УДК 621.039.536.2:693.55

© В. И. Морозов, д-р техн. наук, профессор
© Э. К. Опбул, канд. техн. наук, зав. лабораторией
© Фан Ван Фук, аспирант
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: phucprodhv@gmail.com

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-2-66-73

© V. I. Morozov, Dr. Sci. Tech., Professor
© Eh. K. Opbul, PhD in Sci. Tech., Laboratory Head
© Phan Van Phuc, post-graduate student
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: phucprodhv@gmail.com

К РАСЧЕТУ ТОЛСТЫХ КОНИЧЕСКИХ ПЛИТ НА ДЕЙСТВИЕ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

TO THE CALCULATION OF THICK CONIC-SHAPED PLATES ON THE ACTION OF EVENLY DISTRIBUTED LOADING

Описано развитие методов расчета напряженного состояния осесимметричных толстых плит, опертых по конической поверхности. Получено решение задачи по определению предельного давления с использованием основных положений теории пластичности, принятых в форме критериев прочности Баландина и Рихарда — Бранцага — Брауна. Данный алгоритм может быть использован при проектировании подобных конструкций на стадии эскизного проекта.

Ключевые слова: корпус высокого давления, торцевой элемент, толстая плита, несущая стенка, радиальные напряжения, тангенциальные напряжения, вертикальные напряжения, внутреннее давление, равномерно распределенная нагрузка, шпонка, контактный слой.

The article is devoted to the development of methods of calculating the stress state of axially symmetric thick plates supported on the conic shaped surface. Using the basic provisions of the theory of plasticity accepted in the form of the strength criteria worked out by Balandin and Richart — Brandtzaeg — Brown, there has been obtained the solution of the task of assessing the extreme pressure. This algorithm can be used at design of similar structures at the preliminary project design stage.

Keywords: high pressure housing, end element, thick plate, bearing wall, radial stresses, tangential stresses, vertical stresses, internal pressure, evenly distributed loading, key, contact layer.

Рассмотрим расчет толстых плит, предназначенных для восприятия достаточно высоких уровней воздействий в виде равномерно распределенной нагрузки. Толстые плиты могут быть использованы в концевых участках корпусов высокого давления (КВД) ядерных реакторов (ЯР).

КВД ЯР состоит из цилиндрической с коническими сужениями несущей стенки из тяжелого армированного бетона (ТАЦ) [1] и торцевых элементов (ТЭ) в виде толстых плит, сопрягающихся со стенками наподобие «пробок».

В целях исключения вероятности смещения плит относительно стенки силового слоя предусмотрены специальные шпонки.

Ниже рассматривается аналитическое решение задачи по определению предельного давления на толстую плиту, имеющую шарнирно-

неподвижное закрепление по вертикали и возможность смещения плиты в горизонтальном направлении.

Заметим, что в экспериментальных исследованиях [1] изучался вопрос по установке специального устройства в концевых участках КВД, так называемого «компенсатора», с помощью которого вполне эффективно погашались пиковые всплески напряжений, возникающие в местах сопряжения ТЭ с несущей стенкой КВД.

На рис. 1 представлена расчетная схема опытного образца КВД ЯР, испытанного при внутреннем давлении [1, 2], где в качестве шпоночных элементов использовались арматурные стержни диаметром 8 мм, жестко вваренные в металлическую опалубку днища.

Рис. 1. Расчетные схемы: а — КВД ЯР (1 — силовая стенка из ТАЦ; 2 — торцевой элемент; 3 — шпонки); б — ТЭ в виде толстой плиты; P_0 — внутреннее давление

На рис. 1, б — расчетная схема ТЭ в виде толстой плиты, опирающейся на коническую поверхность, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В экспериментальных исследованиях конического элемента из стекла [3], проведенных в конце 70-х годов прошлого века, а также из бетона [1, 2] было обнаружено, что с момента нагружения и по мере возрастания нагрузки процесс трещинообразования начинался в верхних угловых зонах образца, у опор (рис. 2). При дальнейшем нагружении работа опытного образца приобретает несколько иной характер, а напряженно-деформированное состояние переходит в другое качественное состояние. Процесс трещинообразования с верхних угловых участков перейдет на нижнюю растянутую зону плиты. Очевидно, что здесь опорные участки конического элемента работают по консольной схеме деформирования, и возможно (по аналогии с [3]) в практических расчетах не учитывать их сопротивление действующим нагрузкам.

