УДК 624.072.32

© Г. И. Белый, д-р техн. наук, профессор

© Д. В. Уразильдеев, аспирант

(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)

E-mail: office@ercon.ru, akin_ura@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-2-54-59

© G. I. Belyy, Dr. Sci. Tech., Professor

© D. V. Urazgil'deev, post-graduate student
(Saint Petersburg University of Architecture
and Civil Engineering)

E-mail: office@ercon.ru, akin_ura@mail.ru

К РАСЧЕТУ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СПЛОШНОСТЕНЧАТЫХ СТАЛЬНЫХ АРОК ПО ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНОЙ ФОРМЕ

ABOUT STABILITY CALCULATION OF CURVED BAR ELEMENTS OF STEEL ARCHES OF CONTINUOUS SECTION BY THE FLEXURE-TORSION FORM

Изложено аналитическое решение задачи устойчивости криволинейных стержневых элементов по изгибно-крутильной форме, выделенных из стальной арки сплошного сечения. В решении используется деформационная теория расчета плоских упругих криволинейных стержней открытого профиля. Исследование основано на частных решениях задач недеформационного расчета и бифуркационных задач устойчивости. Приводятся графики зависимости коэффициентов устойчивости от фибровой текучести от кривизны, приведенной гибкости и относительных эксцентриситетов.

Ключевые слова: сплошностенчатая стальная арка, стержень с криволинейной осью, тонкостенный стержень открытого профиля, устойчивость по изгибно-крутильной форме.

The paper presents an analytical solution of the stability problem of curved bar elements isolated from a steel arch of continuous section by the flexure-torsion form. The solution uses the deformation theory of calculating plane elastic curved bars of an open profile. The research is based on specific solutions of non-deformation calculation problems and bifurcation stability problems. Graphs of the dependence of the stability coefficients on the fiber yield on the curvature, reduced flexibility, and relative eccentricities are given.

Keywords: steel arch of continuous section, bar with curved axis, thin-wall bar with open profile, stability in flexure-torsion form.

Стальные арки, как известно, широко используются в качестве несущих конструкций каркаса покрытий (рис. 1) зданий различного назначения. Исследования прочности и устойчивости таких конструкций в плоскости их загрузки позволили выработать вполне обоснованные инженерные методы расчета. При этом устойчивость по изгибно-крутильной форме (из плоскости загрузки) выделенных из арки криволинейных элементов (см. рис. 1) оказалась недостаточно изученной. Имеющиеся в литературе сведения относятся к частным решениям задач устойчивости, на основе которых построить инженерную методику расчета не представляется возможным. Так, например, в работе [1] была рассмотрена задача устойчивости стержневых

элементов с криволинейной осью, но с нулевой секториальной жесткостью.

Настоящая статья посвящена разработке аналитического метода расчета на устойчивость по изгибно-крутильной форме сжато-изогнутых элементов сплошностенчатых арок бисимметричного сечения при упругой работе материала.

Оптимальное очертание арок, как известно, следует принимать по кривой давления при действии решающего сочетания нагрузок. Для полных арок с преимущественным значением равномерно распределенной нагрузки очертание арки принимается по квадратной параболе, а для высоких арок с большим собственным весом — по кривой цепной линии (катеноиду). Однако в последних случаях существенное значение имеет

Рис. 1. Пространственная схема арочного каркаса покрытия

ветровая нагрузка, которая может действовать в различных направлениях, давая резко отличные кривые давления. В этих случаях очертание арки принимается по оптимально осредненной кривой.

С целью упрощения изготовления и монтажа очертание элементов арок целесообразно принимать по дуге окружности, что в свою очередь позволит несколько упростить решение задачи об их устойчивости по изгибно-крутильной форме.

Рассмотрим задачу устойчивости выделенного из арки между прогонами (см. рис. 1) криволинейного стержневого элемента открытого бисимметричного профиля, очерченного по дуге окружности радиусом R (рис. 2, а), нагруженного силой F с равными концевыми двухосными эксцентриситетами относительно линии, соединяющей центры тяжести опорных сечений. Закрепления принимаются шарнирными в двух плоскостях при отсутствии угла закручивания опорных сечений (рис. 2, б).

Эксцентриситет в плоскости загрузки e_y определяется по усилиям N^0 и M_x^0 , определяемым из расчета арки при наихудшем сочетании нагрузок $e_y = M_x^0 / N^0$. При этом эксцентриситет из плоскости криволинейного элемента принимается случайным (рис. 2, б): $e_{x,c} = l_{efy} / 750 + i_y / 20$.

