УДК 539.3

© В. Д. Харлаб, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: vdx33@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-3-73-76

© V. D. Kharlab, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: vdx33@mail.ru

К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА

TO THE ELEMENTARY BENDING THEORY

Статья содержит дальнейшую разработку предложенной автором теоремы «Некоторые решения элементарной теории изгиба совпадают с решениями теории упругости при специальных значениях коэффициента Пуассона»: 1) рассмотрено представляющее самостоятельный интерес сечение в виде квадратного ромба; 2) указана новая группа сечений, охватываемых теоремой.

Ключевые слова: изгиб, элементарная теория, теорема.

The article presents further development of the theorem proposed by the author: "Some solutions of the elementary theory of bending coincide with solutions of the elasticity theory for special values of the Poisson's ratio". Herewith, firstly, a cross section in the form of a square rhombus of independent interest is considered, and, secondly, a new group of sections covered by the theorem is indicated.

Keywords: bending, elementary theory, theorem.

В работах [1, 2] сформулирована теорема, согласно которой некоторые решения элементарной теории изгиба совпадают с точными решениями теории упругости при определенном значении коэффициента Пуассона ν_* . Показано, что теорема верна для сечений в виде круга, эллипса, равнобедренного треугольника (при коэффициенте Пуассона $\nu_* = 0,5$) и прямоугольника (при коэффициенте Пуассона $\nu_* = 0$). Установлено, что для трапециoidalного сечения теорема не справедлива. Настоящая публикация имеет целью дальнейшую разработку вопроса.

Расчетный аппарат рассматриваемой элементарной теории изгиба составляют формула Навье для нормального напряжения σ_x , формула Журавского¹ для вертикального касательного напряжения τ_{xz} и формула Грасгофа для горизонтального касательного напряжения τ_{xy} :

$$\sigma_x = \frac{M}{I} z, \quad \tau_{xz} = \frac{QS}{bI}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} \frac{b'}{b} y.$$

Обозначения предполагаются понятными читателю (они традиционны и подробно разъяснены в [1, 2]).

Справедливость теоремы для конкретного сечения определяется соблюдением двух условий СПЛОШНОСТИ:

¹ По отечественной терминологии.

$$1) \nu_* = -\left\{\left[\frac{S(z)}{b(z)}\right]^n\right\}^{-1} - 1, \quad 0 \leq \nu_* \leq 0,5;$$

$$2) \left[\frac{S(z)}{b^2(z)} b'(z)\right]^n = 0.$$

1. Сечение балки в виде квадратного ромба (рис. 1).

Если рассматривать это сечение в указанных осях, то, согласно формуле Грасгофа, напряжение τ_{xy} будет иметь разрыв при $z = 0$. На этом основании в [1, 2] сделан вывод, что обсуждаемая теорема не охватывает данное сечение (так как решения теории упругости должны быть непрерывными).

Однако можно обойти эту трудность, если разложить поперечную силу на две составляющие $Q_1 = Q_2 = Q/\sqrt{2}$ и искать напряжения от каждой составляющей в отдельности (рис. 2).

В таком случае, в силу того что $b'(z_1) = b'(z_2) = 0$, а следовательно, горизонтальные составляющие касательных напряжений отсутствуют,

$$\tau_{xz1} = \frac{3}{2} \frac{Q_1}{A} \left[1 - \frac{z_1^2}{(h/2)^2}\right],$$

$$\tau_{xy1} = \frac{3}{2} \frac{Q_2}{A} \left[1 - \frac{y_1^2}{(h/2)^2}\right],$$

или, так как $h = b = \sqrt{2}c$, $A = 2c^2$,

Рис. 1

Рис. 2

$$\tau_{xz_1} = \frac{Q}{c^2} \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(1 - 2 \frac{z_1^2}{c^2}\right),$$

$$\tau_{xy_1} = \frac{Q}{c^2} \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(1 - 2 \frac{y_1^2}{c^2}\right).$$

Рассматриваемые как результат применения формулы Журавского, эти напряжения являются средними по ширине соответствующих областей. Но в то же время, согласно нашей теореме, они являются истинными напряжениями для тела с $\nu_* = 0$. В таком случае их можно рассматривать как компоненты полного касательного напряжения в осях y_1, z_1 . Но тогда, проецируя эти компоненты на ось z и суммируя две проекции, получаем компонент τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = \frac{Q}{c^2} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{z^2 + y^2}{c^2}\right),$$