Допускаем, что до образования трещин в нижней растянутой зоне толстая плита работает по балочной схеме, а с появлением и развитием трещин балочная схема трансформируется

в арочную (рис. 3), которая характерна для работы толстых плит.

Известно [1, 3], что при объемном деформированном состоянии, при нагрузках, близких к предельным, в толстой осесимметричной плите с трещинами формируется достаточно большая область всестороннего сжатия наподобие своеобразного «купола». Если осесимметричную толстую плиту представить в плоском деформированном состоянии, то сжатый пространственный «купол» преобразуется в форму плоского сферического «свода», при котором формируется арочная схема работы конструкции. Таким образом, для аналитических расчетов ТЭ в виде толстых плит с учетом пластической стадии работы элемента (с трещинами) принимается расчетная схема, представленная на рис. 3.

Перейдем к определению высоты (толщины) свода из условия равновесия толстого элемента.

Для толстой плиты до появления первых трещин при плоском деформировании для расчета высоты сжатой зоны принимаются следующие допущения:

- толстый бетонный элемент до момента трещинообразования работает по балочной схеме;
- справедлива гипотеза плоских сечений;

Рис. 2. Схема трещинообразования в ТЭ при плоском деформированном состоянии

- растянутая зона находится в стадии пластических деформаций и согласно [4] предельная величина пластической деформации $\varepsilon_{bt2} = 15 \cdot 10^{-5}$;
- сжатая зона — в стадии упругой работы.

С учетом принятых допущений на рис. 4 представлена расчетная схема толстого бетонного элемента до образования первой трещины.

С учетом условия равновесия $\sum x = 0$ имеем

$$R_{bt}(h-x) - \frac{1}{2}\sigma_b x = 0. \quad (1)$$

Из равенства соотношений $\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bt}} = \frac{x}{h-x}$ получаем

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{bt}x}{h-x}. \quad (2)$$

Используя закона Гука для упругой зоны сечения $\sigma_b = \varepsilon_b E_b$, с учетом (2) получим

$$\sigma_b = \frac{\varepsilon_{bt}x}{h-x} E_b. \quad (3)$$

Совместно решая уравнения (1) и (3), получим формулу для определения высоты сжатой зоны (толщины свода):

$$x = \frac{h - \sqrt{h^2 - h^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_{bt} E_b}{2R_{bt}}\right)}}{1 - \frac{\varepsilon_{bt} E_b}{2R_{bt}}}. \quad (4)$$

На рис. 5 представлена схема ТЭ в виде толстой плиты конической формы, ограниченной точками ABCD, где $GE = x$ — толщина или высота свода, определенная по формуле (4).

Для определения численных значений внутреннего и внешнего радиусов толстого свода удобно использовать графический способ, который в силу своей наглядности практически устраняет появление здесь ошибки (см. рис. 5).

Расчет напряженного состояния торцевых элементов на основе теории пластичности выполняем следующим образом.

Рассматривается плоско деформированная толстая плита.

Для предварительного определения высоты сжатой зоны толстой плиты используется упрощенный способ, построенный на гипотезе плоских сечений с учетом пластического деформирования растянутой зоны (см. рис. 4).

С появлением первых трещин в нижней растянутой зоне толстой плиты, наступает стадия перехода балочной схемы работы в арочную в виде сферического свода.

Далее рассматривается осесимметричная толстая плита, которая представлена в виде сферического свода.

Для вывода расчетных формул для напряженного состояния ТЭ используются два критерия прочности (Баландина и Рихарда — Бранцаега — Брауна), причем принимается, что $\sigma_\theta = \sigma_z$ как для сферы. Считаем, что купол — полусфера.

По найденной высоте сжатой зоны (толщине свода) графически определяются неизвестные параметры (a и b) свода и вычисляются численные значения напряжений.

Напряженное состояние торцевых элементов с использованием критерия Баландина определим следующим образом.

