a^2}{h^2} = \pm 0,512 \text{ МПа}.$$

Результаты расчета по предложенной модели:

1) экстремальные напряжения в бетоне над стальными балками в верхнем ($z = -h/2$) и нижнем ($z = h/2$) волокнах:

$$\sigma_x^b \Big|_{z=-h/2} = +1,024 \text{ МПа}; \sigma_x^b \Big|_{z=h/2} = +0,158 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -0,473 \text{ МПа}; \sigma_y^b \Big|_{z=h/2} = -0,177 \text{ МПа};$$

2) экстремальные напряжения в бетоне в пролете в верхнем ($z = -h/2$) и нижнем ($z = h/2$) волокнах:

$$\sigma_x^b \Big|_{z=-h/2} = -0,523 \text{ МПа}; \sigma_x^b \Big|_{z=h/2} = -0,155 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -0,965 \text{ МПа}; \sigma_y^b \Big|_{z=h/2} = -0,149 \text{ МПа};$$

3) максимальные напряжения в стальной балке $\sigma_y^s = -11,465$ МПа.

Эпюры напряжений σ_x^b и σ_y^b приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

Произведем пересчет на длительный модуль деформации бетона $E_{b,\tau}$ (это условный пересчет с учетом ползучести; вообще говоря, требуется обоснование возможности подобного простого пересчета):

$$\eta = \frac{D_b a}{D_s} = 0,0107; \bar{m}_\tau = \frac{E_{b,\tau} A_b}{E_s A_s} = 0,535;$$

Рис. 3. Эпюра напряжений σ_x^b

Рис. 4. Эпюра напряжений σ_y^b

$$\bar{z}_{0,\tau} = \frac{1}{1 + \bar{m}_\tau} z_s = 0,155 \text{ м}; (EI)_{sb,\tau} = 7,183 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$D_{sb,\tau} = 9,283 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}; \bar{D}_{sb,\tau} = 6,565 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Для классической комплексной СЖБ-балки имеем:

$$\sigma_x^b \Big|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{q_0 a^2}{h^2} = \pm 0,512 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -\frac{E_{b,\tau}}{(EI)_{sb,\tau}} \cdot M \left(\bar{z}_0 + \frac{h}{2} \right) = -0,351 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=h/2} = -\frac{E_{b,\tau}}{(EI)_{sb,\tau}} \cdot M \left(\bar{z}_0 - \frac{h}{2} \right) = -0,207 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^s = 12,151 \text{ МПа}.$$

Расчет по предложенной модели:

1) экстремальные напряжения в бетоне над стальными балками в верхнем волокне:

$$\sigma_x^b = +1,362 \text{ МПа}; \sigma_y^b = \begin{cases} +0,123 \text{ МПа} \\ -0,202 \text{ МПа} \end{cases};$$

2) экстремальные напряжения в бетоне в пролете в верхнем и нижнем волокнах:

$$\sigma_x^b \Big|_{z=-h/2} = -0,634 \text{ МПа}; \sigma_x^b \Big|_{z=h/2} = -0,354 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -0,822 \text{ МПа}; \sigma_y^b \Big|_{z=h/2} = -0,277 \text{ МПа};$$

3) максимальные напряжения в стальной балке $\sigma_y^s = -10,565 \text{ МПа}$.

Напряжения σ_x^b над стальной балкой (вдоль линии $y = 0$) в расчете по предлагаемой расчетной схеме в два раза больше, чем в стандартном расчете, при этом величина напряжений порядка расчетного сопротивления бетона на растяжение $R_{bt} = 1,05 \text{ МПа}$.

Напряжения в бетоне σ_y^b , получаемые по предлагаемой расчетной схеме, вдоль стальных балок $\left(x = \frac{a}{2} \right)$ близки к получаемым в стандартном расчете. Те же напряжения в середине пролета (по линии $x = \frac{a}{2}$) более чем в два раза выше, чем в стандартном расчете.

Сравнивая значения напряжения σ_y^b в бетоне над стальными балками, необходимо отметить, что при учете длительного модуля деформации бетона напряжения σ_y^b в бетоне над стальными балками в некоторой окрестности $\left(x = \pm \frac{a}{2}; y = 0 \right)$ меняют знак и становятся растягивающими, что совершенно невозможно получить при классическом инженерном расчете. Это обстоятельство вытекает из того, что точка $\left(x = \pm \frac{a}{2}; y = 0 \right)$ — седловая. Поскольку значение напряжения определяется величиной $\left(v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, а для седловой

точки значения слагаемых $v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ разного знака, то при малых η может выполняться $\left| v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|$.

