УДК 539.3

© В. Д. Харлаб, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: vdx33@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-1-53-56

© V. D. Kharlab, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: vdx33@mail.ru

ОБ ОДНОМ ЛЮБОПЫТНОМ СВОЙСТВЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА

ABOUT ONE INTERESTING FEATURE OF THE ELEMENTARY BENDING-MOMENT THEORY

Формулируется и доказывается следующая теорема элементарной теории изгиба: напряженное состояние, описываемое формулами Навье, Журавского и Грасгофа, при определенном значении коэффициента Пуассона (зависящем от вида сечения и направления поперечной силы) является точным решением задачи теории упругости. Приводятся примеры.

Ключевые слова: изгиб, элементарная теория, теория упругости.

The author formulates and gives a proof of the following theorem of the elementary bending-moment theory: the stress state described by the formulas of Navier, Zhuravsky and Grashof, at a certain value of the Poisson factor (depending on the kind of section and the direction of cross-section force), is the exact solution of the theory of elasticity problem. Examples are provided.

Keywords: bending, elementary theory, elasticity theory.

Рассмотрим теорию изгиба, расчетный аппарат которой составляют формула Навье для нормального напряжения

$$\sigma_x(x, z) = \frac{M(x)z}{I}, \quad (1)$$

формула для вертикального касательного напряжения

$$\tau_{xz}(z) = \frac{QS(z)}{b(z)I}, \quad (2)$$

фигурирующая в нашей литературе как формула Журавского¹, и формула Грасгофа для горизонтального касательного напряжения²

$$\tau_{xy}(y, z) = \tau_{xz}(z) \frac{b'(z)}{b(z)} y. \quad (3)$$

В этих формулах: $M \equiv M_y$ — изгибающий момент; $Q \equiv Q_z = \text{const}$ — поперечная сила; $b(z)$ — ширина сечения в рассматриваемом месте; $S(z) \equiv S_y^{\text{отс}}(z)$ — статический момент отсеченной части сечения:

$$S(z) \equiv S_y^{\text{отс}}(z) = \int_z^{z_{\text{max}}} z_1 b(z_1) dz_1;$$

¹ Эта формула получена Ренкином (1858) и Брессом (1859) по методу, указанному Журавским (1856).

² Формулу (3) Грасгоф вывел (1858), опираясь на гипотезу: полное касательное напряжение в любой точке сечения направлено в точку пересечения касательной к контуру сечения и оси симметрии.

$I \equiv I_y$ — момент инерции сечения; y, z — координаты в главных центральных осях сечения; ось z является осью симметрии сечения. Строго говоря, формула (2) дает среднее по ширине сечения напряжение (точное значение)

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \int_{-b(z)/2}^{b(z)/2} \tau_{xz}(y, z) dy / b(z).$$

Но в сопротивлении материалов используют допущение о равномерном распределении напряжения τ_{xz} по ширине сечения, т. е. принимают, что формулой (2) приближенно определяется напряжение $\tau_{xz}(y, z)$. В настоящей статье используется именно такое, классическое толкование формулы Журавского.

В работе обсуждается следующая теорема [1]:

Напряженное состояние, описываемое формулами (1)–(3), при определенном значении коэффициента Пуассона $\nu = \nu_$ удовлетворяет полной системе уравнений теории упругости, т. е. является решением задачи теории упругости³.*

Дадим обоснование теоремы. Формула Грас-

³ Из каких соображений возникла теорема, см. в [1]. Отметим, что в настоящей публикации эти соображения не используются.

гофа выведена из первого дифференциального уравнения равновесия (д. у. р.) с использованием формул Журавского и Навье, поэтому напряжения, найденные из (1)–(3), заведомо удовлетворяют первому д. у. р. Два других д. у. р. удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим в боковой точке контура сечения, где $y = b(z)/2$, отношение двух напряжений:

$$\frac{\tau_{xy}(y, z)}{\tau_{xz}(z)} = \frac{b'(z) b(z)}{b(z) \cdot 2} = \frac{d[0,5b(z)]}{dz} = \frac{-dy}{dz} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

что поясняет рис. 1.

