УДК 539.3

© Л. М. Казан-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-2-78-86

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kagan_R@mail.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРЯМЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА

CALCULATION OF CRITICAL FORCES IN ELASTIC RODS WITH VARIABLE CROSS SECTION BY MEANS OF DIRECT INTEGRATION OF DIFFERENTIAL BENDING EQUATION

Современные математические пакеты позволяют просто и удобно решать краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений при условии, что задача имеет единственное решение. В задачах устойчивости последнее условие не выполняется, а прямое интегрирование уравнений не используется при отыскании решения. Прямое интегрирование уравнений возможно, если изменить привычную последовательность отыскания критических сил. Ниже эта возможность применяется к задачам о бифуркации равновесия упругих сжатых стержней переменного сечения.

Ключевые слова: устойчивость, стержень переменного сечения, новый метод решения.

Modern mathematical packages allow a simple and convenient solution of boundary value problems for systems of ordinary differential equations provided that the problem has a unique solution. In stability problems, the latter condition is not satisfied, and the direct integration of equations is not used there when finding a solution. Direct integration of equations is possible if one changes the usual order to derive the critical force. Below, this possibility is applied to equilibrium's bifurcation problems of compressed elastic rods with variable cross-section.

Keywords: stability, rod with variable cross-section, new solution procedure.

Рассматриваются задачи об устойчивости стержней переменного сечения, перемещения и углы поворота которых малы, а материал линейно упругий. Нагрузка представляет собой систему сосредоточенных и распределенных сил, причем возможны и неконсервативные силы (при условии что потеря устойчивости происходит статически).

Подобные задачи, в основном, решаются численно. Традиционные численные методы решения (методы Бубнова — Галеркина, вариационно-разностный, конечных элементов и другие) требуют существенной предваритель-

ной подготовки, своей для каждого метода, их реализация оказывается достаточно громоздкой.

Ниже применяется прямое интегрирование дифференциальных уравнений с последующим отысканием корня одного обыкновенного уравнения. Удобство такого способа решения в том, что эффективные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений являются составной частью основных математических пакетов. Знать детали этих алгоритмов пользователю необязательно, нужно лишь правильно записывать дифференциальные уравнения и граничные условия задачи.

Автор статьи убедился в простоте и удобстве предлагаемого метода, рассчитывает убедить в этом читателя, поэтому снабдил статью листингами, реализующими вычисления в среде Mathcad, и необходимыми комментариями к листингам.

Идея подхода. При обычных способах решения начинают предположением о существовании нетривиального решения. Опираясь на это предположение, записывают уравнения краевой задачи, приравнивают нулю соответствующий определитель и из этого условия находят критическую силу P . Само решение краевой задачи определяется с точностью до множителя. Это свойство решения позволяет реализовать предлагаемый в статье способ.

Выберем некоторую компоненту f решения и примем, что в точке x_0 она равна единице: $f(x_0) = 1$. Заменим какое-либо однородное граничное условие, например условие $g(0) = 0$, неоднородным условием $f(x_0) = 1$. Получим вспомогательную неоднородную краевую задачу с неизвестной нагрузкой P , решение которой для каждого P единственно. Решив численно или аналитически вспомогательную задачу, критическую нагрузку P найдем из отброшенного граничного условия $g(0) = 0$. В условии $f(x_0) = 1$ числовое значение назначено произвольно. По этой причине подход применим, в первую очередь, к линейным задачам устойчивости.

Идею поясним примером консольной стойки постоянной жесткости EI (рис. 1, а). Обычная последовательность аналитического решения такова.

Рис. 1

Пусть существует форма равновесия, для которой $w_1 \neq 0$. Записываем дифференциальное уравнение изгиба

$$EIw'' = P(w_1 - w) \quad (1)$$

вместе с граничными условиями $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, к которым добавляем условие $w(l) = w_1$. Нетривиальное решение сформулированной краевой задачи возможно, когда равен нулю соответствующий определитель. Из этого условия находим силу P .

