УДК 624.042

© Д. Н. Низомов, д-р техн. наук, профессор

© И. К. Каландарбеков, д-р техн. наук, доцент

© И. И. Каландарбеков, аспирант

(Институт геологии, сейсмостойкого строительства
и сейсмологии Академии наук Республики

Таджикистан)

E-mail: tiees@mail.ru, kalandarbekov-55@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-3-66-72

© D. N. Nizomov, Dr. Sci. Tech., Professor

© I. K. Kalandarbekov, Dr. Sci. Tech., Associate Professor

© I. I. Kalandarbekov, post-graduate student

(Institute of Geology, Earthquake Engineering
and Seismology Academy of Sciences
of the Republic of Tajikistan)

E-mail: tiees@mail.ru, kalandarbekov-55@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ПЛАТФОРМА–МОДЕЛЬ ЗДАНИЯ»

NUMERICAL MODELING OF THE «PLATFORM–MODEL OF THE BUILDING» DYNAMIC SYSTEM

Рассматривается численное моделирование динамической задачи взаимодействия модели здания с виброплатформой. Разработаны алгоритм и компьютерная программа численного решения задач свободных и вынужденных колебаний системы «платформа–модель здания».

Ключевые слова: вибратор, платформа, модель здания, численное моделирование, вибрационная нагрузка, мгновенная частота, резонансный режим.

The paper considers numerical simulation of the dynamic problem of the building model and the vibroplatform interaction. There have been developed an algorithm and a computer program for the numerical solution of the problems of free and forced oscillations of the «platform and model of the building» dynamic system.

Keywords: vibrator, platform, building model, numerical simulation, vibration load, instantaneous frequency, resonant mode.

Для оценки сейсмостойкости зданий и сооружений, наряду с другими методами экспериментальных исследований, применяется метод испытания на моделях, в котором используется виброплатформа [1–5].

Были проведены исследования свободных линейных и крутильных колебаний от действия мгновенного импульса, а также вынужденных колебаний платформы при различных видах вибрационной нагрузки [6, 7]. В настоящей работе рассматривается решение динамической задачи системы «платформа–модель здания». При математическом моделировании были использованы данные существующей испытательной платформы. Эта платформа состоит из горизонтального стола размерами в плане 6×3,5 м, высотой 43,5 см для размещения в нем испытательных моделей, опор стола, обеспечивающих возможность горизонтального колебательного смещения в заданном направлении, и однокомпонентного воз-

будителя колебаний — вибратора (рис. 1). Эксцентрики, связанные между собой посредством четырех зубчатых шестеренок, вращаются в противоположных направлениях вокруг параллельных осей, в результате составляющие центробежных сил в произвольный момент времени будут равны:

$$P_y = 2p_y = 2p \sin \theta t, P_z = p_z - p_z = 0,$$

где θ — угловая частота вращения ротора. Следует отметить, что составляющие p_z приводят к возникновению знакопеременного крутящего момента $m_t = p_z d$ в вертикальной плоскости, а составляющие p_y дают крутящий момент $m_t = 2p_y e$ в горизонтальной плоскости. По видимому, этим и объясняются полученные в эксперименте данные о колебаниях платформы по осям x и z [8].

Рассмотрим динамическую систему с дискретными параметрами, которая имеет n степеней свободы (рис. 1, б) [15], причем сосредото-

ченные массы могут иметь не только поступательные, но и вращательные движения. Анализ такой задачи сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно представить в векторно-матричной форме [15]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{P}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{M}$ — диагональная матрица масс; $\mathbf{C}$ — матрица затухания (демпфирования); $\mathbf{K}$ — матрица жесткости; $\mathbf{W}$, $\dot{\mathbf{W}}$, $\ddot{\mathbf{W}}$ — векторы перемещения, скоростей и ускорений соответственно; $\mathbf{P}(t)$ — вектор-столбец внешних сил [16].

Анализ сейсмических колебаний системы с конечным числом n степеней свободы сводится также к системе уравнений (1), если произвести замену

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{z}_0(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный вектор-столбец; $\ddot{z}_0(t)$ — ускорение основания при землетрясении [15].