Критерий прочности Баландина [1, 4–6] запишем в виде

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) - (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_b R_{bt}. \quad (5)$$

С учетом $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\theta$; $\sigma_3 = \sigma_r$ из (5) получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (R_b - R_{bt})(2\sigma_1 + \sigma_3) = R_b R_{bt}. \quad (6)$$

Рис. 3. Итоговая расчетная схема торцевого элемента

Рис. 4. Расчетная схема нормального сечения толстого элемента

Пусть

$$t = \sigma_1 - \sigma_3 \geq 0; p = \sigma_1 + \sigma_3; \\ M = R_b - R_{bt}; N = R_b R_{bt}. \quad (7)$$

Совместное решение первых двух выражений дает

$$\sigma_1 = \frac{p+t}{2}; \sigma_3 = \frac{p-t}{2}. \quad (8)$$

С учетом (7) и (8) выражение (6) примет следующий вид:

$$t^2 - M(p+t + \frac{p-t}{2}) - N = 0. \quad (9)$$

P_0

$$\text{Из (9) выразим } p = \frac{1}{3M}(2t^2 - Mt - 2N). \quad (10)$$

С учетом формулы (10) для напряжений в (8) запишем:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3M}(t^2 + Mt - N); \quad (11)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{3M}(t^2 - 2Mt - N). \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение равновесия в сферической системе координат применительно к рассматриваемой задаче имеет вид [4–6]:

Рис. 5. Графическое определение параметров a и b

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что $\sigma_3 = \sigma_r$, продифференцируем (13):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{3M} \cdot \frac{(2t - 2M)dt}{dr}. \quad (14)$$

С учетом (7) получим

$$2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{2t}{r}. \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{1}{3M} \left(1 - \frac{M}{t}\right) dt = \frac{dr}{r}. \quad (16)$$

После интегрирования (16) получим

$$\frac{t}{M} - \ln t = 3 \ln r + c. \quad (17)$$

Имеем следующие граничные условия для сферы:

$$\text{при } r = a \quad \left| \begin{array}{l} t = t_a \\ \sigma_r = \sigma_3 = 0 \end{array} \right| \text{ и } r = b \quad \left| \begin{array}{l} t = t_b \\ \sigma_r = \sigma_3 = P_0 \end{array} \right|.$$

С учетом принятых граничных условий уравнение (17) представим в виде

$$\frac{t_a}{M} - \ln t_a = 3 \ln a + c;$$

$$\frac{t_b}{M} - \ln t_b = 3 \ln b + c. \quad (18)$$

Производится вычитание двух уравнений (18) с дальнейшим преобразованием

$$\begin{aligned} \frac{t_b - t_a}{M} - \ln \frac{t_b}{t_a} &= 3 \ln \frac{b}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{t_b - t_a}{M} - \ln \left(\frac{t_b}{t_a} \right) &= \ln \left(\frac{b}{a} \right)^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln \left[\left(\frac{b}{a} \right)^3 \cdot \left(\frac{t_b}{t_a} \right) \right] &= \frac{t_b - t_a}{M} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} \right)^3 &= \left(\frac{t_a}{t_b} \right) e^{\frac{t_b - t_a}{M}}. \end{aligned}$$

Окончательно получим экспоненциальное уравнение напряженного состояния сферы применительно к своду в виде:

$$\left(\frac{b}{a} \right)^3 = \left(\frac{t_a}{t_b} \right) e^{\frac{t_b - t_a}{M}}. \quad (19)$$

При $r = a$, $\sigma_r = \sigma_3 = 0$, из формулы (12) получим уравнение

$$t_a^2 - 2Mt_a - N = 0, \quad (20)$$

откуда

$$t_a = M + \sqrt{M^2 + N}. \quad (21)$$

Полученное значение t_a подставляем в (19) и находим t_b .

При $\sigma_r = \sigma_3 = P_0$ и с учетом t_b по формуле (12) получим предельную величину давления

$$P_0 = \frac{1}{3M} (t_b^2 - 2 \cdot M \cdot t_b - N). \quad (22)$$

Отметим, что оригинальное уравнение напряжений для сферы (19) решается с учетом параметра t_a и с использованием численного метода MATLAB, откуда определяется параметр t_b .