Предлагаемая последовательность такова. Зная, что в момент потери устойчивости прогиб w_1 не определен, примем $w_1 = 1$. Введем вспомогательную задачу (рис. 1, б), заменив граничное условие $w'(0) = 0$ условием $w(l) = 1$, но сохранив правую часть уравнения (1). Равновесие стержня теперь поддерживает изгибающий момент на верхнем торце: $M_1 = -P(1 - w(l))$. Уравнение (1) вместе с новыми граничными условиями допускает как аналитическое, так и численное решение (при неизвестной силе P). Аналитическое интегрирование с учетом граничных условий дает

$$w = -\frac{k^2(1 - \cos kl)}{\sin kl} \sin kx + k^2(1 - \cos kx),$$

$$w' = -\frac{k^3(1 - \cos kl)}{\sin kl} \cos kx + k^3 \sin kx. \quad (2)$$

Здесь $k = \sqrt{P/EI}$.

Критическое значение $k = \pi/2$ найдем, подчинив решение (2) отброшенному условию $w'(0) = -k^3(1 - \cos kl) / \sin kl = 0$.

Способ решения. Способ ориентирован на задачи устойчивости, которые решаются численно, состоит в прямом интегрировании уравнений вспомогательной неоднородной краевой задачи и численном отыскании корня обычного уравнения. Процедура, осуществляющая интегрирование, должна допускать работу с неизвестным параметром, так как нагрузка во вспомогательной задаче неизвестна.

Граничные условия вспомогательной задачи желательно ставить в начале координат, так как численное решение задачи Коши реализуется более просто.

Дифференциальное уравнение изгиба. Далее рассматриваем прямолинейный стержень длиной l . Как известно, в отсутствие распределенной поперечной нагрузки дифференциаль-

ное уравнение изгиба стержня переменного сечения, записанное через прогиб w , имеет вид

$$(EIw'')'' + Nw'' - rw' = 0. \quad (3)$$

Здесь EI — зависящая от координаты изгибная жесткость; N — продольная сила ($N > 0$ — сжатие); r — интенсивность распределенной продольной нагрузки ($r > 0$ — сжимающая стержень нагрузка). Уравнение (3) неудобно для численного интегрирования, когда закон изменения жесткости не обладает непрерывностью.

Если распределенная сила r отсутствует, продольная сила N постоянна, а уравнение изгиба удобно записать через момент M в сечении:

$$M'' + \frac{N}{EI} M = 0. \quad (4)$$

Когда распределенная сила r имеется, применяем уравнение

$$M'' + \frac{N}{EI} M + rw' = 0 \quad (5)$$

совместно с уравнением

$$w'' = -\frac{M}{EI}. \quad (6)$$

Решение краевой задачи средствами Mathcad. Удобно использовать вычислительный блок Given/Odesolve, записывая внутри блока сразу дифференциальные уравнения и граничные условия. Обязательными аргументами функции Odesolve являются имя переменной интегрирования и значение конца интервала интегрирования. Начало интервала определяется автоматически путем анализа граничных условий.

Блок позволяет работать с параметрами, выполняет три действия: методом пристрелки превращает граничную задачу в задачу Коши, отыскивает решение задачи Коши в последовательных точках, строит непрерывную аппроксимацию решения. Результатом работы является имя функции (вектор имен для системы уравнений).

Блок допускает единственную форму записи граничных условий: должны быть указаны значения функции и ее производных в конкретных точках. По этой причине в задачах, где граничные условия имеют более сложный вид, требуется соответствующая замена переменных.

Mathcad позволяет выбрать метод решения задачи Коши. По умолчанию используется метод Адамса, который в стержнях со сложным законом изменения жесткости по длине может давать результат пониженной точности. Чтобы применить другой метод, нужно, щелкнув пра-

вой кнопкой мыши по слову Odesolve, отметить в появившемся меню, например, метод Рунге — Кутты с постоянным шагом. Точность вычислений контролирует глобальная переменная TOL, нужно установить достаточно малое ее значение. Повысить точность вычисления можно, указав явно число разбиений промежутка интегрирования. По умолчанию промежуток делится на 10^3 частей, обычно такой шаг достаточен.