Для решения уравнений движения диссипативной системы с конечным числом степеней свободы (1) в зависимости от вида динамической нагрузки применяются различные аналитические методы [9]. В случаях, когда компоненты $\mathbf{P}(t)$ изменяются не по гармоническому закону, для решения (1) применяется метод разложения по собственным формам [10–12], где искомый вектор представляется в виде

$$\mathbf{W}(t) = q_1(t)\boldsymbol{\Phi}_1 + q_2(t)\boldsymbol{\Phi}_2 + \dots + q_n(t)\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}, \quad (3)$$

где $\mathbf{q}$ — вектор главных (обобщенных) координат; $\boldsymbol{\Phi}$ — матрица форм собственных колебаний.

Подстановка (3) в (1) и умножение всех слагаемых слева на матрицу $\boldsymbol{\Phi}^T$, при условии что матрица затухания пропорциональна матрице масс или матрице жесткости и с учетом условий ортогональности собственных форм колебаний, приводят к системе независимых дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_j + 2n_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = Q_j(t) / M_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$Q_j(t) = \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{P}(t), \quad M_j = \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_j,$$

где M_j , $Q_j(t)$ — обобщенные масса и сила, соответствующие j -й форме собственных колебаний.

Следовательно, решение задачи сводится к определению q_j из (4), как для системы с одной степенью свободы, а затем определению вектора перемещений из (3).

Если условие пропорциональности демпфирования не выполняется, то уравнения для форм колебаний будут связаны обобщенными силами затухания. Матрица затухания в общем может иметь более сложную структуру, учитывающую различные уровни диссипации в разных элементах конструкций [15]. Например, в модели, представленной на рис. 1, конструкция платформы и модель здания имеют различные уровни затухания. Следовательно, при наличии матрицы затухания общего типа решение динамической задачи сводится к совместному интегрированию системы уравнений (1). Одно из преимуществ численного метода по сравнению с аналитическим методом сложения форм колебаний состоит в том, что позволяет исследовать динамиче-

Рис. 1. Модель здания, установленная на виброплатформе (а), и динамическая модель (б)

скую систему с матрицей затухания общего типа. Другим преимуществом численного решения является то, что оно не требует преобразования к нормальным координатам и предварительного вычисления векторов частот и форм собственных колебаний.

Для численного решения динамической задачи проведем последовательную аппроксимацию относительно первой и второй производных искомой функции на отрезке времени $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ [18]; получим выражения для скорости и ускорения, которые можно представить в векторной форме [13]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{W}}_n &= \beta_1(\mathbf{W}_n - \mathbf{W}_{n-1}) / \tau_n - \beta_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} - \tau_n \beta_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}; \\ \ddot{\mathbf{W}}_n &= \alpha_1(\mathbf{W}_n - \mathbf{W}_{n-1}) / \tau_n^2 - \\ &\quad - \alpha_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} / \tau_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1},\end{aligned}\quad (5)$$

$n = 1, 2, \dots, N,$

где $\mathbf{W}_n$, $\dot{\mathbf{W}}_n$, $\ddot{\mathbf{W}}_n$ — векторы перемещений, скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени t_j [17]; α_i , β_i — коэффициенты аппроксимации [13]. Внося выражения (5) в уравнения (1), записанные в момент времени t_j [17], и проводя некоторые преобразования, получаем

$$\tilde{\mathbf{K}}_n \mathbf{W}_n = \mathbf{B}_n; \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_n = \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{M} + \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{C} + \mathbf{K}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_n &= \mathbf{P}_n + \left(\frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{M} + \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{C} \right) \mathbf{W}_{n-1} + \\ &+ \left(\frac{\alpha_2}{\tau_n} \mathbf{M} + \beta_2 \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + (\alpha_3 \mathbf{M} + \tau_n \beta_3 \mathbf{C}) \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}.\end{aligned}\quad (8)$$

