УДК 539.3

© Л. М. Коган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-4-46-52

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ЗА ПРЕДЕЛОМ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

STABILITY OF THE ROD WITH VARIABLE CROSS-SECTION BEYOND THE ELASTIC LIMIT

Предлагается новый способ решения задачи о бифуркации равновесия указанного в заголовке стержня, а именно: применяется прямое интегрирование дифференциального уравнения изгиба. Способ иллюстрируется примерами. Предложено также приближенное решение задачи.

Ключевые слова: устойчивость стержня за пределом пропорциональности, переменное сечение, метод решения.

A new method is proposed for solving the bifurcation problem for the rod indicated in the title, namely, direct integration of the differential bending equation is applied. The method is illustrated with examples. An approximate solution of the problem is proposed.

Keywords: stability of the rod beyond the elastic limit, variable cross-section, computational technique.

Работа рассматривает устойчивость стержней переменного сечения за пределом пропорциональности, распространяет на такие стержни подход, предложенный в [1] для упругих стержней, а именно решает задачу о бифуркации равновесия идеально прямого стержня непосредственным интегрированием дифференциального уравнения изгиба.

Состояние вопроса. Теория устойчивости стержня за пределом пропорциональности приняла свой современный вид после исследований Шенли [2]. Он показал, что за пределом пропорциональности величина сжимающей силы, при которой возможен изгиб стержня, зависит от малых изменений ее модуля в процессе деформирования, то есть зависит от типа возмущения. Выяснилось, что критические силы по теории касательного модуля Энгессера [3] и по теории приведенного модуля Энгессера [4] и Кармана [5]¹ дают границы для критического значения.

Для проектирования современная теория в качестве расчетного значения предлагает касательно-модульную критическую силу P_k

(если отвлечься от влияния начальных несовершенств и остаточных напряжений). Вычислить силу P_k можно, решая задачу о бифуркации равновесия [7].

Для стержня постоянного сечения длиной l , сжатого силой на торце, силу P_k подсчитывают следующим образом. На основе решения упругой задачи вводят приведенную длину стержня $l_{пр}$. Касательно-модульное критическое напряжение $\sigma_{кр}$ определяет единственный геометрический параметр, гибкость $\Lambda = l_{пр} / i$ (различаем величины Λ и $\lambda = l / i$, которые в литературе называют одинаково)²:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_k}{\Lambda^2}. \quad (1)$$

Касательный модуль E_k однозначно зависит от $\sigma_{кр}$, а уравнение (1) является трансцендентным уравнением относительно $\sigma_{кр}$. Определив $\sigma_{кр}(\Lambda)$, находят критическую силу: $P_k = \sigma_{кр} A$. Решать упругопластическую задачу не требуется. Достаточно воспользоваться единой для стерж-

¹ На русском языке история развития последних двух теорий изложена в работе [6, с. 343].

² Термин «приведенная длина» ввел в научный оборот Ясинский [8]. Это понятие он применял, определяя приведенно-модульную силу. Вообще говоря, такая сила зависит от нескольких геометрических параметров.

ней из одного материала зависимостью критического напряжения $\sigma_{кр}(\Lambda)$.

Для стержня переменного сечения и для стержня, сжатого изменяющейся вдоль оси стержня нагрузкой, требуется решать упругопластическую задачу, причем теперь нельзя одним параметром точно учесть влияние геометрии на результат. Для такого стержня приближенный способ решения задачи предложен Тимошенко [9], состоит в следующем. Пусть $\sigma_{кр}$ — максимальное по длине стержня напряжение, а $I_{\max}$, $i_{\max}$, $A_{\max}$ — момент инерции, радиус инерции и площадь сечения с таким напряжением. Вводится в рассмотрение призматический стержень с только что указанными геометрическими параметрами. Его приведенная длина вычисляется по решению упругой задачи для исходного стержня, критическое же напряжение находится по уравнению (1). Результат таков:

$$l_{пр} = \sqrt{\pi^2 / K_y} \cdot l, \Lambda = l_{пр} / i_{\max}, \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_k}{\Lambda^2}, \quad P_k = \sigma_{кр} A_{\max}. \quad (2)$$

Коэффициент K_y определен решением упругой задачи для стержня переменного сечения. Приближенность способа в том, что не учтено изменение касательного модуля по длине.