Способ записи выражений и другие детали работы поясняют примеры ниже. Во всех примерах рассматриваются стержни переменного сечения. В большинстве примеров закон изменения жесткости по длине можно задать произвольной функцией.

Стержень нагружен силой P на торце. Дифференциальное уравнение изгиба записываем в виде (4), приняв $N = P$. Используем безразмерную координату сечения $x = x/l$ (при численной реализации нужно положить $l = 1$). Граничные значения величин на нижнем и верхнем торцах отмечаем соответственно индексами 0 и 1. Граничные условия исходной и вспомогательной задач, а также критерии потери устойчивости даны в таблице.

Пример 1. В учебном курсе сопротивления материалов преподаватель отмечает незначительное влияние местных ослаблений на устойчивость стержня. Когда в распоряжении имеется компьютерный класс, просто это продемонстрировать, построив график зависимости критического параметра $K = P_{кр} l^2 / EI_0$ нагрузки от положения ослабления, например, в такой задаче.

Жесткость шарнирно опертой стойки на длине b уменьшена в $1 - \delta$ раз: $EI = EI_0(1 - \delta)$, а — координата середины ослабления, начало координат помещено на опоре. Длина стойки $l = 1$. Граничные условия вспомогательной задачи и критерий потери устойчивости приведены в таблице. Расчетный лист Mathcad приведен на рис. 2. Уменьшив жесткость посередине стержня на 10 %, при $b = 0,1$ уменьшили критическую силу примерно на 2 %. Поясним детали расчетного листа.

Блок Given/Odesolve выдает имя $M1(K, a)$ функции, вычисляющей изгибающие моменты. Переменная интегрирования x и конец промежутка указаны в списке аргументов Odesolve. Функция $M1$ зависит также от параметра K нагрузки и координаты a ослабления, которые обя-

Граничные условия исходной и вспомогательной задач

Закрепления стержня	Граничные условия в задачах		Критерий потери устойчивости
	исходной	вспомогательной
$M_1 = 0, M'_0 = 0$	$M_0 = 1, M'_0 = 0$	$M_1 = 0$
$M_1 = 0, M_0 = 0$	$M_0 = 0, M'_0 = 1$	$M_1 = 0$
$M_1 = 0, M_0 + lM'_0 = 0$	$M_0 = 1, M'_0 = -1/l$	$M_1 = 0$
$M'_0 = M'_1, M_0 + lM'_0 = M_1$	$M_0 + lM'_0 = 1, M_1 = 1^*$	$M'_0 = M'_1$

*Для защемленного с двух сторон стержня граничные условия вспомогательной задачи нельзя записать в виде $M'_0 = M'_1 = 1$, так как в момент потери устойчивости возможно $M'_0 = M'_1 = 0$.

зательно указать на первом месте в списке аргументов при вызове: $M1(K, a, 1)$ — значение момента на верхнем торце при $x = 1$.

Пример 2. Рассмотрим стойку с защемленными торцами. Критический параметр $K = P_{кр} l^2 / EI_0$. Условие $M_0 + lM'_0 = 1$ (см. таблицу) нельзя записать в блоке интегрирования, поэтому введем новую функцию

$$f(x) = M(x) + lM'(x),$$

а дифференциальное уравнение (4) второго порядка представить системой двух уравнений первого порядка

$$f' = \frac{f - M}{l} - \frac{Pl}{EI} M, \quad M' = \frac{f - M}{l}.$$

Граничные условия вспомогательной задачи: $f(0) = 1, M(1) = 1$.

Вычисления выполнены для жесткости вида $EI = EI_0(1 - \alpha x/l)^4$. Расчетный лист Mathcad приведен на рис. 3. График на рисунке есть зависимость критической силы от параметра α .