Расчет для равномерного нагружения $q = 10 \text{ кПа}$ дает следующие значения напряжений:

1) экстремальные напряжения в бетоне над стальными балками в верхнем волокне:

$$\max \sigma_x^b \Big|_{z=-h/2} = +1,03 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b \Big|_{z=-h/2} = -3,25 \text{ МПа};$$

2) экстремальные напряжения в бетоне в пролете в верхнем волокне:

$$\sigma_x^b|_{z=-h/2} = -1,36 \text{ МПа}; \quad \sigma_y^b|_{z=-h/2} = -3,65 \text{ МПа};$$

3) максимальные напряжения в стальной балке $\sigma_y^s = 68,29 \text{ МПа}$.

Расчет по стандартной методике дает:

$$\sigma_x^b|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{q_0 a^2}{h^2} = \pm 0,79 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b|_{z=-h/2} = -\frac{E_{b,\tau}}{(EI)_{sb,\tau}} \cdot M \left(\bar{z}_0 + \frac{h}{2} \right) = -3,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^s = 69,16 \text{ МПа}.$$

Эпюра напряжений σ_x^b приведена на рис. 5.

Максимальные напряжения σ_x^b достигаются не над серединой стальных балок, а на расстоянии около трети пролета от опор.

То же с учетом длительного модуля деформации $E_{b,\tau}$:

1) экстремальные напряжения в бетоне над стальными балками в верхнем волокне:

$$\max \sigma_x^b|_{z=-h/2} = +2,32 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b|_{z=-h/2} = -1,41 \text{ МПа};$$

2) экстремальные напряжения в бетоне в пролете в верхнем волокне:

$$\sigma_x^b|_{z=-h/2} = -1,63 \text{ МПа}; \quad \sigma_y^b|_{z=-h/2} = -2,16 \text{ МПа};$$

3) максимальные напряжения в стальной балке $\sigma_y^s = 64,74 \text{ МПа}$.

Расчет по стандартной методике дает:

$$\sigma_x^b|_{z=\pm h/2} = \pm \frac{3}{8} \cdot \frac{q_0 a^2}{h^2} = \pm 0,512 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^b|_{z=-h/2} = -\frac{E_{b,\tau}}{(EI)_{sb,\tau}} \cdot M \left(\bar{z}_0 + \frac{h}{2} \right) = -2,18 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^s = 75,63 \text{ МПа}.$$

Рис. 5. Эпюра напряжений σ_x^b

Видно, что растягивающие напряжения σ_x^b также существенно превышают соответствующую величину из стандартного расчета.

Таким образом, неучет в стандартной методике расчета геометрии прогиба бетонной плиты приводит к некорректным, существенно заниженным значениям напряжений в бетоне, особенно в случае сосредоточенных нагрузок.

Библиографический список

1. Веселов А. А., Чепилко С. О. Напряженно-деформированное состояние сталежелезобетонной балки // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 2 (23). С. 31–37.
2. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. М.; Л.: Госстройиздат, 1933. 371 с.
3. Ефимов П. П. Проектирование мостов. Балочные сплошностенчатые цельнометаллические и сталежелезобетонные мосты. М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2007. 124 с.
4. Замалиев Ф. С. Прочность и деформативность сталежелезобетонных изгибаемых конструкций гражданских зданий при различных видах нагружения: дис. ... д-ра техн. наук. Казань, 2013. 379 с.
5. Замалиев Ф. С., Каюмов Р. А. К расчету сталежелезобетонного перекрытия как ортотропной плиты // Известия КГАСУ. 2014. № 1 (27). С. 94–99.
6. Замалиев Ф. С., Биккинин Э. Г. К расчету сталежелезобетонных плит подкрепленных ребрами // Известия КГАСУ. 2014. № 3 (29). С. 27–31.
7. Корнеев М. М. Сталежелезобетонные мосты: теоретическое и практическое пособие по проектированию. СПб.: ПГУПС, 2015. 400 с.
8. Мартынов Ю. С. Сталежелезобетонные конструкции в промышленном и гражданском строительстве Белорусской ССР: Опыт разработки и внедрения. Минск: БелНИИТИ, 1989. 56 с.
9. Металлические конструкции / под общ. ред. Н. С. Стрелецкого. 3-е изд. М.: Стройиздат, 1961. 776 с.
10. Травуш В. И. и др. Научно-технический отчет по теме: «Разработка стандарта организации «Сталежелезобетонные конструкции. Правила проектирования». Этап 3 (3.3). Примеры расчетов сталежелезобетонных конструкций с применением методик, изложенных в стандарте организации (Дог. № 378/6-24-15/СК от 20 апреля 2015 г.). М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 2015. 78 с.
11. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
12. Сегаль А. И. Прикладная теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1961. 268 с.