Для решения поставленной задачи устойчивости по изгибно-крутильной деформированной схеме используем деформационную теорию расчета плоских упругих криволинейных стержней, обобщенную Е. А. Бейлиным [2]. Согласно последней система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} EJ_y \chi_y'' - \chi_y N^0 - \chi_z' M_x^0 - 2\chi_z (M_x^0)' + \\ + \frac{1}{R} (GJ_k \chi_z' - EJ_\omega \chi_z'') = 0; \\ EJ_\omega \chi_z''' - GJ_k \chi_z' - \chi_y (M_x^0 - \frac{EJ_y}{R}) - i_p^2 (\chi_z N^0)' = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где J_y, J_ω — главный осевой и секториальный моменты инерции сечения; J_k — момент инерции чистого кручения; E, G — модули линейной и сдвиговой деформации; i_p — полярный радиус инерции; $\chi_{y,y}, \chi_{z,y}$ — кривизна из плоскости криволинейного стержня и его кручение, которые зависят от перемещений точек оси стержня из плоскости загрузки u и угла закручивания сечения θ (рис. 2, в), а также от их производных:

$$\chi_y = -u'' + \frac{\theta}{R}; \quad \chi_z = \theta' + \frac{u'}{R}. \quad (2)$$

Значения усилий, обозначенных в системе (1) индексом «0», вытекающих из решения задачи по недеформированной схеме при симметричном нагружении (см. рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} N^0 &= F \cos \beta; \quad M_x^0 = FR(\cos \beta - \cos \alpha) + Fe_y; \\ M_y^0 &= Fe_{x,c} \cos \beta; \quad Q_y^0 = F \sin \beta; \quad M_z^0 = Fe_{x,c} \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рис. 2. Расчетная схема: а — схема загрузки стержня; б — опорное закрепление; в — изгибно-крутильные перемещения сечения

Для решения системы (1) воспользуемся аналитическим методом [3], в соответствии с которым общее решение задачи при упругой работе материала представляется в виде линейной комбинации частных решений:

$$\chi_y = \chi_{y,n} + \chi_{y,y}; \quad \chi_z = \chi_{z,n} + \chi_{z,y}. \quad (4)$$

Первые слагаемые в (4) (с индексом «н») являются решениями уравнений, составленных по недеформированной расчетной схеме.

$$\chi_{y,n} = \chi_{y,n} \Phi_{\chi,n}(z); \quad \chi_{z,n} = \chi_{z,n} v_{\chi,n}(z), \quad (5)$$

где $\chi_{y,n} = \frac{Fe_{x,c}}{EJ_y}$; $\chi_{z,n} = \frac{Fe_{x,c}R^2}{EJ_\omega}$ — амплитуды кривизны и кручения соответственно;

$$\Phi_{\chi,n}(z) = \cos\left(\frac{z}{R}\right);$$

$$v_{\chi,n}(z) =$$

$$= \left[\frac{\sin\left(\frac{z}{R}\right)}{(k^2 R^2 + 1)} - \frac{\text{sh}(kz)}{kR \text{ch}\left(\frac{kl}{2}\right)} \left(\frac{e_y}{R} + \frac{1}{k^2 R^2 + 1} \right) \right] -$$

их соответствующие формы; $k = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}}$ — изгибно-крутильная характеристика.

Изгибно-крутильные перемещения u_n и θ_n в этой задаче также могут быть определены из решения дифференциальных уравнений (2). Подставляя в последние выражения (5) и соблюдая граничные условия, соответствующие поставленной недеформационной задаче:

- при $z = 0$ $u'_n = \theta'_n = u''_n = \theta''_n = 0$;