где учтено, что $z_1^2 + y_1^2 = z^2 + y^2$. Аналогично находим второй компонент:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{Q}{c^2} \frac{3}{2} \frac{z_1^2 - y_1^2}{c^2} = \frac{Q}{c^2} \frac{3}{2} \frac{z_1^2 + y_1^2 - 2y_1^2}{c^2} = \\ &= \frac{Q}{c^2} \frac{3}{2} \frac{z^2 + y^2 - 2y^2}{c^2}, \end{aligned}$$

или, с учетом выражения $y_1 = (y + z) / \sqrt{2}$,

$$\tau_{xy} = -3 \frac{Q}{c^4} yz.$$

Полученное решение задачи полностью совпадает с точным решением Сен-Венана при $\nu_* = 0$. Этим теорема существенно подтверждается.

2. Точное решение задачи при произвольном коэффициенте Пуассона. Присм, примененный в п. 1, позволяет найти точное решение для сечения в виде квадратного ромба через решение Сен-Венана для прямоугольного сечения. При этом коэффициент Пуассона может иметь произвольное значение. Введем следующие обозначения:

$$Z_1 \equiv \tau_{xz_1}(Q_1), \quad Y_1 \equiv \tau_{xy_1}(Q_1),$$

$$Z_2 \equiv \tau_{xz_2}(Q_2), \quad Y_2 \equiv \tau_{xy_2}(Q_2).$$

Через эти величины выражаются компоненты напряжений в осях z, y :

$$Z \equiv \tau_{xz}(Q) = (Z_1 - Y_2 + Y_1 + Z_2) / \sqrt{2},$$

$$Y \equiv \tau_{xy}(Q) = (-Z_1 + Y_2 + Y_1 + Z_2) / \sqrt{2}.$$

Значения напряжений, фигурирующих в правых частях этих формул, определяются формулами Сен-Венана, которые с учетом того, что $b = h = \sqrt{2}c$, $A = 2c^2$, имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{Q}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2z_1^2}{c^2} - \lambda \left[\frac{1}{3} - \frac{2y_1^2}{c^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{ch}(\sqrt{2}n\pi z_1 / c)}{\text{ch}(n\pi)} \cos(\sqrt{2}n\pi y_1 / c) \right] \right\}; \\ Y_1 &= \frac{Q}{2\sqrt{2}c^2} \frac{6}{\pi^2} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(n\pi\sqrt{2} \frac{z_1}{c})}{\text{ch}(n\pi)} \sin(n\pi\sqrt{2} \frac{y_1}{c}); \\ Z_2 &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{Q}{c^2} \left\{ 1 - \frac{2z_2^2}{c^2} - \lambda \left[\frac{1}{3} - \frac{2y_2^2}{c^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{ch}(\sqrt{2}n\pi \frac{z_2}{c})}{\text{ch}(n\pi)} \cos(\sqrt{2}n\pi \frac{y_2}{c}) \right] \right\}; \\ Y_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Q}{c^2} \frac{6}{\pi^2} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(n\pi\sqrt{2} \frac{z_2}{c})}{\text{ch}(n\pi)} \sin(n\pi\sqrt{2} \frac{y_2}{c}), \end{aligned}$$

где $\lambda = \nu / (1 + \nu)$.

В приведенных зависимостях надо перейти от координат y_1, z_1, y_2, z_2 к координатам y, z :

$$y_1 = (y + z) / \sqrt{2}, \quad z_1 = (-y + z) / \sqrt{2};$$

$$y_2 = (y - z) / \sqrt{2}, \quad z_2 = (y + z) / \sqrt{2}.$$

Рис. 3

Все полученные формулы, определяющие решение задачи, легко и с большой быстротой обрабатываются расчетным комплексом MathCAD. Частично результаты выполненных расчетов приведены на рис. 3.