Приведение стержня переменного сечения к эквивалентному стержню постоянного сечения остается основным приемом расчета стержней обсуждаемого типа [10].

Формулировка задачи. Рассматриваем прямолинейный стержень переменного сечения, сжатый силами постоянного направления. Задачу устойчивости ставим как задачу о бифуркации равновесия. Вычисляем касательно-модульную силу P_k , $I(x)$, $A(x)$ — момент инерции и площадь поперечного сечения в произвольном сечении стержня.

Стержень, сжатый силой P на торце. Дифференциальное уравнение изгиба записываем через изгибающий момент в сечении:

$$M'' + \frac{P_k}{E(\sigma(x))I(x)} M = 0. \quad (3)$$

Касательный модуль $E(\sigma)$ зависит от уровня напряжения, а значит и от координаты x сечения, его представляем в виде

$$E(\sigma) = E_y \varphi(\sigma),$$

где E_y — модуль упругости, а функция $\varphi(\sigma) \leq 1$ зависит только от материала.

Вводим безразмерную продольную координату $\bar{x} = x / l$ и фиксируем некоторое сечение. Момент инерции и площадь в этом сечении обозначаем за I_0 , A_0 . В произвольном сечении имеем

$$I(\bar{x}) = I_0 f(\bar{x}), A(\bar{x}) = A_0 h(\bar{x}). \quad (4)$$

За $A_{\min} = A_0 h_{\min}$ обозначаем площадь в сечении с максимальным нормальным напряжением.

Вводим безразмерный параметр критической силы:

$$K = \frac{P_k}{E_y I_0} l^2. \quad (5)$$

Гибкость $\lambda_0 = l / \sqrt{A_0 / I_0} = l / i_0$ связываем с фиксированным сечением стержня, критическим же называем максимальное по длине нормальное напряжение в момент потери устойчивости:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_k}{A_{\min}} = \frac{K E_y I_0}{A_0 h_{\min} l^2} = \frac{K E_y}{\lambda_0^2 h_{\min}}. \quad (6)$$

Во всех других сечениях напряжение меньше критического:

$$\sigma(\bar{x}) = P_k / A(\bar{x}) = \sigma_{кр} h_{\min} / h(\bar{x}) \leq \sigma_{кр}.$$

Выразим параметр K через $\sigma_{кр}$ и λ_0 : $K = \sigma_{кр} \lambda_0^2 h_{\min} / E_y$. В новых переменных уравнение (3) принимает вид

$$M'' + \frac{K}{f(\bar{x})\psi(\bar{x}, K)} M = 0. \quad (7)$$

Завершает формулировку задачи построение функции $\psi(\bar{x}) = \psi(\sigma(\bar{x}, K))$.

Обозначив за K_y критический параметр для упругого стержня, приравнявая критическое напряжение $\sigma_{кр}$ пределу пропорциональности $\sigma_{пп}$, находим граничное значение λ_y

$$\lambda_y = \sqrt{\frac{K_y E_y}{\sigma_{пп}} \frac{1}{h_{\min}}}, \quad (8)$$

начиная с которого нужно учитывать пластичность.

Когда $\lambda_0 < \lambda_y$, уравнение

$$h(\bar{x}_1) = \frac{K E_y}{\lambda_0^2} \frac{1}{\sigma_{пп}} \quad (9)$$

задает координату $0 \leq \bar{x}_1 \leq 1$ сечения, отделяющего упругую и неупругую части стержня. В результате функция ψ определена: $\psi = 1$ при $\lambda_0 \geq \lambda_y$, задана уравнением $\psi = E(\sigma(\bar{x}, K)) / E_y$ при $\lambda_0 < \lambda_y$.