13. Стрелецкий Н. Н. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов. М.: Транспорт, 1981. 360 с.

14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

15. Roberts T. M. Steel Concrete Composite Construction / Iványi M., Škaloud M. (eds.). Steel Plated Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences, vol. 358. Springer, Vienna. 1995.

References

1. Veselov A. A., Chepilko S. O. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie stalezhelezobetonnoy balki* [Stress and strain state in a steel-reinforced concrete beam]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2010, no. 2 (23), pp. 31–37.

2. Galerkin B. G. *Uprugie tonkie plity* [Elastic thin plates]. Moscow, Leningrad, Gosstroyizdat Publ., 1933, 371 p.

3. Efimov P. P. *Proektirovanie mostov. Balochnye sploshnostenchatye tsel'nometallicheskie i stalezhelezobetonnye mosty* [Design of bridges. Beam solid-walled all-metal and steel concrete bridges]. Moscow, Uchebno-metodicheskiy tsentr po obrazovaniyu na zheleznodorozhnom transporte Publ., 2007, 124 p.

4. Zamiliev F. S. *Prochnost' i deformativnost' stalezhelezobetonnykh izgibaemykh konstruktsey grazhdanskikh zdaniy pri razlichnykh vidakh zagruzheniya*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Strength and deformability of steel-concrete bending structures of civil buildings under different loading types. Dr. Sci. Tech. diss.]. Kazan', 2013, 379 p.

5. Zamiliev F. S., Kayumov R. A. *K raschetu stalezhelezobetonного perekrytiya kak ortotropnoy plity* [About calculation of steel-concrete composite slab as an orthotropic plate]. *Izvestiya KGASU – Bulletin of KSUAE*, 2014, no. 1 (27), pp. 94–99.

6. Zamiliev F. S., Bikinin Eh. G. *K raschetu stalezhelezobetonnykh plit podkreplennykh rebrami* [To the calculation of steel-concrete slabs supported by ribs]. *Izvestiya KGASU – Bulletin of KSUAE*, 2014, no. 3 (29), pp. 27–31.

7. Korneev M. M. *Stalezhelezobetonnye mosty: teoreticheskoe i prakticheskoe posobie po proektirovaniyu* [Steel concrete bridges: theoretical and practical guidance on design]. St. Petersburg, PGUPS Publ., 2015, 400 p.

8. Martynov Yu. S. *Stalezhelezobetonnye konstruksii v promyshlennom i grazhdanskom stroitel'stve Belorusskoy SSR. Opyt razrabotki i vnedreniya* [Steel-concrete structures in industrial and civil construction of the Belarussian SSR. Experience of development and implementation]. Minsk, BelNIINTI, 1989, 56 p.

9. *Metallicheskie konstruksii* [Metal construction]. 3-rd edition, ed. by Streletskiy N. S. Moscow, Stroyizdat Publ., 1961, 776 p.

10. Travush V. I., et al. *Nauchno-tekhnicheskiy otchet po teme: «Razrabotka standarta organizatsii «Stalezhelezobetonnye konstruksii. Pravila proektirovaniya»». Ehtap 3 (3.3). Primery raschetov stalezhelezobetonnykh konstruktsey s primeneniem metodik, izlozhennykh v standarte organizatsii (Dog. no. 378/6-24-15/SK ot 20 aprelya 2015 g.)* [Scientific and technical report on the topic: Development of the organization standard "Steel-concrete structures. Design rules". Stage 3 (3.3). Examples of steel-concrete structures calculations using the methods set out in the standard of the organization (Dog. # 378/6-24-15/UK of 20 April 2015)]. Moscow, TsNIISK im. Kucherenko Publ., 2015, 78 p.

11. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnost* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 264 p.

12. Segal' A. I. *Prikladnaya teoriya uprugosti* [Applied theory of elasticity]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1961, 268 p.

13. Streletskiy N. N. *Stalezhelezobetonnye proletnye stroeniya mostov* [Concrete and steel superstructures of bridges]. Moscow, Transport Publ., 1981, 360 p.

14. Timoshenko S. P., Gud'er Dz. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 560 p.

15. Roberts T. M. Steel concrete composite construction. Ed. by Iványi M., Škaloud M. *Steel Plated Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences*, vol. 358. Springer, Vienna. 1995.