С другой стороны, граничное условие (г. у.) в той же точке имеет вид

$$\tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha = 0, \quad \tau_{xy} / \tau_{xz} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

что совпадает с предыдущим результатом. Следовательно, использование формул (2) и (3) обеспечивает соблюдение г. у. на боковых участках контура. На горизонтальных участках контура, где $S = 0$, выполнение г. у. обеспечивается использованием формулы (2).

Таким образом, справедливость рассматриваемой теоремы определяется только соблюдением условий сплошности (у. с.), которые будем применять в форме условий Бельтрами — Мичелла

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial z} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

С учетом (1), (2) первое у. с. принимает вид

$$\left[\frac{S(z)}{b(z)} \right]'' + \frac{1}{1+\nu} = 0, \quad (5)$$

откуда вытекает выражение для условного коэффициента Пуассона:

$$\nu_* = \Phi^{-1} - 1, \quad \Phi = -\left[\frac{S(z)}{b(z)} \right]'. \quad (6)$$

Это выражение совпадает с указанным в [1] (имеющим иное происхождение).

Рис. 1

Значения (6) отвечают реальному идеально упругому материалу, если соблюдается условие $0 \leq \nu_* \leq 0,5$. Если же данное условие не выполняется, то материал является гипотетическим. Гипотетические ситуации оставляем за рамками настоящей публикации.

Итак, если принять условный коэффициент Пуассона (6), то первое у. с. будет соблюдено.

Перейдем к рассмотрению второго у. с. С учетом (2) и (3) оно принимает вид

$$\left[\frac{S(z)}{b^2(z)} b'(z) \right]'' = 0. \quad (7)$$

Заметим, что второе у. с. никак не связано с коэффициентом Пуассона.

Отметим еще, что боковая часть контура сечения должна быть гладкой, без изломов: в противном случае горизонтальное касательное напряжение, как это видно из формулы Грасгофа, не будет удовлетворять требованию непрерывности, т. е. будет нарушено у. с.

Далее приводятся примеры использования теоремы.

Пример 1. Эллиптическое поперечное сечение. Контуром сечения служит эллипс с полуосями η, ζ :

$$\frac{y^2}{\eta^2} + \frac{z^2}{\zeta^2} = 1.$$

При этом

$$b(z) = 2\eta \sqrt{1 - z^2 / \zeta^2},$$

$$S(z) = \int_z^\zeta z_1 b(z_1) dz_1 = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\zeta} (\zeta^2 - z^2)^{3/2},$$

$$\Phi = -[S(z)/b(z)]' = 2/3,$$

$$\nu_* = \Phi^{-1} - 1 = 1/2.$$

При таком коэффициенте Пуассона первое у. с. соблюдается.

Рассмотрим второе у. с.:

$$\left[\frac{S(z)}{b^2(z)} b'(z) \right]'' = -\left(\frac{z}{3} \right)'' = 0,$$

т. е. и второе у. с. выполняется.

Касательные напряжения в сечении таковы:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{QS(z)}{b(z)I} = \frac{Q}{I} \frac{\zeta^2 - z^2}{3}, \quad I = \frac{\pi \zeta^3 \eta}{4},$$

$$\tau_{xy}(y, z) = \tau_{xz}(z) \frac{b'(z)}{b(z)} y = -\frac{Q}{3I} yz.$$

В теории упругости известно точное решение данной задачи:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(y, z) &= \frac{Q}{I} \frac{2(1+\nu)\zeta^2 + \eta^2}{2(1+\nu)(3\zeta^2 + \eta^2)} [\zeta^2 - z^2 - \\ &\quad - \frac{(1-2\nu)\zeta^2}{2(1+\nu)\zeta^2 + \eta^2} y^2], \\ \tau_{xy} &= -\frac{(1+\nu)\zeta^2 + \nu\eta^2}{(1+\nu)(3\zeta^2 + \eta^2)} \frac{Qyz}{I}.\end{aligned}$$

Положив здесь, как того требует теорема, $\nu = \nu_* = 0,5$, получаем результат, выраженный двумя предыдущими формулами, чем полностью подтверждается теорема в случае эллиптического (а значит, и круглого) сечения.