Если матрицу демпфирования задавать по Релею как линейную комбинацию матриц жесткости и масс, то обобщенную матрицу жесткости (7) и вектор свободных членов (8) можно записать в виде [16]:

$$\tilde{\mathbf{K}}_n = \tilde{a}_n \mathbf{M} + \tilde{b}_n \mathbf{K}; \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{P}_n + \mathbf{M} \mathbf{U}_{n-1} + a \mathbf{M} \mathbf{V}_{n-1} + b \mathbf{K} \mathbf{V}_{n-1}; \quad (10)$$

$$\tilde{a}_n = \alpha_1 / \tau_n^2 + a \beta_1 / \tau_n, \quad \tilde{b}_n = 1 + b \beta_1 / \tau_n;$$

$$\mathbf{U}_{n-1} = \frac{\alpha_1}{\tau_n^2} \mathbf{W}_{n-1} + \frac{\alpha_2}{\tau_n} \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \alpha_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1};$$

$$\mathbf{V}_{n-1} = \frac{\beta_1}{\tau_n} \mathbf{W}_{n-1} + \beta_2 \dot{\mathbf{W}}_{n-1} + \tau_n \beta_3 \ddot{\mathbf{W}}_{n-1}.$$

Таким образом, численное решение динамической задачи от действия нагрузки, произволь-

но изменяющейся во времени, сводится к следующему. Вначале формируется матрица жесткости $\mathbf{K} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}^T$, где $\mathbf{A}$ — прямоугольная матрица коэффициентов, $\tilde{\mathbf{C}}$ — матрица внутренней жесткости [13]. Исходя из условия устойчивости, выбирается шаг по времени τ_n , который можно принять в долях от периода основного тона свободных колебаний системы. Далее, исходя из начальных условий задачи при $t = 0$, по (10) формируется вектор свободных членов $\mathbf{B}_n$. Затем по (7) формируется матрица обобщенной жесткости, которая при выборе постоянного шага по времени $\tau_n = \tau$ будет иметь элементы, не изменяющиеся во времени. Из решения (6) определяется вектор искомых перемещений $\mathbf{W}_1$, соответствующий моменту времени t_1 . Затем вычисляются векторы деформаций и внутренних усилий, соответствующие моменту времени t_1 [17]:

$$\lambda_1 = -\mathbf{A}^T \mathbf{W}_1, \quad \mathbf{S}_1 = \tilde{\mathbf{C}} \lambda_1. \quad (11)$$

На основе вышеизложенного алгоритма (5)–(11) разработана компьютерная программа и получены результаты численного моделирования системы «платформа–модель здания». Модель трехэтажного каркасного здания в 1/4 натуральной величины имеет следующие параметры: размеры в плане — 3×3 м; сетка колонн — 1,5×1,5 м; сечение колонн — 10×10 см; сечение ригелей — 10×5 см; плита перекрытия — 1,5×1,5×0,04 м; высота этажа $h = 0,75$ м; класс бетона — В7,5; модуль упругости бетона $E_b = 0,5 \cdot 10^4$ МПа; масса платформы $m_0 = 12$ т. Металлические стойки платформы сечением 10×5 см, высотой $h_0 = 43,5$ см, модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа предполагаются жестко защемленными по концам. Модель здания жестко закреплена на поверхности стола платформы. Следовательно, мы имеем расчетную модель с четырьмя степенями свободы системы «платформа–модель здания», которая будет испытывать действия динамической нагрузки, приложенной на уровне массы платформы.

Свободные колебания. Исследования свободных колебаний системы «платформа–модель здания» проводились при различных начальных условиях. Например, на рис. 2 представлены графики свободных колебаний системы от мгновенного импульса, действующего на массу m_0 . При этом масса платформы приобретает началь-

Рис. 2. Свободные колебания системы с учетом затухания: w_0, w_1, w_3 — перемещения масс платформы, первого и третьего этажей соответственно

ную скорость $v_0 = 1/m_0 = 0,8175$ м/с. Результаты численного решения получены при шаге интегрирования $\tau = 0,001$ с. Видно, что колебания платформы $w_0(t)$ происходят почти по гармоническому закону, а колебания модели имеют более сложный характер изменения. Для сравнения отметим, что при отсутствии модели свободные колебания платформы без учета затухания совершаются с периодом $T_0 = 0,7200$ с и амплитудой $w_0 = 9,376$ мм.

Результаты численных экспериментов показывают, что характер колебательного процесса платформы, независимо от начального возмущения, практически остается без изменения. Что касается колебания модели, то из сравнения результатов следует, что при заданной начальной скорости колебательный процесс имеет более сложный характер изменения, чем когда задается вектор начальных перемещений.