В качестве иллюстрации использования полученных зависимостей ниже приводится пример расчета.

Исходные данные ТЭ для бетона В40 [1]: $R_b = 22$ МПа, $R_{bt} = 1,4$ МПа, $b_b = 0,587$ м, $h = 0,75$ м.

По формуле (4) определяем: $x = 0,31$ м.

В зависимости от x графически определяем параметры: $a = 0,612$ м; $b = 0,922$ м; $t_a = 41,9$; $t_b = 80,8$.

Для практического расчета напряженного состояния ТЭ ($\sigma_r; \sigma_\theta$) используется совместное решение уравнений (19), (12) и (11); результаты показаны в табл. 1 и на рис. 6. График зависимости радиальных и тангенциальных напряжений от радиуса приведен на рис. 7.

По формуле (22) определяем величину максимального давления: $P_0 = 51,2$ МПа.

Далее определим напряженное состояние торцевых элементов на основе критерия Ф. Рихарда, А. Бранцага и Р. Брауна.

Для определения главных напряжений ($\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma_1 = \sigma_2$ и $\sigma_r = \sigma_3$) используется дифференциальное уравнение равновесия в сферической системе координат [4–6]:

$$\frac{d\sigma_3}{dr} + 2 \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r} = 0, \quad (23)$$

где $\sigma_1 = \sigma_\theta$ — максимальное, а $\sigma_3 = \sigma_r$ — минимальное значение напряжений.

Для определения прочности бетона при трехосном сжатии R_b'' используется критерий прочности Рихарда — Бранцага — Брауна [7, 8]:

$$R_b'' = R_b + k \cdot \sigma_o, \quad (24)$$

где k — коэффициент эффективности бокового давления; R_b — прочность бетона при одноосном сжатии; σ_o — гидростатическое обжатие бетона.

Известно, что напряжения в сферическом своде $\sigma_1 = R_b''$ и $\sigma_o = \sigma_3$, тогда формула (24) примет вид

$$\sigma_1 = R_b + k \cdot \sigma_3. \quad (25)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r|_{r=a} = 0;$$

$$\sigma_r|_{r=b} = P_0.$$

Рис. 6. Результаты расчетов напряженного состояния: а — радиальные напряжения; б — тангенциальные напряжения

Таблица 1

Радиальные и тангенциальные напряжения в зависимости от радиуса r

r , м	0,612	0,646	0,681	0,715	0,750	0,784	0,819	0,853	0,888	0,922
σ_r , МПа	0	5	11	15	22	27	34	39	46	52
σ_θ , МПа	42	53	65	73	85	94	105	113	124	133

Рис. 7. График зависимости «напряжение — радиус»

Пусть $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$; $t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$,
тогда

$$\sigma_1 = p + t; \sigma_3 = p - t. \quad (26)$$

Подставим (26) в критерий (25):

$$(1-k) \cdot p + (1+k) \cdot t - R_b = 0. \quad (27)$$

Из (27) выразив p , затем подставив в (26), получим следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{R_b}{1-k} - \frac{2 \cdot k}{1-k} t; \sigma_3 = \frac{R_b}{1-k} - \frac{2}{1-k} t. \quad (28)$$

Подстановка (28) в условия статики (23) дает

$$\frac{dt}{dr} - 2(k-1) \frac{t}{r} = 0. \quad (29)$$

Решение (29) с учетом граничных условий позволяет получить

$$t_b = \left(\frac{R_b}{1-k} - P_0 \right) \frac{1-k}{2}; t_a = \frac{R_b}{2}. \quad (30)$$

Совместное решение (29), (30) с учетом $k = 4$ дает формулу для предельного давления:

$$P_0 = \frac{R_b}{3} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^6 - 1 \right]. \quad (31)$$

Для практического использования полученной формулы ниже приводится пример расчета.

Исходные данные ТЭ для [1] бетона В40: $R_b = 22$ МПа, $R_{bt} = 1,4$ МПа, $b_b = 0,587$ м, $h = 0,75$ м.

По формуле (4) определяем: $x = 0,31$ м.

В зависимости от x графически определяем параметры: $a = 0,612$ м; $b = 0,922$ м; $t_a = 11,0$; $t_b = 128$.

