УДК 539.3

© Л. М. Коган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор

© О. Б. Халецкая, канд. техн. наук, доцент
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)

E-mail: Kagan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2018-15-1-50-52

© L. M. Kagan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor

© O. B. Khaletskaya, PhD in Sci. Tech., Associate Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)

E-mail: Kagan_R@mail.ru

ПРОСТАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

SIMPLE APPROXIMATE FORMULA FOR CRITICAL FORCE IN ELASTIC ROD WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Предлагается простейшая приближенная формула вычисления критической силы в стержне переменного сечения. Формула обеспечивает инженерную точность в 5 %, когда по длине стержня жесткости отличаются в 10–15 раз.

Ключевые слова: критическая сила, стержень переменного сечения, приближенная формула.

The simple approximate formula is proposed for calculating the critical force in a rod with variable cross-section. The formula provides an engineering accuracy of 5 % when the difference in the rod's rigidity along the length is 10–15 times.

Keywords: critical force, rod of variable cross-section, approximate formula.

Решить в замкнутом виде задачу об устойчивости стержня переменного сечения можно только для частных законов изменения жесткости. Еще реже результат можно представить в виде простой формулы. В большинстве случаев задачу решают численно, а для оценок критической силы используют приближенные формулы.

Для грубых оценок критической силы $P_{кр}$ стержня длиной l жесткости EI применяют формулу Тимошенко [1], задавая приближенно прогиб w :

$$P_{кр} = \frac{\int_0^l EI(x)w''(x)^2 dx}{\int_0^l w'(x)^2 dx}. \quad (1)$$

Специальная приближенная формула невысокой точности известна для консольной стойки, сжатой силой на торце [2]:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 l}{12w_1}.$$

Здесь w_1 — прогиб торца консоли в отсутствие сжатия, вызванный единичной поперечной силой, приложенной к торцу.

Формула инженерной точности получена в работе [3]. Для консоли, жесткость которой изменяется по длине в 1000 раз, она дает погрешность в 2 %. Высокая точность результата достигается за счет усложнения вычислений.

Ниже предлагается приближенная формула, учитывающая переменность сечения простейшим образом. По точности она уступает результату работы [3], но превосходит формулу Тимошенко (если прогиб в этой формуле задан не слишком сложным выражением).

Задача устойчивости ставится как задача о бифуркации решения для упрощенного дифференциального уравнения изгиба стержня, сжатого силой P на торце [4]:

$$M'' + \frac{P}{EI(x)} M = 0. \quad (2)$$

В этой задаче граничные условия записываются через изгибающий момент в сечении и не используют значения прогиба и угла поворота. В таком виде условия можно записать для основных типов закрепления стержня.

Считаются известными критическая сила $P_{кр}^0$ и форма критического момента $M_{кр}^0$ в стержне постоянного сечения. Эти величины подчинены уравнению

$$M_{кр}^{0''} + \frac{P_{кр}^0}{EI_0} M_{кр}^0 = 0. \quad (3)$$

Функция $M_{кр}^0$ удовлетворяет граничным условиям, ее используем как базисную функцию метода Бубнова–Галеркина. Учитывая (3), имеем

$$M(x) = CM_{кр}^0(x), M''(x) = -C \frac{P_{кр}^0}{EI_0} M_{кр}^0(x).$$

Здесь C — постоянная, не влияющая на результат.

Для критической силы в стержне переменного сечения получаем следующую приближенную формулу

$$P_{кр} = P_{кр}^0 \frac{\int_0^l M_{кр}^0(x)^2 dx}{\int_0^l \frac{EI_0}{EI(x)} M_{кр}^0(x)^2 dx}. \quad (4)$$

Точность формулы иллюстрируем примерами стержня, жесткость которого изменяется по степенному закону

Рис. 1

Рис. 2

$$EI(x) = EI_0(1 - \alpha x)^4. \quad (5)$$

Здесь α — параметр.

