ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО СИММЕТРИЧНО АРМИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

ECCENTRIC COMPRESSION OF SYMMETRICALLY REINFORCED CONCRETE BAR WITH DUE ACCOUNT FOR NONLINEAR CREEP OF CONCRETE

Представлено решение задачи о внецентренном сжатии железобетонного симметрично армированного стержня прямоугольного поперечного сечения с помощью предложенной ранее автором теории нелинейной ползучести бетона. Сделан анализ перераспределения напряжений в сечении в процессе нелинейной ползучести.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, внецентренное сжатие, железобетонный стержень.

The paper presents a solution of the problem of eccentrically compressed symmetrically reinforced concrete rectangular cross-section bar through using the theory of non-linear creep of concrete previously proposed by the author. The analysis of stresses' redistribution in the bar cross-section in the process of non-linear creep is made.

Keywords: nonlinear creep, eccentric compression, reinforced concrete bar.

Железобетонный симметрично армированный стержень прямоугольного поперечного сечения сжат вертикальной силой P , приложенной с одним эксцентриситетом ξ в точке, расположенной в области ядра сечения на главной центральной оси z . Напряжения сжатия принимаются положительными.

Для решения задачи используем реологическое уравнение нелинейной теории ползучести, предложенной автором ранее [1, 2, 6], описывающее приращение полной деформации бетона во времени следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}(z, t) = \frac{\dot{\sigma}_b(z, t)}{E_b} + \frac{\dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_b(z, t) / R_b}; \quad (1)$$

выражение гипотезы плоских сечений:

$$\varepsilon(z, t) = a(t) + b(t)z; \quad (2)$$

закон Гука для i -го арматурного стержня:

$$\varepsilon_{ai}(t) = \sigma_{ai}(t) / E_a. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon(z, t)$ — полная относительная деформация бетона; $\alpha(z, t)$ — деформация линейной ползучести бетона (теория упругой наследственности, полная обратимость); $\sigma_b(z, t)$ — напря-

жение в бетоне; E_b — модуль упругости бетона; R_b — мгновенная прочность бетона при сжатии; k — безразмерный эмпирический коэффициент [1, 2, 6]; $a(t)$, $b(t)$ — функции деформации поперечного сечения; $\varepsilon_{ai}(t)$ — относительная деформация i -го арматурного стержня; $\sigma_{ai}(t)$ — напряжение в i -м арматурном стержне; E_a — модуль упругости арматуры.

Учитывая невысокий коэффициент симметричного армирования рассматриваемого стержня, примем, что $A_b = A$ и запишем уравнения равновесия

$$\int_A \sigma_b(z, t) dA + \sum_i \sigma_{ai}(t) A_{ai} = P; \quad (4)$$

$$\int_A z \sigma_b(z, t) dA + \sum_i z_{ai} \sigma_{ai}(t) A_{ai} = P \xi, \quad (5)$$

где A_b — площадь бетона; A — площадь поперечного сечения стержня; A_{ai} — площадь i -го стержня арматуры в поперечном сечении стержня; z_{ai} — координата центра тяжести сечения i -го арматурного стержня.

Учитывая постоянство во времени продольной силы P и момента $P\xi$, возьмем производную по времени t для выражений (4) и (5):

$$\int_A \dot{\sigma}_6(z, t) dA = - \sum_i \dot{\sigma}_{ai}(t) A_{ai}; \quad (6)$$

$$\int_A z \dot{\sigma}_6(z, t) dA = - \sum_i z_{ai} \dot{\sigma}_{ai}(t) A_{ai}. \quad (7)$$

Из (2) и (3) для арматурных стержней получим

$$\sum_i \sigma_{ai}(t) A_{ai} = E_a \sum_i A_{ai} a(t) + E_a \sum_i z_{ai} A_{ai} b(t); \quad (8)$$

$$\sum_i z_{ai} \sigma_{ai}(t) A_{ai} = E_a \sum_i z_{ai} A_{ai} a(t) + E_a \sum_i z_{ai}^2 A_{ai} b(t). \quad (9)$$

Возьмем производную по времени t от (2), затем с учетом (1), (6)–(9) получим

$$\int_A \frac{\dot{\sigma}_6(z, t)}{E_6} dA = - \frac{E_a}{E_6} \left(\sum_i A_{ai} \dot{a}(t) + \sum_i z_{ai} A_{ai} \dot{b}(t) \right); \quad (10)$$

$$\int_A z \frac{\dot{\sigma}_6(z, t)}{E_6} dA = - \frac{E_a}{E_6} \left(\sum_i z_{ai} A_{ai} \dot{a}(t) + \sum_i z_{ai}^2 A_{ai} \dot{b}(t) \right). \quad (11)$$