Стержень, сжатый распределенной силой. Пусть K — параметр нагрузки, $K \cdot n(\bar{x})$, $K \cdot r(\bar{x})$ — продольная сила в сечении и интенсивность распределенной силы. За w обозначаем прогиб, умноженный на жесткость $E_y I_0$. Уравнение из-

гиба теперь записываем как систему двух уравнений:

$$M'' + K \frac{n(\bar{x})}{f(\bar{x})\psi(\bar{x}, K)} M + Kr(\bar{x})w' = 0; \quad (10)$$

$$w'' = -\frac{M}{f(\bar{x})\psi(\bar{x}, K)}.$$

Координату, отделяющую упругую и неупругую части стержня, определяет уравнение

$$h(\bar{x}_1) = \frac{KE_y}{\lambda_0^2 \sigma_{пп}} n(\bar{x}_1). \quad (11)$$

Геометрический параметр теории. Приведенная длина $l_{пр}$ удобна для стержня постоянного сечения, сжатого силой на торце. Действительно, для такого стержня уравнение (7) имеет вид:

$$M'' + \frac{K(\sigma_{кр})}{\varphi(\sigma_{кр})} M = 0; \quad K = \frac{\sigma_{кр} \lambda_0^2}{E_y}. \quad (12)$$

В нем критическое значение K/φ зависит только от условий закрепления, что естественно учесть с помощью $l_{пр}$.

Для стержня переменного сечения приведенная длина неудобна, так как коэффициент приведения $\pi/\sqrt{K_y}$ зависит и от закрепления стержня, и от закона изменения жесткости. Далее применяем непосредственно величину K_y для упругого стержня. Гибкость λ_0 связываем с фиксированным сечением. Площадь такого сечения в $h_{мин}$ раз больше площади в сечении с максимальным напряжением, поэтому вместо гибкости Λ используем следующий аналог этой величины: $\sqrt{\frac{h_{мин}}{K_y}} \lambda_0$. Критическое напряжение $\sigma_{кр}$ задаем в долях предела текучести σ_T . Вводим параметр

$$\xi = \sqrt{\frac{h_{мин}}{K_y} \frac{\sigma_T}{E_0}} \lambda_0. \quad (13)$$

В результате для упругого и неупругого стержней имеем для критического напряжения соответственно

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_T}{\xi^2}, \quad \sigma_{кр} = \frac{K}{K_y} \frac{\sigma_T}{\xi^2}. \quad (14)$$

Здесь K — критический параметр нагрузки за пределом упругости. Неупругое поведение наступает, когда $\sigma_{кр} > \sigma_{пп}$, то есть при $\xi < \sqrt{\sigma_T/\sigma_{пп}}$. Выражение для критического напряжения без множителя π^2 выглядит непривычно, поэтому напомним, что этот множитель связан с «приведением» произвольно опертого стержня к стержню с шарнирными опорами на обоих торцах.

Вычисление критической силы прямым интегрированием дифференциальных уравнений. В работе [1] задача о бифуркации равновесия упругого стержня решена прямым интегрированием дифференциальных уравнений. Такой подход применим и к обсуждаемой задаче. В [1] подход подробно описан, иллюстрирован большим числом примеров, поэтому ниже приводим только идею подхода.

Как известно, перемещения и усилия в задаче о бифуркации равновесия вычисляются с точностью до множителя. Это свойство задачи позволяет поступить следующим образом.

Выбираем некоторую компоненту f решения и принимаем, что в точке x_0 она равна единице: $f(x_0) = 1$. Заменяем какое-либо однородное граничное условие исходной задачи, например, условие $g(0) = 0$, неоднородным условием $f(x_0) = 1$. Получаем вспомогательную неоднородную краевую задачу с неизвестной нагрузкой P . Решение этой задачи для каждого P единственно, его можно найти численным интегрированием дифференциальных уравнений.

Критическую нагрузку P_k определяем, подчинив решение вспомогательной задачи отброшенному граничному условию $g(0) = 0$.