Вынужденные колебания. Рассмотрим вынужденные колебания системы «платформа–модель здания» от действия вибрационной нагрузки $p(t)$. Однокомпонентный вибратор с двумя эксцентриками, жестко прикрепленный к конструкции стола платформы, создает центробежные силы $mr\theta^2$, равнодействующая которых $p(t) = 2mr\theta^2 \sin \theta t$ направлена вдоль оси y . На первом этапе исследования системы реализуем алгоритм (6)–(10) с вектором нагрузки

$$P(t) = \{p(t) \ 0 \ 0 \ 0\}^T.$$

Постепенно изменяя скорость вращения ротора двигателя, можно установить то число оборотов в секунду, при котором амплитуда колеба-

ний системы достигает максимума. Так как это имеет место только при резонансе, то частота свободных колебаний системы, найденная таким образом, равняется числу оборотов ротора в секунду [14]. Результаты численного исследования перемещений системы, представленные на рис. 3, получены от действия стационарной гармонической нагрузки

$$p(t) = 2mr\theta^2 \sin \theta t, \text{ где } \theta = 2\pi f \quad (12)$$

при массе эксцентрика $m = 5$ кг, эксцентриситете $r = 12$ см, числе оборотов ротора в секунду $f = 14$ Гц и шаге интегрирования $\tau = 0,001$ с. Кривые 1 и 2, полученные при $\xi = 0,02$, соответствуют перемещениям платформы и массы m_3 системы без дополнительного груза.

Видно, что при $f = 14$ Гц ($T = 1/f = 0,071$ с) система входит в резонанс с максимальным перемещением $w_{0\max} = 2,015 \cdot 10^{-3}$ м. При этом динамический коэффициент, характеризующий отношение максимальной амплитуды к статическому перемещению системы, вызванному силой $p_0 = 2mr\theta^2$, определяется по формуле

$$\mu = w_{0\max} / w_{0st}, \quad w_{0st} = p_0 / k_0,$$

где k_0 — коэффициент жесткости опорных закреплений платформы.

Если учесть, что круговая частота вибрационной нагрузки, при которой система входит в резонанс, $\theta = 2\pi f = 87,92$ рад/с, то получим

$$p_0 = 2mr\theta^2 = 2 \cdot 0,05 \cdot 0,12 \cdot 87,92^2 / 9,81 = 9,465 \text{ кН};$$

$$k_0 = 48EI / h_0^3 = 9,299 \cdot 10^4 \text{ кН/м};$$

$$w_{0st} = p_0 / k_0 = 1,0178 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\mu = w_{0\max} / w_{0st} = 2,015 \cdot 10^{-3} / 1,0178 \cdot 10^{-4} = 19,98.$$

Рис. 3. Резонансные колебания системы «платформа–модель здания»

Сравнение показывает, что основной период свободных колебаний системы, равный 0,07057 с, и период, с которым система входит в резонанс, практически совпадают.

Далее переходим к решению задач, где частота переменной возмущающей силы непостоянна и равномерно возрастает со временем [14]:

$$p(t) = p_0 \sin(at^2/2 + \alpha), \quad (13)$$

здесь a — угловое ускорение; α — начальный фазовый угол возмущающей силы; $p_0 = \text{const}$ — амплитуда нагрузки [14]. В (13) предполагается, что амплитуда переменной силы остается постоянной, и меняется во времени только ее частота. На практике, например при разгоне или остановке вращающихся механизмов, амплитуда переменной силы вследствие неуравновешенности не остается постоянной и содержит член, пропорциональный t^2 [14]. Если учесть, что амплитуда

динамической нагрузки вибратора (см. рис. 1) также зависит от частоты вращения ротора, то можно записать

$$p(t) = 2mr\theta^2(t) \sin \psi(t), \quad (14)$$

где $\psi(t) = \theta t + at^2/2$, $\theta(t) = d\psi/dt = \theta_0 + at$.

В случае, когда частота возмущающей нагрузки в (12) имеет постоянное значение и не изменяется во времени, мы получим гармоническое воздействие. Для нагрузки (13), где круговая частота равномерно возрастает со временем, ее амплитуда не изменяется во времени.