Судя по рис. 3, в угловой точке напряжения равны нулю, но это не совсем так. Действительно, при $c = 10, v = 0,5, Q = 1000$ имеем $Z(c, 0) = 0,01$ (отметим, что вычисления выполнены с удержанием в рядах 100 членов, то есть с высокой точностью). Указанное угловое напряжение — малая величина по сравнению с напряжениями в других точках (например, в центре $Z(0, 0) = 6,753$). Тем не менее данный результат ставит под сомнение достоверность утверждения [3], что в выступающих углах сечения напряжения строго равны нулю. Вопрос требует дальнейшего изучения.

3. Группа особых сечений². Имеются в виду сечения, контур которых описывается уравнением

$$z(y) = \left[1 - \left(\frac{|y|}{\alpha}\right)^{1/v}\right]^{0,5},$$

где α — параметр (определяет генеральные размеры сечения); v — коэффициент Пуассона. Особенностью этих сечений является то, что вертикальные касательные напряжения τ_{xz} равномерно распределены по ширине сечения. Это обстоятельство (поскольку так же распределены напряжения Журавского) сразу же наводит на мысль, что для указанных сечений справедлива наша теорема. Ниже это предположение проверяется.

Пусть $\alpha = 1, v = 0,25$. Этому соответствует сечение, верхняя половина которого показана на рис. 4.

Проверяем выполнение условий сплошности:

$$b(z) = 2\alpha(1 - z^2)^v, S(z) = \int_z^{h/2} zb(z)dz,$$

$$\Phi(z) = -\left[\frac{S(z)}{b(z)}\right]', v_*(z) = \Phi^{-1}(z) - 1 = 0,25,$$

$$\Psi(z) = \left[\frac{S(z)}{b^2(z)}b'(z)\right]',$$

$$\Psi(0) = 4,707 \cdot 10^{-7}, \Psi(1) = -7,732 \cdot 10^{-13}.$$

То, что первое условие сплошности удовлетворяется именно при $v = 0,25$ (значении коэффициента Пуассона, задействованном в уравнении контура сечения), а второе условие сплошности выполняется с высокой точностью и безусловно, подтверждает нашу гипотезу.

Для большей убедительности приведем еще один пример. Пусть $v = 0,5, \alpha = 4$. Сечение (верхняя часть) показано на рис. 5, слева. Проверка дала положительный ответ на вопрос о справедливости теоремы:

$$v_* = \Phi^{-1}(z) - 1 = 0,5,$$

$$\Psi(0) = 3,175 \cdot 10^{-7}, \Psi(0,999) = 9,255 \cdot 10^{-12}.$$

Чтобы найти напряжения, потребовался момент инерции сечения:

$$I = \int_0^1 \int_0^{b(z)/2} z^2 dy dz \cdot 4 = 3,142.$$

Рис. 4

² Сведения получены от Л. М. Кагана-Розенцвейга, за что автор приносит ему свою благодарность.

Рис. 5

Эпюры напряжений показаны на рис. 5. Обращает на себя внимание значительная величина напряжения τ_{xy} сравнительно с напряжением τ_{xz} . Это объясняется вытянутостью сечения в направлении оси y и пропорциональностью напряжения координате y .

Были рассмотрены и другие сечения из группы особых — с тем же результатом. Таким образом, область приложений обсуждаемой теоремы заметно расширена.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д. Развитие элементарной теории касательных напряжений при плоском изгибе балок (III) // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 5 (64). С. 77–82.

2. Харлаб В. Д. Об одном любопытном свойстве элементарной теории изгиба // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 1 (66). С. 53–56.

3. Каган-Розенцвейг Л. М. Техническая теория касательных напряжений в изгибаемом стержне // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 3 (62). С. 40–49.

References

1. Kharlab V. D. *Razvitie ehlementarnoy teorii kasatel'nykh napryazheniy pri ploskom izgibe balok (III)* [Development of the elementary theory for shear stresses at simple bending of beams (III)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 5 (64), pp. 77–82.

2. Kharlab V. D. *Ob odnom lyubopytnom svoystve ehlementarnoy teorii izgiba* [About one interesting feature of the elementary bending-moment theory]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2018, no. 1 (66), pp. 53–56.

3. Kagan-Rozentsveyg L. M. *Tekhnicheskaya teoriya kasatel'nykh napryazheniy v izgibaemom sterzhne* [Technical theory of shearing stresses in a bent rod]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 3 (62), pp. 40–49.