Теперь интегрируется система двух уравнений, так что в списке аргументов функции Odesolve появляется новый векторный аргумент с именами неизвестных функций. $M1(K, a)$ — век-

Зависимость жесткости от координаты $TOL := 10^{-15}$

$$EI0 := 1 \quad \delta := 0.1 \quad b := 0.1 \quad EI(x, a) := EI0 \cdot \text{if}\left(|x - a| < \frac{b}{2}, 1 - \delta, 1\right)$$

Интегрирование дифференциального уравнения вспомогательной задачи

Given

$$M''(x) + \frac{K}{EI(x, a)} \cdot M(x) = 0 \quad M(0) = 0 \quad M'(0) = 1$$

$$M1(K, a) := \text{Odesolve}(x, 1)$$

Решение уравнения устойчивости

$$k(a) := \begin{cases} K \leftarrow \pi^2 \\ \text{root}(M1(K, a, 1), K) \end{cases}$$

Зависимость от положения ослабления

$$a := \frac{b}{2}, \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot 1 - \frac{b}{2}$$

Рис. 2

Рис. 3

тор с именами функций f , M . Чтобы вычислить значения функций в конкретной точке, нужно разложить вектор $M1$ на составляющие: m , f — имена отдельных функций, $m(x)$, $f(x)$ — значения в точках. Критический параметр K найден для конкретных значений α , а результаты сохранены в виде матрицы res .

Оценка точности численных результатов. Для стержня (рис. 4) со ступенчато изменяющейся жесткостью имеется точное решение [1]: критический параметр k является корнем уравнения

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{\alpha}}}{\text{tg}\left(\frac{k}{\sqrt{\alpha}} \frac{1-\lambda}{2}\right)} - k \text{tg}\left(\frac{k\lambda}{2}\right) = 0.$$

Здесь $\alpha = EI_1 / EI_2$, $\lambda = a / l$, $k^2 = Pl^2 / EI_2$, в [1] уравнение записано в других обозначениях.

Этот же параметр k подсчитан интегрированием дифференциального уравнения (параметры Odesolve по умолчанию, $TOL = 10^{-15}$). Результаты вычислений сопоставлены для 20 комбинаций параметров α , λ из таблицы

[1, с. 116]. Совпадают одиннадцать цифр после запятой.

Решим эту же задачу методом Бубнова — Галеркина. Изгиб описываем уравнением (4), $\bar{x}$ — относительная координата, относительная жесткость сечения $EI(\bar{x}) = 1$, при $|2\bar{x} - (1 - \lambda)| \leq \lambda$, иначе α .

Введем базисные функции $f_i(\bar{x}) = \sin(i\pi\bar{x})$ и представим приближенно момент отрезком ряда

Рис. 4

$M(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\bar{x})$. Процедура метода дает уравнение устойчивости (применено масштабирование делением элементов строки на $(i\pi)^2$)

$$|B - k^2 C| = 0, B_{ii} = \int_0^1 f_i(\bar{x})^2 dx,$$

$$C_{ij} = \frac{1}{(i\pi)^2} \int_0^1 \frac{f_i(x) f_j(x)}{EI(x)} dx.$$

Удерживая 70 членов ряда, удалось получить шесть верных цифр после запятой, дальнейшее уточнение оказалось невозможным.

Видим, что метод Бубнова — Галеркина требует более громоздких вычислений и приводит к результатам пониженной точности.

Стержень, нагруженный распределенной силой. Рассмотрим задачу, решение которой обычным способом связано с громоздкими вычислениями.

Жесткость консольного стержня на трех участках относительной длины 1, 0,5, 1 задается тремя разными уравнениями. Интенсивность распределенной нагрузки также задается тремя

разными уравнениями. Общая относительная длина стержня $LT = 2,5$. $K = Kl_0^2 / EI_0$ — безразмерный параметр нагрузки (l_0 — длина нижнего участка стойки, EI_0 — жесткость наверху нижнего участка).