Получены результаты численного моделирования системы «платформа — модель здания» от действия нагрузки типа (13) при $p_0 = 10$ кН, $\alpha = 0$ и различных значениях углового ускорения $a = \omega^2/2\pi n$, где n — целое число [14]. На рис. 4 представлены графики прохождения системы через резонанс в зависимости от значения угло-

Рис. 4. Графики перемещения платформы в системе

вого ускорения a (для $n = 10, 20, 40$) при заданной угловой скорости, равной основной частоте свободных колебаний системы. Как следует из рис. 4, с уменьшением углового ускорения a увеличивается время вхождения в резонанс и амплитуда колебания платформы.

Выводы

Разработаны алгоритм численного моделирования и компьютерные программы динамического исследования системы «платформа–модель здания», состоящей из виброплатформы и модели трехэтажного каркасного здания. Исследования свободных колебаний системы проводились при различных значениях элементов диагональной матрицы масс, кроме первого элемента — массы платформы, которая имеет постоянное значение. При исследовании вынужденных колебаний от действия гармонической нагрузки с частотой, равной основной частоте свободных колебаний, получены резонансные и околорезонансные кривые, которые подтверждают достоверность результатов по анализу свободных колебаний системы. Проведенные численные эксперименты действия на систему различных видов динамической нагрузки показали, что при прохождении через резонанс наибольший эффект дает гармоническая нагрузка.

Библиографический список

1. Завриев К. С. и др. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений. М.: Стройиздат, 1970. 224 с.
2. Аронов Р. И. Испытание сооружений. М.: Высшая школа, 1974. 187 с.
3. Шапиро Г. А. Вибрационные испытания зданий. М.: Стройиздат, 1972. 160 с.
4. Шаблинский Г. Э., Зубков Д. А. Натурные динамические исследования строительных конструкций. М.: АСВ, 2009. 216 с.
5. Денисов Б. Е., Тябликов Ю. Е. Мощные виброплатформы для исследования сейсмостойкости на моделях // Сейсмостойкость зданий и инженерных сооружений / под ред. И. И. Гольденבלата. М.: Стройиздат, 1972. С. 171–181.
6. Низомов Д. Н., Каландарбеков И. И. Динамические исследования модели зданий с использованием виброплатформы // Материалы республ. науч.-практ. конф. «Повышение сейсмической безопасности городов и населенных пунктов». Душанбе, 2017. С. 42–48.
7. Низомов Д. Н., Каландарбеков И. И. Исследование реакции виброплатформы при действии динамической

ческой нагрузки общего вида // Материалы республ. науч.-практ. конф. «Повышение сейсмической безопасности городов и населенных пунктов». Душанбе, 2017. С. 49–55.

8. Абдурауфов Х. Ш., Ясунов П. А., Хакимов Ф. Ф. Экспериментальные исследования моделей сооружений на динамические воздействия // Материалы республ. науч.-практ. конф. «Повышение сейсмической безопасности городов и населенных пунктов». Душанбе, 2017. С. 102–109.

9. Вибрации в технике: справочник. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 352 с.

10. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984. 416 с.

11. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: пер. с англ. Л. Ш. Климник, А. В. Швецова. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.

12. Chopra A. K. Dynamics of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. 4th edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2012. 980 p.

13. Низомов Д. Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций. Душанбе: Дониш, 2015. 436 с.

14. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.

15. Каландарбеков И. И. Развитие метода сосредоточенных деформаций применительно к расчетам конструкций с учетом податливости соединений: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2009. 425 с.

16. Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении динамических задач плоских стержневых конструкций // Докл. АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 50. № 5. С. 483–490.

17. Низомов Д. Н., Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций в решении одномерных динамических задач // Докл. АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 3. С. 284–288.

18. Низомов Д. Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М.: АСВ, 2000. 282 с.

References

1. Zavriev K. S., et al. *Osnovy teorii seysmostoykosti zdaniy i sooruzheniy* [Fundamentals of the theory of seismic stability of buildings and structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1970, 224 p.
2. Aronov R. I. *Ispytanie sooruzheniy* [Testing of structures]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1974, 187 p.