Описанный прием решения далее иллюстрирован примерами.

О приближенном решении (2). Покажем, что решение (2) занижает критическую силу. Рассмотрим призматический шарнирно опертый стержень, для которого параметр K_y совпадает со значением для стержня переменного сечения, то есть «приведем» стержень переменного сечения к стержню постоянного сечения. Для призматического стержня критический параметр $K/\varphi(\sigma_{кр})$ не зависит от координат, равен K_y , поэтому для неупругого «приведенного» стержня имеем:

$$K = \varphi(\sigma_{кр}) K_y. \quad (15)$$

Изгиб стержня переменного сечения в упругой и неупругой областях описываем уравнениями

$$M_y'' + \frac{K_y}{f(\bar{x})} M_y = 0; \quad (16)$$

$$M'' + \frac{K_{пп}}{f(\bar{x})\psi(\bar{x})} M = 0. \quad (17)$$

Умножая (16) на M_y , интегрируя вдоль стержня, получаем точное равенство

$$K_y = - \int_0^1 M_y'' M_y d\bar{x} / \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Здесь M_y — форма критического момента.

Найдем приближенное значение K , применив к (17) метод Бубнова–Галеркина. В качестве базисной функции используем решение упругой задачи, то есть считаем $M = CM_y$, где $\tilde{N}$ — постоянная. Получаем приближенно

$$K = K_y \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) d\bar{x} / \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (18)$$

Здесь учтено уравнение (16). Согласно [11] ошибка полученного приближенного равенства невелика.

Применив к интегралу в знаменателе теорему о среднем, находим

$$K = \psi(\bar{x}) K_y \geq \phi(\sigma_{кр}) K_y. \quad (19)$$

Здесь $\psi(\bar{x})$ — значение при некотором $\bar{x}$. Учтено, что $\sigma_x \leq \sigma_{кр}$, откуда следует $\psi(\bar{x}) \geq \phi(\sigma_{кр})$, причем равенство имеет место только для призматического стержня.

Величина $\phi(\sigma_{кр}) K_y$ представляет собой приближенное решение (2), то есть в стержне переменного сечения решение (2) занижает значение K .

Новое приближенное решение. Приближенный способ решения (2) можно несколько уточнить, применяя формулу (18). С этой целью выразим напряжение в произвольном сечении в долях критического $\sigma_x = N(\bar{x}) / A(\bar{x}) = \sigma_{кр} \cdot s(\bar{x})$, запишем это напряжение в обозначениях (14)

$$\sigma_x(\bar{x}) = \frac{K}{K_y} \frac{\sigma_T}{\xi^2} s(\bar{x}) \quad (20)$$

и вспомним, что $\psi(\bar{x}, K) = E(\sigma(\bar{x})) / E_y$. Уравнение (18) превращается в трансцендентное уравнение относительно K

$$K = K_y \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) d\bar{x} / \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) \psi(\bar{x}, K) d\bar{x}, \quad (21)$$

которое содержит параметр ξ . Отыскание параметра K по известному ξ эквивалентно отысканию $\sigma_{кр}$ по известным ξ или λ_0 .

Поставим задачу по-другому, а именно, вычисляем ξ по заданному $\sigma_{кр}$. Используя (18), получаем

$$\xi^2 = \frac{\frac{\sigma_T}{\sigma_{кр}} \int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) d\bar{x}}{\int_0^1 M_y^2 / f(\bar{x}) \psi(\bar{x}, \sigma_{кр}) d\bar{x}}. \quad (22)$$

Как показывает пример ниже, последнее равенство выполняется с высокой точностью, пока не началось упрочнение, то есть пока $\sigma_{кр} < \sigma_T$.

Приближенные решения (21), (22) требуют численного интегрирования сложных функций, поэтому применение этих решений лишь несущественно проще прямого интегрирования дифференциальных уравнений.