Вспомогательная краевая задача такова:

$$M'' + \frac{N}{EI} M + rw' = 0, w'' = -\frac{M}{EI}.$$

Граничные условия: $M(0) = 1, M'(0) = 0, w(0) = 0, w(1) = 0, w'(1) = 0$.

На расчетном листе рис. 5 приведены несколько первых критических значений K . На этом листе отсутствуют громоздкие функции для продольной силы и жесткости стержня, приведены лишь соответствующие графики. График функции $fnc(k)$ позволяет задать стартовое значение для поиска нуля этой функции.

Результаты имеют точность в пять значащих цифр, что потребовало разбить промежуток интегрирования на 10^4 частей, указав число разбиений в списке аргументов функции Odesolve (вместо 10^3 по умолчанию).

Консоль, нагруженная силой, следящей с отставанием. Консоль нагружена силой P согласно рис. 6. χ — коэффициент слежения. Задача является неконсервативной, но при малых χ допускает статическое решение.

Дифференциальные уравнения исходной задачи записываем в виде системы двух уравнений для момента M и угла поворота θ :

$$M'' + \frac{P}{EI} M = 0, \theta' = (w')' = -\frac{M}{EI}.$$

Граничные условия исходной задачи таковы:

$$M(l) = 0, \theta(0) = 0, M'(l) = (1 - \chi)\theta.$$

Рис. 5

Рис. 6

Граничные условия вспомогательной задачи:

$$M(l) = 0, \theta(0) = 0, \theta(l) = 1.$$

Критическую силу P определяет уравнение

$$M'(l) = P(1 - \chi)\theta(l).$$

На рис. 7 представлен расчетный лист Mathcad, реализующий вычисления. График функции $fnc(p)$ построен с той же целью, что на рис. 5.

Трехпролетный стержень. Стержень на жестких опорах сжат силой на торце. В этой задаче нужно явно учесть в выражении для изгибающего момента неизвестные опорные реакции. Эту трудность обходим, применяя уравнение (4) к пролетам последовательно. Начала локальных координат помещаем в начале пролетов. Во вспомогательной задаче задаем угол поворота в начале первого пролета.

Граничные условия вспомогательной задачи для первого пролета:

$$w_1(0) = 0, w_1'(0) = 1, M_1(0) = 0, w_1(l_1) = 0.$$

Для второго и третьего пролетов имеем:

$$w_2(0) = 0, w_2'(0) = w_1'(l_1), M_2(0) = M_1(l_1), w_2(l_2) = 0.$$

$$w_3(0) = 0, w_3'(0) = w_2'(l_2), M_3(0) = M_2(l_2), w_3(l_3) = 0.$$

Расчетный лист Mathcad представлен на рис. 8. Отметим следующий нюанс программирования. В примерах выше вектор имен функций в списке аргументов Odesolve задавали как вектор-столбец, теперь задали его как вектор-строку, можно по-разному.

Стержень, сжатый несколькими сосредоточенными силами. В уравнениях (4), (5) отсутствуют сосредоточенные силы, приложенные к внутренним точкам стержня. Для их учета можно применить прием предыдущего примера.

Шарнирно опертый стержень сжат силой nK на торце и силой $(1-n)K$ в точке C пролета (рис. 9). K — параметр нагрузки. H — опорная реакция в опоре стержня. Из равновесия имеем $H = (1-n)Kw_c/l$, изгибающий момент

$$\alpha := 0.5 \quad EI0 := 1 \quad EI(x) := EI0 \cdot (1 - \alpha x)^4 \quad \chi := 0.3 \quad TOL := 10^{-14}$$

Решение дифференциальных уравнений изгиба

Given

$$M'(x) = dM(x) \quad dM'(x) = \frac{-P}{EI(x)} \cdot M(x) \quad \theta'(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad M(1) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \theta(1) = 1$$

$$\text{Res}(P) := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} M \\ dM \\ \theta \end{pmatrix}, x, 1 \right]$$

Уравнение устойчивости

$$fnc(P) := \begin{pmatrix} m \\ dm \\ \theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{Res}(P) \\ dm(1) - P \cdot (1 - \chi) \cdot \theta(1)$$

График функции устойчивости $\max := 4 \quad pp := 0, 0.1 \dots \max$

Критический параметр

$$p := 2 \quad \text{root}(fnc(p), p) = 2.031$$

Рис. 7

$M_c = K[(1 - (1 - n)l_1 / l]w_c$, поперечные силы в сечениях выше и ниже точки С связаны уравнением $Q_c^+ = Q_c^- - (1 - n)K\theta_c$.