По формуле (31) определяем величину максимального давления: $P_0 = 78$ МПа.

Для практического расчета напряженного состояния ТЭ ($\sigma_r; \sigma_\theta$) используется совместное решение уравнений (28), (29) результаты показаны в табл. 2 и на рис. 8. График зависимости радиальных и тангенциальных напряжений от радиуса приведен на рис. 9.

Таким образом, получен оригинальный метод аналитического расчета напряженного состояния торцевых элементов в виде толстых плит, опертых по конической поверхности. Выполненные примеры расчета показывают адекватность полученных результатов, их соответствие напря-

Таблица 2

Радиальные и тангенциальные напряжения в зависимости от радиуса r

r , м	0,612	0,646	0,681	0,715	0,750	0,784	0,819	0,853	0,888	0,922
σ_r , МПа	0	3	7	11	17	25	35	46	61	78
σ_θ , МПа	22	33	48	67	92	123	161	208	266	336

Рис. 8. Результаты расчетов напряженного состояния

Рис. 9. График зависимости «напряжение — радиус»

женному состоянию осесимметричных толстых плит. Предложенная методика может быть использована в стадии эскизного проектирования корпусов высокого давления.

Библиографический список

1. Морозов В. И. Корпуса высокого давления для энергетических, строительных и специальных технологий. СПб.: СПбГАСУ, 2011. 394 с.
2. Морозов В. И., Пovyшев Н. И., Буцев В. М. Толстостенные железобетонные сосуды при силовых и тепловых воздействиях // Строительные конструкции зданий и сооружений: межвуз. сб. Барнаул: АПИ, 1989. С. 61–71.
3. Писаренко Г. С., Амелянович К. К., Каринцев И. Б. Несущие и светопрозрачные элементы конструкций из стекла. Киев: Наукова думка, 1987. 198 с.
4. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 263 с.
5. Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 306 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
7. Richart F. E., Brandtzaeg A., Brown R. L. A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. (Technical Report Bulletin No. 185) Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana; 1928.
8. Зайцев Ю. В., Леонович С. Н., Шнайдер У. Структура, прочность и механика разрушения бетонов при

двухосном и трехосном сжатии. Минск: БНТУ, 2011. 382 с.

9. Байков В. Н., Сигалов Э. Е. Железобетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1976. 727 с.

References

1. Morozov V. I. *Korpora vysokogo davleniya dlya ehnergeticheskikh, stroitel'nykh i spetsial'nykh tekhnologiy* [High pressure housings to be used in power, construction and special technologies]. St. Petersburg, SPSUACE Publ., 2011, 394 p.

2. Morozov V. I., Povyshev N. I., Burtsev V. M. *Tolstostennye zhelezobetonnye sosudy pri silovykh i teplovykh vozdeystviyakh* [Thick-walled reinforced concrete vessels at power and thermal actions]. *Stroitel'nye konstruktsii zdaniy i sooruzheniy. Mezhevuz. sbornik* [Construction designs of buildings and structures. Inter-higher education institutions coll. of articles]. Barnaul, API Publ., 1989, pp. 61–71.

3. Pisarenko G. S., Amel'yanovich K. K., Karintsev I. B. *Nesushchie i svetoprozrachnye ehlementy konstruktsiy iz*

stekla [Bearing and translucent construction members from glass]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1987, 198 p.

4. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Basics of the elasticity and plasticity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 263 p.

5. Geniev G. A., Kissyuk V. N., Tyupin G. A. *Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona* [The theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, 306 p.

6. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and covers]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 636 p.

7. Richart F. E., Brandtzaeg A., Brown R. L. *A study of the failure of concrete under combined compressive stresses*. (Technical Report Bulletin no. 185). Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana; 1928.

8. Zaytsev Yu. V., Leonovich S. N., Shnayder U. *Struktura, prochnost' i mekhanika razrusheniya betonov pri dvukhosnom i trekhosnom szhatii* [Structure, durability and mechanics of concrete fracture at two-axis and three-axis compression]. Minsk, BNTU Publ., 2011, 382 p.

9. Baykov V. N., Sigalov Eh. E. *Zhelezobetonnye konstruktsii* [Reinforced concrete designs]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1976, 727 p.