Примеры. Критическая нагрузка вычисляется для стержней переменного сечения из стали Ст3. Функция $\phi(\sigma)$ для такой стали при $\sigma > \sigma_{пп}$ принимается по экспериментальным данным [7, с. 93, табл. 2.2], учитывает как площадку текущей, так и последующее упрочнение, поэтому напряжения могут превосходить предел текучести:

$$\phi(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} 1 - 0,999 \frac{\sigma - \sigma_{пп}}{\sigma_T - \sigma_{пп}}^{0,85}, & \sigma_{пп} < \sigma \leq \sigma_T; \\ 0,001, & \sigma_T < \sigma < 1,004\sigma_T; \\ 0,005 / 2,1, & 1,004\sigma_T \leq \sigma. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь $\sigma_{пп} = 20$ кН/см², $\sigma_T = 24$ кН/см², $E_0 = 2 \cdot 10^4$ кН/см². Соответствующая диаграмма при осевом сжатии показана на рис. 1.

Стержень на двух шарнирных опорах. Стержень длиной l сжат силой P на торце. I_0, A_0 — момент инерции и площадь сечения нижнего торца. Геометрические параметры изменяются по закону

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= I(\bar{x}) / I_0 = (1 - \alpha \bar{x})^n; \\ h(\bar{x}) &= A(\bar{x}) / A_0 = (1 - \alpha \bar{x})^{n-2}. \end{aligned} \quad (24)$$

При $n = 3$ получаем тонкостенную трубу со стенкой постоянной толщины и наружными размерами, пропорционально уменьшающимися с высотой, при $\alpha = 4$ получаем стержень, у которого пропорционально изменяются все размеры сечения, минимальная площадь $h_{\min} = h(1)$.

Геометрический параметр $\lambda_0 = l / \sqrt{I_0 / A_0}$, r_0 — радиус сечения в начале координат. Параметр $K = P_{кр} l^2 / E_y I_0$.

Рис. 1

Нормальное напряжение в начале координат $\sigma_0 = KE_0 / \lambda_0^2$. Максимально напряжение на верхнем торце: $\sigma_{кр} = KE_0 / h(1)\lambda_0^2$. Координата $\bar{x}_1$, отделяющая упругую и неупругую части стержня, задана уравнением $h(\bar{x}) = \sigma_0 / \sigma_{пп}$. Функция $\psi(\bar{x})$ такова: при $\sigma_{кр} < \sigma_{пп}$ $\psi(\bar{x}) = 1$, иначе для $\bar{x} > \bar{x}_1$ $\psi(\bar{x}) = \varphi(E_y K / h(\bar{x})\lambda^2)$, для $\bar{x} \leq \bar{x}_1$ $\psi(\bar{x}) = 1$.

Дифференциальное уравнение изгиба (7) дополняем граничными условиями

$$M(0) = 0, M(1) = 0.$$

Вводим вспомогательную граничную задачу для этого уравнения, заменяя условие $M(1) = 0$ условием $M'(0) = 1$:

$$M''(\bar{x}) + \frac{K}{f(\bar{x})\psi(\bar{x})} M(\bar{x}) = 0, M(0) = 0, M'(0) = 1.$$

Здесь функция $\psi(\bar{x})$ зависит от $\bar{x}$ и K . Построив средствами Mathcad решение $M(K, \bar{x})$ вспомогательной задачи, критический параметр K находим как корень уравнения

$$M(K, 1) = 0. \quad (25)$$

По известному K критическое напряжение $\sigma_{кр}$ определяем согласно (6).

Вычисления средствами Mathcad для упругого стержня подробно воспроизведены в [11], поэтому здесь укажем лишь на одно отличие.

Так как функция $\psi(\bar{x})$ зависит от K , при высоком уровне напряжения $\sigma_{кр}$ у уравнения (25) появляются близко расположенные корни. Это нужно учитывать, назначая стартовое значение σ_c поиска при итерационном решении уравнения. Когда $\sigma_{кр}$ близко к σ_T , стартовым удобно принять $\sigma_c = \sigma_T \lambda_0^2 h_{\min} / E_y$.