Теперь, рассматривая нижнюю часть стержня, нужно вычислять и момент, и прогиб. Приняв $w_c = 1$, вводим для нижней части вспомогательную задачу со следующими граничными условиями: $w(0) = 0$, $w(l_1) = 1$, $M(0) = 0$, $M(l_1) = K[(1 - (1 - n)l_1 / l]$. Решив эту задачу, с учетом условий сопряжения получаем усилия на торце верхней части, для которой достаточно определить только момент.

Граничные условия вспомогательной задачи для верхней части: $M'(l_1) = M''(l_1) - (1 - n)K\theta(l_1)$, $M(l_1) = M''(l_1)$. Знаком «минус» отмечено решение для нижней части.

Критерий потери устойчивости: $M(l) = 0$. Расчетный лист Mathcad дан на рис. 9.

Аналогичная задача для ступенчатого стержня допускает аналитическое решение [1]. Автор

проверил совпадение с точностью до 11-го знака после запятой численного и аналитического результатов в этом случае¹.

В более сложных задачах сосредоточенные силы можно учесть приближенно, распределив сжимающую нагрузку вдоль малой длины и интегрируя дифференциальное уравнение (5) для стержня целиком. Расчетный лист Mathcad с таким решением только что рассмотренного примера дан на рис. 10. Видим близкое совпадение результатов.

Заключение. В работе предложен способ решения задачи о бифуркации равновесия, который вычисляет критические силы прямым интегрированием дифференциальных уравнений. Способ применим к широкому классу задач

¹ В [1, с. 123] дана таблица с коэффициентами для частного случая задачи. Последняя значащая цифра коэффициентов часто неверна. Это примечание адресовано внимательному читателю, который захочет сравнить результаты статьи с известными по литературе, ни в коем случае не являясь замечанием: было бы странно не учитывать качественное изменение вычислительных возможностей.

$$\begin{aligned}
 &L1 := 1 \quad L2 := 1 \quad L3 := 1 \quad EI1(x) := (1 - 0.2 \cdot x)^2 \quad EI2(x) := 2 \cdot (1 - 0.5 \cdot x)^4 \quad EI3(x) := 1 \quad TOL := 10^{-14} \\
 &\text{Given} \\
 &Q'(x) + \frac{P}{EI1(x)} \cdot M(x) = 0 \quad M'(x) = Q(x) \quad w'(x) = dw(x) \quad dw'(x) = -\frac{M(x)}{EI1(x)} \\
 &M(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad dw(0) = 1 \quad w(L1) = 0 \\
 &R1(P) := \text{Odesolve}[(M \ Q \ w \ dw), x, L1] \quad W1(P) := \begin{pmatrix} f1 & f2 & f3 & f4 \\ f1(L1) \\ f4(L1) \end{pmatrix} \leftarrow R1(P)^T \\
 &\text{Given} \\
 &Q'(x) + \frac{P}{EI2(x)} \cdot M(x) = 0 \quad M'(x) = Q(x) \quad w'(x) = dw(x) \quad dw'(x) = -\frac{M(x)}{EI2(x)} \\
 &M(0) = W1(P)_0 \quad dw(0) = W1(P)_1 \quad w(0) = 0 \quad w(L2) = 0 \\
 &R2(P) := \text{Odesolve}[(M \ Q \ w \ dw), x, L2] \quad W2(P) := \begin{pmatrix} f1 & f2 & f3 & f4 \\ f1(L1) \\ f4(L1) \end{pmatrix} \leftarrow R2(P)^T \\
 &\text{Given} \\
 &Q'(x) + \frac{P}{EI3(x)} \cdot M(x) = 0 \quad M'(x) = Q(x) \quad w'(x) = dw(x) \quad dw'(x) = -\frac{M(x)}{EI3(x)} \\
 &M(0) = W2(P)_0 \quad dw(0) = W2(P)_1 \quad w(0) = 0 \quad w(L2) = 0 \\
 &R3(P) := \text{Odesolve}[(M \ Q \ w \ dw), x, L2] \quad fnc(P) := \begin{pmatrix} f \leftarrow R3(P)_0 \\ f(L2) \end{pmatrix} \\
 &P := 6 \quad \text{root}(fnc(P), P) = 7.538
 \end{aligned}$$