Выражение (2) продифференцируем по времени и проинтегрируем по площади сечения, далее с помощью (1), (10) и (11) получим

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) A + \dot{b}(t) S_y = \\ = - \left(\frac{E_a}{E_6} - 1 \right) \left(\sum_i A_{ai} \dot{a}(t) + \sum_i z_{ai} A_{ai} \dot{b}(t) \right) + \\ + \int_A \frac{\dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} dA. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (2) почленно умножим на координату z , а затем повторим ту же процедуру, используя уравнения (1), (10) и (11):

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) S_y + \dot{b}(t) I_y = \\ = - \left(\frac{E_a}{E_6} - 1 \right) \left(\sum_i z_{ai} A_{ai} \dot{a}(t) + \sum_i z_{ai}^2 A_{ai} \dot{b}(t) \right) + \\ + \int_A \frac{z \dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} dA. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь S_y , I_y — статический момент и осевой момент инерции площади поперечного сечения стержня A .

Начало координат помещаем в центр тяжести приведенного к бетону сечения, которое совпадает с центром тяжести всего сечения вследствие принятой симметрии.

Для приведенного к бетону сечения запишем

$$A^{\text{прив}} = A + \left(\frac{E_a}{E_6} - 1 \right) \sum_i A_{ai}; \quad (14)$$

$$I_y^{\text{прив}} = I_y + \left(\frac{E_a}{E_6} - 1 \right) \sum_i z_{ai}^2 A_{ai}, \quad (15)$$

где $A^{\text{прив}}$, $I_y^{\text{прив}}$ — площадь и осевой момент инерции площади поперечного сечения стержня, приведенного к бетону.

Учитывая симметричное армирование и равенство нулю статического момента сечения S_y , из (12)–(15) получаем

$$\dot{a}(t) A^{\text{прив}} = \int_A \frac{\dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} dA; \quad (16)$$

$$\dot{b}(t) I_y^{\text{прив}} = \int_A \frac{z \dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} dA. \quad (17)$$

Из выражения гипотезы плоских сечений (2) и реологического уравнения теории (1) получим

$$\dot{\sigma}_6(z, t) = E_6 \left[-\dot{a}(t) + z \dot{b}(t) + \frac{\dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} \right]. \quad (18)$$

Далее для описания линейной ползучести будем использовать однокомпонентный вариант теории упругой наследственности, постулирующей полную обратимость деформации линейной ползучести бетона:

$$\begin{aligned} C(t - \tau) &= C_\infty [1 - e^{-\gamma(t - \tau)}]; \\ \alpha(z, t) &= - \int_0^t \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_6(z, \tau) d\tau = \\ &= C_\infty \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t - \tau)} \sigma_6(z, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $C(t - \tau)$ — мера линейной ползучести (теория упругой наследственности).

Тогда после дифференцирования по времени из (19) получим

$$\dot{\alpha}(z, t) = C_\infty \gamma \sigma_6(z, t) - \gamma \alpha(z, t). \quad (20)$$

Из уравнения гипотезы плоских сечений (2) с учетом закона Гука (3) получим выражение для определения напряжений в арматурных стержнях:

$$\sigma_{ai}(t) = E_a [a(t) + b(t) z_{ai}]. \quad (21)$$

В соответствии с используемой теорией нелинейной ползучести [1, 2, 6] запишем выражение для текущей прочности бетона $r_6(z, t)$:

$$\dot{r}_6(z, t) = -k_1 \frac{\sigma_6(z, t)}{1 - k \sigma_6(z, t) / R_6} \dot{\alpha}(z, t), \quad (22)$$

где k_1 — безразмерный эмпирический коэффициент [1, 2, 6].

Произведем расчет по упругой стадии и получим начальные условия при $t = 0$ для численного решения задачи:

$$\sigma_6(z, 0) = \frac{P}{A^{\text{прив}}} + \frac{P\xi}{I_y^{\text{прив}}} z; \quad (23)$$

$$a(0) = \frac{P}{E_6 A_{\text{прив}}}; \quad (24)$$

$$b(0) = \frac{P\xi}{E_6 I_y^{\text{прив}}}; \quad (25)$$

$$r_6(z, 0) = R_6. \quad (26)$$

Для решения задачи необходимо определить функции $a(t)$, $b(t)$, $\sigma_6(z, t)$ из системы уравнений (16)–(18), (20) с учетом начальных условий (23)–(26). Далее можно получить оставшиеся искомые функции из (21) и (22).

Полученное численное решение можно проверить следующим образом:

1. При удалении арматуры из стержня получим внецентренно сжатый бетонный стержень. Для этого необходимо принять равенство нулю коэффициента армирования или приравнять модуль упругости арматуры модулю упругости бетона. В этом случае решение для бетонного внецентренно сжатого стержня можно сравнить с результатом решения указанной задачи, полученным ранее в [4].