На рис. 2, а представлена зависимость $\sigma_{кр}$ от параметра λ . Кривая 0 — стержень постоянного сечения ($K_y = \pi^2, h_{\min} = 1$); кривые 1, 2 — стержень

трубчатого сечения $n = 3, \alpha = 0,1$ ($K_y = 8,43444, h_{\min} = 0,9$) и $\alpha = 0,4$ ($K_y = 4,6852, h_{\min} = 0,6$).

На рис. 2, б дана зависимость $\sigma_{кр}$ от параметра ξ . Кривая 3 рисунка — стержень сплошного сечения $n = 4, \alpha = 0,4$ ($K_y = 3,5531, h_{\min} = 0,6$). Неупругое поведение наступает при $\xi < 1,095$. Пунктиром показано значение $\sigma_{кр} / \sigma_T = 1$.

Для стержня переменного сечения кривая 0 (см. рис. 2, б) соответствует приближенному решению (2), совпадая одновременно с точным решением для стержня постоянного сечения. В соответствии с неравенством (19) кривая располагается ниже точных кривых для стержней переменного сечения. Обратим внимание на существенное различие приближенной и точных кривых.

Отметим эффект, который наблюдается только в стержне переменного сечения: потеря устойчивости может происходить на стадии упрочнения материала, когда $\sigma_{кр} > \sigma_T$. Для стержней, у которых сечение существенно изменяется по длине, эффект может иметь не только теоретическое, но и практическое значение.

На рис. 3, а сопоставляются точное решение для трубчатого стержня ($n = 3, \alpha = 0,4$, кривая 2 рис. 2) с приближенным решением (22), дополнительно область неупругого поведения показана крупно (рис. 3, б). Видно практическое совпадение кривых в области правее вертикальной черты, когда $\sigma_{кр} < \sigma_T$. Когда изгибная жесткость части стержня вследствие упрочнения материала начинает увеличиваться, то есть при $\sigma_{кр} > \sigma_T$, приближенное решение неверно, показано точками, дает вместо роста уменьшение $\sigma_{кр}$ вместе с ξ .

Рис. 2

Рис. 3

Стержень, сжатый равномерно распределенной силой. Стержень постоянного сечения, сжатый распределенной силой, превращается в стержень переменной жесткости, когда сжимающее напряжение в некотором сечении превосходит предел пропорциональности. Опираясь на результат (14), естественно ожидать, что при тех же самых параметрах λ_0 или ξ критическое напряжение в таком стержне превзойдет критическое напряжение в стержне, сжатом силой на торце. Проверим это предположение на примере.

Рассматриваемый стержень показан на рис. 4. Параметром нагрузки считается величина $K = ql^3 / E_y I_0$. Дифференциальное уравнение изгиба записываем в виде системы двух уравнений, используя безразмерные величины:

$$M'' + \frac{K(1-\bar{x})}{\psi(\bar{x})} M + Kw' = 0, \quad w'' = -\frac{M}{\psi(\bar{x})}.$$

Координата сечения, отделяющего при $\sigma_{кр} > \sigma_{пп}$ упругую и неупругую части стержня, такова: $\bar{x}_y = \sigma_{кр} / \sigma_{пп} - 1$. При $\sigma_{кр} < \sigma_{пп}$ функция $\psi(\bar{x}) = 1$, при $\bar{x} \leq \bar{x}_y$ $\psi(\bar{x}) = \varphi(t(\bar{x}))$, $t = E_y K(1-\bar{x}) / \lambda_0^2$.

Граничные условия вспомогательной граничной задачи имеют вид:

$$M(0) = 0, \quad M'(0) = 1, \quad w(0) = 0, \quad w(1) = 0.$$

Критический параметр K снова отыскиваем как корень уравнения (25).

$$M(K, 1) = 0.$$

Для упругого стержня $K_y = 18,5687$, это значение используем, вычисляя ξ . На рис. 4 представлена зависимость $\sigma_{кр}$ от λ_0 и ξ для стержней, сжатых распределенной силой и силой на торце (кривые 0 и 1 соответственно). При одном и том же ξ критическое напряжение $\sigma_{кр}$ при сжатии распределенной силой превосходит напряжение при сжатии силой на торце.