3. Shapiro G. A. *Vibratsionnye ispytaniya zdaniy* [Vibration testing of buildings]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1972, 160 p.
4. Shablinskiy G. Eh., Zubkov D. A. *Naturnye dinamicheskie issledovaniya stroitel'nykh konstruksiy* [Natural dynamic research of building designs]. Moscow, ASV Publ., 2009, 216 p.
5. Denisov B. E., Tyablikov Yu. E. *Moshchnye vibroplatformy dlya issledovaniya seysmostoykosti na modelyakh* [Powerful vibroplatforms for seismic stability research on models]. *Seysmostoykost' zdaniy i inzhenernykh sooruzheniy* [Seismic stability of buildings and engineering]. Ed. by. Gol'denblat I. I. Moscow, Stroyizdat Publ., 1972, pp. 171–181.
6. Nizomov D. N., Kalandarbekov I. I. *Dinamicheskie issledovaniya modeli zdaniy s ispol'zovaniem vibroplatformy* [Dynamic research of building models using the vibroplatform]. *Trudy respubl. nauch.-prakt. konf. «Povyshenie seysmicheskoy bezopasnosti gorodov i naselennykh punktov»* [Proc. of the republic sci.-pract. conf. "Increasing the seismic safety of cities and residential areas"]. Dushanbe, 2017, pp. 42–48.
7. Nizomov D. N., Kalandarbekov I. I. *Issledovanie reaksii vibroplatformy pri deystvii dinamicheskoy nagruzki obshchego vida* [Research of vibroplatform's response at action of dynamic loading of general type]. *Trudy respubl. nauch.-prakt.konf. «Povyshenie seysmicheskoy bezopasnosti gorodov i naselennykh punktov»* [Proc. of the republic sci.-pract. conf. "Increasing the seismic safety of cities and residential areas"]. Dushanbe, 2017, pp. 49–55.
8. Abduraufov Kh. Sh., Yasunov P. A., Khakimov F. F. *Ehksperimental'nye issledovaniya modeley sooruzheniy na dinamicheskie voystviya* [Pilot studies of models of constructions on dynamic influences]. *Trudy respubl. nauch.-prakt.konf. «Povyshenie seysmicheskoy bezopasnosti gorodov i naselennykh punktov»* [Proc. of the republic sci.-pract. conf. "Increasing the seismic safety of cities and residential areas"]. Dushanbe, 2017, pp. 102–109.
9. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. T. 1. Kolebaniya lineynykh system* [Vibrations in machinery. Reference book. Vol. 1. Oscillations of linear systems]. Ed. by Bolotin V. V., 1978, 352 p.
10. Smirnov A. F., Aleksandrov A. V., Lashchenikov B. Ya., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy* [Construction mechanics. Dynamics and stability of structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1984, 416 p.
11. Klaf R., Penzien Dzh. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of constructions]. Transl. from English by Klimnik L. Sh., Shvetsov A. V. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979, 320 p.
12. Chopra A. K. *Dynamics of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 4th edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2012, 980 p.
13. Nizomov D. N., Kalandarbekov I. *Metod sosredotochennykh deformatsiy* [A method of the concentrated deformations]. Dushanbe, Donish Publ., 2015, 436 p.
14. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering field]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 439 p.
15. Kalandarbekov I. I. *Razvitie metoda sosredotochennykh deformatsiy primenitel'no k raschetam konstruksiy s uchetom podatlivosti soedineniy. Diss. dokt. tekhn.nauk* [Development of the concentrated deformations method in the case of structure calculations, taking into account the flexibility of joints. Dr. Sci. Tech. diss.]. Moscow, 2009, 425 p.
16. Kalandarbekov I. I. *Metod sosredotochennykh deformatsiy v reshenii dinamicheskikh zadach ploskikh sterzhnevykh konstruksiy* [Concentrated deformations method in the solution of dynamic problems of the flat rod structures]. Report at the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, 2006, vol. 50, no. 5, pp. 483–490.
17. Nizomov D. N., Kalandarbekov I. *Metod sosredotochennykh deformatsiy v reshenii odnomernykh dinamicheskikh zadach* [Concentrated deformations method in solution of one-dimensional dynamic problems]. Report at the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, 2006, vol. 49, no. 3, pp. 284–288.
18. Nizomov D. N. *Metod granichnykh uravneniy v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach stroitel'noy mekhaniki* [The boundary equations method in solving static and dynamic problems of structural mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2000, 282 p.