при

$$z = \frac{l}{2} \quad u_n = \theta_n = 0; \quad \chi_{y,n} = \frac{Fe_{x,c} \cos \alpha}{EJ_y};$$

$$\chi_{z,n} = -\frac{Fe_{x,c} e_y \cos \alpha}{EJ_\omega},$$

получим

$$u_n = U_n \Phi_n(z); \quad \theta_n = \Theta_n v_n(z), \quad (6)$$

где

$$U_n = aR^3; \quad \Theta_n = aR^2; \quad a = \left(\chi_{y,n} + \chi_{z,n} \frac{1}{(k^2 R^2 + 1)} \right) \frac{1}{R};$$

$$\Phi_n(z) = \frac{2 \left(\cos \alpha - \cos\left(\frac{z}{R}\right) \right) + \frac{l}{2R} \sin \alpha - \frac{z}{R} \sin\left(\frac{z}{R}\right)}{2} +$$

$$+ \frac{\frac{b}{a} \left(\text{ch}(kz) - \text{ch}\left(\frac{kl}{2}\right) \right)}{k^2 R^2 (k^2 R^2 + 1)} + \frac{\left(\cos\left(\frac{z}{R}\right) - \cos \alpha \right)}{\cos \alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{l}{2R} \sin \alpha}{2} + \frac{\frac{b}{a} \text{ch}\left(\frac{kl}{2}\right)}{(k^2 R^2 + 1)} \right] + \frac{\chi_{y,n}}{R} \left(\cos\left(\frac{z}{R}\right) - \cos \alpha \right);$$

$$v_n(z) = \left[\frac{\frac{z}{R} \sin\left(\frac{z}{R}\right)}{2} + \frac{\frac{b}{a} \text{ch}(kz)}{k^2 R^2 + 1} - \frac{\cos\left(\frac{z}{R}\right)}{\cos \alpha} \left(\frac{\frac{l}{2R} \sin \alpha}{2} + \frac{\frac{b}{a} \text{ch}\left(\frac{kl}{2}\right)}{(k^2 R^2 + 1)} \right) \right];$$

$$a = \left[\chi_{y,n} + \chi_{z,n} \frac{1}{(k^2 R^2 + 1)} \right] \frac{1}{R};$$

$$b = -\chi_{z,n} k \frac{\cos \alpha}{k \cdot R \cdot \text{ch}\left(\frac{kl}{2}\right)} \left[\frac{e_y}{R} + \frac{1}{k^2 R^2 + 1} \right].$$

Вторые слагаемые в (4) являются функциями потери устойчивости, которые при заданных условиях симметричного нагружения ($e_{x,c} = 0$) и принятого закрепления плоского криволинейного стержня могут быть аппроксимированы в виде:

$$\chi_{y,y} = \chi_{y,y} \cos \frac{\pi z}{l}; \quad \chi_{z,y} = \chi_{z,y} \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (7)$$

где $\cos(\pi z/l)$ и $\sin(\pi z/l)$ — формы потери устойчивости; $\chi_{y,y}$, $\chi_{z,y}$ — некоторые неизвестные константы, имеющие соответствующие кривизнам размерности, с точностью до которых решаются бифуркационные задачи устойчивости.

Подставив (7) в систему уравнений (2), получим функции потери устойчивости в перемещениях:

$$u_y = U_y \Phi_y(z); \quad \theta_y = \Theta_y v_y(z), \quad (8)$$

$$\text{где } U_y = \frac{l^2}{\pi^2} \left[\chi_{y,y} - \frac{1}{\frac{\pi^2 R^2}{l^2} - 1} \left(\chi_{y,y} + \frac{\pi R}{l^2} \chi_{z,y} \right) \right];$$

$$\Theta_y = -\frac{R}{\frac{\pi^2 R^2}{l^2} - 1} \left(\chi_{y,y} + \frac{\pi R}{l} \chi_{z,y} \right);$$

$\Phi_y(z) = v_y(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ — формы потери устойчивости.

При интегрировании системы уравнений (2) приняты следующие граничные условия, соответствующие поставленной бифуркационной задаче устойчивости ($e_{x,c} = 0$):

- при $z = 0$; $u'_y = \theta'_y = u''_y = \theta''_y = 0$;
- при $z = \frac{l}{2}$; $u_y = \theta_y = u''_y = \theta''_y = 0$.