В примерах критическую силу задаем безразмерным параметром $k_{кр}$:

$$P_{кр} = k_{кр}^2 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Переход в (4) к безразмерной переменной $\bar{x} = x/l$ дает:

$$k_{кр}^2 = k_{кр}^{0^2} \frac{\int_0^1 M_{кр}^0(\bar{x})^2 d\bar{x}}{\int_0^1 \frac{EI_0}{EI(\bar{x})} M_{кр}^0(\bar{x})^2 d\bar{x}}. \quad (6)$$

Результат (6) сравниваем с вычислением по формуле (1), в которой прогиб w заменен формой потери устойчивости стержня постоянного сечения. Переходя к координате $\bar{x} = x/l$, имеем

$$k_{кр}^2 = k_{кр}^{0^2} \frac{\int_0^1 \frac{EI(\bar{x})}{EI_0} w_{кр}^{0''}(\bar{x})^2 d\bar{x}}{\int_0^1 w_{кр}^{0'}(\bar{x})^2 d\bar{x}}. \quad (7)$$

Для стержня с жесткостью (5) критическую силу можно найти аналитически, однако удобнее использовать численные средства Mathcad. Такой результат считаем точным, используем его для оценки предлагаемой формулы.

Консоль. Для консоли постоянного сечения имеем

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

$$k_{кр}^0 = \pi / 2, M_{кр}^0(\bar{x}) = \cos(k_{кр}^0 \bar{x}), \\ w_{кр}^0(\bar{x}) = 1 - \cos(k_{кр}^0 \bar{x}).$$

Зависимость $k_{кр}^2$ от параметра α представлена на рис. 1. Кривая 1 — точное решение, кривая 2 — формула (6), кривая 3 — формула (7). Параметр α изменяется от $\alpha = 0$ (сечение постоянно) до $\alpha = 0,6$ (жесткости по концам отличаются в 39 раз). Видим, что вычисления по формуле (7) существенно уступают по точности.

Как известно, формула Тимошенко всегда дает верхнюю оценку критической силы. В примере предлагаемая формула также завышает критическое значение.

На рис. 2 дана зависимость погрешности в процентах. Точность в 5 % обеспечивается при $\alpha = 0,5$, когда жесткости по концам стержня отличаются в 16 раз, а критическая сила меньше значения для стержня постоянного сечения в 2,4 раза.

Стержень на двух опорах. Для стержня постоянного сечения имеем

$$k_{кр}^0 = \pi, M_{кр}^0(\bar{x}) = \sin(k_{кр}^0 \bar{x}), w_{кр}^0(\bar{x}) = \sin(k_{кр}^0 \bar{x}).$$

Результаты сравниваются на рис. 3. Рис. 4 показывает погрешность в процентах. Теперь погрешность формулы (6) несколько больше, точность в 5 % обеспечивается, если жесткости по концам стержня отличаются в 10 раз, когда

критическая сила меньше значения для стержня постоянного сечения в 3,3 раза. Снова приближенная формула завышает точное критическое значение.

Стержень, защемленный внизу и шарнирно опертый сверху. Имеем

$$k_{кр}^0 = 4,493, M_{кр}^0(\bar{x}) = \sin(k_{кр}^0 \bar{x}) - k_{кр}^0 \cos(k_{кр}^0 \bar{x}), \\ w_{кр}^0(\bar{x}) = 1 - \cos(k_{кр}^0 \bar{x}) - x + \sin(k_{кр}^0 \bar{x}) / k_{кр}^0.$$

Сравнение решений представлено на рис. 5 и 6. Видим, что точность в 5 % обеспечивается во всем рассмотренном диапазоне изменения жесткости. Однако теперь приближенная формула занижает критическое значение.

Закключение. Приближенная формула (4) позволяет с инженерной точностью учесть переменность сечения стержня, если по длине стержня жесткости различаются в 10–15 раз.

Библиографический список

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
2. Крюков К. П., Новгородцев Б. П. Конструкции и механический расчет линий электропередачи. Л.: Энергия, 1970. 392 с.
3. Каган-Розенцвейг Л. М. Метод вычисления критических сил в упругих стержнях переменного сечения. Упрощенное уравнение изгиба (III) // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 2 (55). С. 61–66.
4. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

References

1. Timoshenko S. P. *Ustoychivost' uprugikh system* [Stability of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955, 568 p.
2. Kryukov K. P., Novgorodtsev B. P. *Konstruktsii i mekhanicheskiy raschet liniy ehlektroperedachi* [Design and mechanical calculation of transmission lines]. Leningrad, Energiya Publ., 1970, 392 p.
3. Kagan-Rozentsveyg L. M. *Metod vychisleniya kriticheskikh sil v uprugikh sterzhnyakh peremennogo secheniya. Uproshchennoe uravnenie izgiba (III)* [Method to calculate the critical load in elastic rods with variable cross section. Simplified bending equation (III)] *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 2 (55), pp. 61–66.
4. Rzanitsyn A. R. *Ustoychivost' ravnovesiya uprugikh system* [Stability of the equilibrium state of elastic systems]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955, 475 p.