Рис. 8

$EI_0 := 1 \quad b := 0.4 \quad EI(x) := EI_0 \cdot (1 - b \cdot x)^4 \quad l_1 := 0.5 \quad l := 1 \quad n := 0.5 \quad TOL := 10^{-14}$
 Вспомогательная задача, нижняя часть
 Given
 $M'(x) = Q(x) \quad Q'(x) + \frac{K}{EI(x)} \cdot M(x) = 0 \quad \theta'(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad w'(x) = \theta(x)$
 $M(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad w(l_1) = 1 \quad M(l_1) = K \cdot \left[1 - (1 - n) \cdot \frac{l_1}{l} \right]$
 $M1(K) := \text{Odesolve}[(M \ Q \ \theta \ w), x, l_1]$
 Вычисление граничного условия
 для верхней части
 $R(K) := \begin{bmatrix} m \\ q \\ \theta \\ w \end{bmatrix} \leftarrow M1(K)$
 $\begin{bmatrix} m(l_1) \\ q(l_1) - (1 - n) \cdot K \cdot \theta(l_1) \end{bmatrix}$
 Вспомогательная задача, верхняя часть
 Given
 $M''(x) + \frac{n \cdot K}{EI(x)} \cdot M(x) = 0 \quad M(l_1) = R(K)_0 \quad M'(l_1) = R(K)_1$
 $M2(K) := \text{Odesolve}(x, l)$
 Решение уравнения устойчивости $K := \begin{cases} K \leftarrow 12 \\ \text{root}(M2(K, 1), K) \end{cases} \quad K = 5.051801$

Рис. 9

Приближенная задача $\varepsilon := 0.05$
 Интенсивность
 нагрузки и
 продольная сила
 $n(x) := \begin{cases} \frac{1-n}{\varepsilon} & \text{if } |l_1 - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad N(x) := \begin{cases} c \leftarrow l_1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ 1 & \text{if } x < c \\ \text{otherwise} \\ 1 - (1-n) \cdot \frac{x-c}{\varepsilon} & \text{if } x < c + \varepsilon \\ n & \text{otherwise} \end{cases}$
 Вспомогательная задача
 Given
 $M'(x) = Q(x) \quad Q'(x) + \frac{K \cdot N(x)}{EI(x)} \cdot M(x) + K \cdot n(x) \cdot \theta(x) = 0 \quad \theta'(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \quad w'(x) = \theta(x)$
 $M(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad w(l) = 0 \quad Q(0) = 1$
 $M1(K) := \text{Odesolve}[(M \ Q \ \theta \ w), x, l]$
 Уравнение устойчивости
 и его решение
 $ff(K) := \begin{cases} f \leftarrow M1(K)_0 \\ f(1) \end{cases} \quad K := 6 \quad \text{root}(ff(K), K) = 5.05126631$

Рис. 10

устойчивости. Автор статьи старался убедить читателя в простоте и удобстве способа, надеется на то, что это ему удалось.

Описанный способ применим также к задачам об устойчивости упруго-пластических стержней. Вопросу будет посвящена специальная публикация.

Библиографический список

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.

References

1. Volmir A. S. *Ustoychivost' uprugikh system* [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 879 p.