Возвращаясь к общему решению деформационной задачи (4), с учетом частных решений (5) и (7) можно увидеть, что неизвестными являются только константы функций потери устойчивости $\chi_{y,y}$, $\chi_{z,y}$. Для их определения подставим общее решение (4) в систему уравнений (1), в результате получим

$$\begin{cases} L_y = EJ_y \chi''_{y,y} - N^0 (\chi_{y,y} + \chi_{y,n}) - (\chi'_{z,y} + \chi'_{z,n}) M_x^0 - \\ - 2(\chi_{z,y} + \chi_{z,n}) \left(M_x^0 \right)' + \frac{1}{R} (GJ_k \chi'_{z,y} - EJ_\omega \chi''_{z,y}) = 0; \\ L_z = EJ_\omega \chi''_{z,y} - GJ_k \chi'_{z,y} - (\chi_{z,y} + \chi_{z,n}) M_x^0 + \chi_{z,y} \frac{EJ_y}{R} - \\ - i_p^2 \left[(\chi'_{z,y} + \chi'_{z,n}) N^0 + (\chi_{z,y} + \chi_{z,n}) \left(N^0 \right)' \right] = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Анализируя последние уравнения, можно увидеть, что они описывают задачу устойчивости криволинейного стержневого элемента, имеющего начальные геометрические несовершенства $\chi_{y,n}$ и $\chi_{z,n}$, которые вытекают из решений задач по недеформированной схеме (при действии только «активных» нагрузок [4]), и нагруженного только параметрическими силами [4] N^0 и M_x^0 .

Для решения системы (9) применим алгоритм метода Бубнова – Галеркина:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} L_y \cdot \varphi_y(z) dz = 0; \int_0^{\frac{l}{2}} L_z \cdot \psi_y(z) dz = 0, \quad (10)$$

в результате чего получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных констант кривизны $\chi_{y,y}$ и кручения $\chi_{z,y}$, решив которую, будем иметь также константы изгибно-крутильных перемещений U_y и Θ_y по (8).

Таким образом становятся известны все составляющие кривизны и кручения (4), а также перемещений:

$$u = U_n \varphi_n(z) + U_y \varphi_y(z); \theta = \Theta_n \psi_n(z) + \Theta_y \psi_y(z). \quad (11)$$

Учитывая последнее, изгибно-крутильные «деформационные» усилия можно представить в виде

$$M_y = M_y^0 + N^0 v + M_x^0 \theta; B_\omega = -EJ_\omega \chi'_z. \quad (12)$$

При упругой работе материала расчет стержневых элементов на устойчивость, как известно,

фактически является расчетом на прочность по соответствующей устойчивости деформированной схеме. Следуя сказанному, представим проверку прочности в среднем наиболее нагруженном сечении ($\beta = 0$) с учетом расчета криволинейного стержневого элемента по изгибно-крутильной деформированной схеме:

$$\frac{N}{R_y A} \left[1 + m_x^0 + m_{y,c}^0 + \frac{u(0) + e_y \theta(0)}{\rho_y} + m_\omega \right] \leq 1, \quad (13)$$

где $m_x^0 = \frac{e_y}{\rho_x}$; $m_{y,c}^0 = \frac{e_{x,c}}{\rho_y}$; $m_\omega = \frac{\omega_N}{\rho_\omega}$ — относительные осевые и «деформационный» секториальный (двухосный) эксцентриситет; ρ_x , ρ_y — ядровые расстояния; $\omega_N = \frac{B_\omega(0)}{N}$ — «деформационная» секториальная координата продольной силы; $\rho_\omega = \frac{J_\omega}{W_\omega}$; W_ω — секториальный момент сопротивления сечения.

Коэффициент устойчивости при упругой работе материала можно получить по (13):

$$\varphi_{c,y}^* = \frac{N}{R_y A} = \frac{1}{\left[1 + m_x^0 + m_{y,c}^0 + \frac{u(0) + e_y \theta(0)}{\rho_y} + m_\omega \right]}, \quad (14)$$

тогда проверка устойчивости по изгибно-крутильной форме принимает традиционный вид:

$$\frac{N}{\varphi_{c,y}^* \gamma_c R_y A} \leq 1, \quad (15)$$

где $\varphi_{c,y}^*$ — коэффициент устойчивости, который для прямолинейного элемента может быть представлен в соответствии с нормами проектирования¹ в виде произведения $\varphi_{c,y}^* = \varphi_y \cdot c$.

Используя полученное аналитическое решение, на примерах расчета исследуем изгибно-крутильную «упругую» устойчивость (по критерию фибровой текучести) криволинейных двутавровых элементов арки в зависимости от кривизны $1/R$, относительного эксцентриситета m_x^0 и его знака, а также гибкости стержня λ_y . При этом относительный эксцентриситет из плоскости кривизны стержня, в соответствии с нормами, принят как случайный

$$m_{y,c}^0 = \frac{e_{x,c}}{\rho_y}; e_{x,c} = l_{efy} / 750 + i_y / 20.$$

¹ СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М., 2011. 171 с.