Пример 2. Прямоугольное сечение $b \times h$ (поперечная сила параллельна h).

$$S(z) = 0,5b(h^2/4 - z^2),$$

$$\Phi = -\left[\frac{S(z)}{b}\right]' = 1, \quad \nu_* = \Phi^{-1} - 1 = 0.$$

Условие (7) соблюдается, так как $b'(z) = 0$. Итак, в данном случае теорема выполняется. Это можно подтвердить известным точным решением Сен-Венана:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}(y, z) &= \frac{3Q}{2A} \left\{ 1 - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{4y^2}{b^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{ch}(2n\pi z/b)}{\text{ch}(n\pi h/b)} \cos(2n\pi y/b) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Приняв здесь, согласно теореме, $\nu = \nu_* = 0$, сразу получаем результат элементарной теории изгиба.

Пример 3. Треугольное сечение (рис. 2). В случае такого сечения

$$I = \frac{BH^3}{36}, \quad b(z) = \frac{B}{H} \left(\frac{2}{3}H - z \right),$$

$$S(z) = \frac{b(z)}{3} \left(\frac{2}{3}H - z \right) \left(\frac{1}{3}H + z \right),$$

$$\tau_{xz}(z) = \frac{QS(z)}{b(z)I} = \frac{12Q}{BH^3} \left(\frac{2}{3}H - z \right) \left(\frac{1}{3}H + z \right),$$

$$\tau_{xy}(y, z) = \tau_{xz}(z) \frac{b'(z)}{b(z)} y = -\frac{12Q}{BH^3} y \left(\frac{1}{3}H + z \right),$$

$$\Phi = -\left[\frac{S(z)}{b(z)}\right]' = \frac{2}{3}, \quad \nu_* = \Phi^{-1} - 1 = 0,5.$$

Тем самым первое у. с. удовлетворено. То, что удовлетворяется и второе у. с. ($\nabla^2 \tau_{xy} = 0$), видно из предпоследней формулы.

Итак, мы убедились, что в случае треугольного сечения теорема верна.

Рис. 2

Пример 4. Трапециевидальное сечение (рис. 3).

Для определения коэффициента Пуассона ν_* имеем формулы

$$d = \frac{3b_1 + 2c}{6(b_1 + c)} h, \quad b(z) = b_1 + 2\frac{c}{h}(h - d - z),$$

$$\Phi(z) = \frac{d^2}{dz^2} \frac{S(z)}{b(z)}, \quad \nu_*(z) = \Phi^{-1}(z) - 1.$$

Приняв $b_1 = 10$, $c = 5$, $h = 20$ и выполнив расчет, получили $d = 8,889$, $b_2 = 20$ и результат, приведенный на рис. 4 (где $\mu \equiv \nu_*$). Как видим, на части

Рис. 3

Рис. 4

сечения коэффициент Пуассона ν_* оказался отрицательным, а следовательно, реального материала, для которого теорема справедлива в случае трапециевидального сечения, не существует.

Пример 5. Сечение в виде квадратного ромба (рис. 5).

Этот важный вид сечения мы также должны исключить из рассмотрения, поскольку при $y = 0$ горизонтальное касательное напряжение, определяемое формулой Грасгофа, терпит разрыв.

Дальнейшая разработка теории выходит за рамки настоящей статьи.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д. Развитие элементарной теории касательных напряжений при плоском изгибе балок (III) // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 5 (64). С. 77–82.

Рис. 5

References

1. Kharlab V. D. *Razvitie ehlementarnoy teorii kasatel'nykh napryazheniy pri ploskom izgibe balok (III)* [Development of the elementary theory for shear stresses at simple bending of beams (III)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 5 (64), pp. 77–82.