Закключение. В работе предложен способ решения задачи об устойчивости стержней переменного сечения за пределом пропорциональности, который вычисляет критические силы прямым интегрированием дифференциальных уравнений.

Способ развивает подход, примененный к упругим стержням в работе [1], где представлены примеры реализации подхода средствами Mathcad.

Библиографический список

1. Каган-Розенцвейг Л. М. Вычисление критических сил в упругих стержнях переменного сечения

Рис. 4

прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 2 (67). С. 78–86.

2. Shanley F. R. Inelastic column theory // J. Aeronautical Sci., 1947. Vol. 14, №. 5. Pp. 261–268. (Русский перевод имеется в книге [6].)

3. Engesser F. Über Knickfestigkeit gerader Stäbe // Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen. 1889. V. 35. S. 455–462.

4. Engesser F. Über Knickfragen // Schweizerische Bauzeitung. 1895. Bd. 26. S. 24–26.

5. von Kármán Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit // Verein Deutscher Ingenieure, Berlin, Heft 81. 1910.

6. Шенли Ф. Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М.: Оборонгиз, 1957. 408 с.

7. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1961. 679 с.

8. Ясинский Ф. С. О сопротивлении продольному изгибу. СПб.: Тип. Ю. Н. Эрлих, 1894.

9. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of elastic stability. New York: McGraw-Hill, 1963. 541 p.

10. Guide to stability design criteria for metal structures / ed. by Ronald D. Ziemian. 6th edition. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, Inc., 2010. 1078 p.

11. Коган-Розенцвейг Л. М. Метод вычисления критических сил в упругих стержнях переменного сечения. Упрощенное уравнение изгиба (III) // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 2 (55). С. 61–66.

References

1. Kagan-Rosenzweig L. M. Vychislenie kriticheskikh sil v uprugikh sterzhnyakh peremennogo secheniya pryamym integririvaniem differentsial'nogo uravneniya izgiba [Calculation of critical forces in elastic rods with

variable cross section by means of direct integration of differential bending equation]. Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2018, no. 2 (67), pp. 78–86.

2. Shanley F. R. Inelastic column theory. J. Aeronautical Sci., 1947, vol. 14, no. 5, pp. 261–268. (Russian translation is available in [6]).

3. Engesser F. Über Knickfestigkeit gerader Stäbe. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1889, vol. 35, pp. 455–462.

4. Engesser F. Über Knickfragen. Schweizerische Bauzeitung, 1895, vol. 26, pp. 24–26.

5. Von Kármán Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit. Verein Deutscher Ingenieure, Berlin, Heft 81, 1910.

6. Shenli F. R. Analiz vesa i prochnosti samoletnykh konstruktсий [Weight-strength analyses of aircraft structures]. Moscow, Oborongiz Publ., 1957, 408 p.

7. Vol'mir A. S. Ustoychivost' uprugikh sistem [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 679 p.

8. Yasinskiy F. S. O soprotivlenii prodol'nomu izgibu [About the resistance to the lateral bending]. St. Petersburg, Yu. N. Ehrlikh Publ., 1894.

9. Timoshenko S. P., Gere J. M. The theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill Publ., 1963, 541 p.

10. Guide to stability design criteria for metal structures. Ed. by Ronald D. Ziemian. 6th edition. Hoboken, N.J., John Wiley & Sons Publ., 2010, 1078 p.

11. Kagan-Rosenzweig L. M. Metod vychisleniya kriticheskikh sil v uprugikh sterzhnyakh peremennogo secheniya. Uproshchennoe uravnenie izgiba (III) [Method to calculate the critical load in elastic rods with variable cross section. Simplified bending equation (III)]. Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2016, no. 2 (55), pp. 61–66.