На рис. 3, 4 приведены графики зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^* = N / R_y A$ от приведенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и относительного эксцентриситета m_x^0 для стержней, имеющих радиус кривизны 15 и 50 м соответственно. Сплошные линии соответствуют моменту M_x^0 , увеличивающему кривизну стержня (m_x^0 имеет положительное значение), пунктирные — моменту, уменьшающему кривизну.

Анализируя полученные результаты, можно увидеть, что при относительно малых эксцентриситетах m_x^0 знак момента весьма существенно влияет на устойчивость. Однако с увеличением гибкости $\bar{\lambda}_y$ разница между полученными значениями уменьшается, и при $m_x^0 = 3$ (стержень с радиусом кривизны $R = 15$ м) $\varphi_{c,y}^*$ при отрицательном моменте становится меньше, чем при положительном.

Влияние кривизны на устойчивость стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 2,7$ при $m_x^0 = 1; 3$ показано на рис. 5. Видно, что с увеличением кривизны знак момента значительно влияет на устойчивость при относительно малых эксцентриситетах.

Выводы

Таким образом, используя частные решения задач недеформированного расчета и бифуркационных задач устойчивости криволинейных

Рис. 3. График зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^*$ от приведенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и m_x^0 для стержней с $R = 15$ м

Рис. 4. График зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^*$ от приведенной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и m_x^0 для стержней с $R = 50$ м

Рис. 5. График зависимости коэффициента устойчивости $\varphi_{c,y}^*$ от кривизны стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 2,7$ при $m_x^0 = 1; 3$

стержневых элементов, выделенных из арки, можно получить общее решение деформационной задачи с учетом влияния случайных эксцентриситетов из плоскости кривизны и оценить изгибно-крутильную устойчивость по фибровой текучести.

Пример расчета показал, что, в отличие от прямолинейных, упомянутая устойчивость сжатых изогнутых криволинейных стержней весьма существенно зависит от их кривизны и знака эксцентриситета силы.

Библиографический список

1. Бейлин Е. А., Белый Г. И. Деформационный расчет и пространственные формы потери устойчивости тонкостенных криволинейных стержней // Сопротивление материалов и теория сооружений: республ. межведомств. науч.-техн. сб. Вып. 16. Киев: Будивельник, 1972. С. 186–189.
2. Бейлин Е. А. К теории деформационного расчета и устойчивости криволинейных и прямолинейных тонкостенных стержней // Механика стержневых систем и сплошных сред: сб. тр. Т. 63. Л.: ЛИСИ, 1970. С. 5–19.
3. Белый Г. И. О расчете упругих стержней по деформированной схеме при действии активных и параметрических нагрузок // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 13. Л.: ЛИСИ, 1980. С. 41–48.
4. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

References

1. Beylin E. A., Belyy G. I. *Deformatsionnyy raschet i prostranstvennye formy poteri ustoychivosti tonkostennykh krivolinyeynykh sterzhney* [Deformation calculation and spatial forms of stability loss of thin-walled curvilinear rods]. *Respubl. mezhvedomstv. nauch.-tekhn. sb. «Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy»* [Int. republic. sci. coll. of works "Resistance of materials and theory of structures"]. Iss. 16, Kiev, Budivelnik Publ., 1972, pp. 186–189.
2. Beylin E. A. *K teorii deformatsionnogo rascheta i ustoychivosti krivolinyeynykh i pryamolineynykh tonkostennykh sterzhney* [To the theory of deformation calculation and stability of curvilinear and rectilinear thin-walled rods]. *Sb. tr. «Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred»* [Coll. of sci. works "Mechanics of rod systems and continuous media"]. Vol. 63, Leningrad, LISI Publ., 1970, pp. 5–19.
3. Belyy G. I. *O raschete uprugikh sterzhney po deformirovannoy skheme pri deystvii aktivnykh i parametricheskikh nagruzok* [About calculation of elastic rods on the deformed pattern at the action of active and parametric loads]. *Mezhvuz. temat. sb. «Mekhanika sterzhnevyykh sistem i sploshnykh sred»* [Coll. of int. sci. works "Mechanics of rod systems and solid media"]. Iss. 13. Leningrad, LISI Publ., 1980, pp. 41–48.
4. Rzhantsyn A. R. *Ustoychivost' ravnovesiya uprugikh sistem* [Equilibrium stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955, 475 p.