2. Равенство нулю эксцентриситета ξ приведет к центрально сжатому стержню (бетонному или железобетонному в зависимости от заданных параметров). Результаты решения можно сравнить с полученными ранее в [5].

Используя различные комбинации предложенных действий, можно рассмотреть решения различных задач и сравнить с результатами, полученными ранее другими способами.

Задача была решена методом Рунге–Кутты с помощью программного комплекса MathCAD для следующих исходных данных: модуль упругости бетона $E_6 = 3 \cdot 10^5$ кгс/см²; мгновенная прочность бетона при сжатии $R_6 = 200$ кгс/см²; предельная характеристика линейной ползучести $\varphi_\infty = EC_\infty = 3$; коэффициент затухания линейной ползучести $\gamma = 0,05$ сут⁻¹; эмпирические коэффициенты $k_1 = 100$ и $k = k_1 k_2 = 1$; высота и ширина поперечного сечения $H = 40$ см и $B = 20$ см соответственно; модуль упругости арматуры $E_a = 2 \cdot 10^6$ кгс/см²; прочность арматуры при сжатии $R_a = 4000$ кгс/см²; арматура расположена симметрично относительно центра тяжести бетонного сечения с центральными координатами $z_{a1} = -15$ см и $z_{a2} = 15$ см; эксцентриситет приложения нагрузки $\xi = 0,1H = 4$ см; коэффициент армирования $k_a = A_a/A = 0,05$ и нагрузка $P = 120 \cdot 10^3$ кг.

По окончании решения задачи для удобства анализа результатов и их более наглядного отображения в сечении были выделены восемь точек, находящиеся на равном расстоянии друг от друга по высоте сечения. На гранях сечения поместим точки разбиения 0 и 8, которые будут иметь координаты $-H/2$ и $H/2$ соответственно, точку 4 будем располагать в середине сечения. В полученных восьми точках исследовались изменение напряжений, текущей прочности, полных деформаций, а также деформаций линейной и нелинейной ползучести. Изучался характер изменения указанных величин по всему сечению в определенный момент времени, то есть в зависимости от координаты z , а также в зависимости от времени на интервале 100 суток.

Результаты дальнейшего расчета приведены на рис. 1–11.

На рис. 1–2 видно, что во всем сечении напряжения в бетоне убывают. В нелинейном случае (см. рис. 1) в отличие от линейного (см. рис. 2) процесс снижения напряжений в бетоне происходит более интенсивно, также в нелинейном случае (см. рис. 1) происходит искривление эпю-

Рис. 1. Эпюра напряжений в бетоне σ_6 с учетом нелинейной и линейной ползучести в различные моменты времени

Рис. 2. Эпюра напряжений в бетоне σ_6 с учетом только линейной ползучести в различные моменты времени

Рис. 3. Изменение истинных относительных напряжений в бетоне $\sigma_{\delta}(t) / r_{\delta}(t)$ в точках 8, 6, 4, 2, 0 с учетом нелинейной и линейной ползучести

Рис. 4. Изменение истинных относительных напряжений в бетоне $\sigma_{\delta}(t) / r_{\delta}(t)$ в точках 8, 6, 4, 2, 0 с учетом только линейной ползучести

ры напряжений, что демонстрирует перераспределение напряжений в сечении.

На основе полученных в работе результатов можно сделать следующие выводы.

Для железобетонного стержня, сжатого внецентренно приложенной постоянной силой, нелинейная ползучесть бетона оказывает значительное влияние на изменение его напряженно-деформированного состояния (см. рис. 1–11).

В отличие от бетонного внецентренно сжатого стержня [4], в котором линейная ползучесть не влияет на изменение напряжений бетона (влияние оказывает только нелинейная ползучесть бетона), в железобетонном внецентренно сжатом стержне линейная составляющая ползучести также влияет на изменение напряжений и деформаций стержня, но в меньшей степени по

Рис. 5. Характер изменения истинного относительного напряжения в бетоне $\sigma_{\delta}(t) / r_{\delta}(t)$ по сечению с течением времени с учетом нелинейной и линейной ползучести

Рис. 6. Характер изменения относительного напряжения в бетоне $\sigma_{\delta}(t) / r_{\delta}(t)$ по сечению с течением времени с учетом только линейной ползучести

сравнению с нелинейной составляющей. Необходимо отметить, что чем выше начальные напряжения в железобетонном внецентренно сжатом стержне, тем больше проявляется вклад нелинейной ползучести по сравнению с линейной (см. рис. 3, 4, 9, 10).

В процессе ползучести с течением времени происходит постепенное накопление повреждений в материале, поэтому необходимо рассматривать изменение «истинного» уровня напряжений бетона, т. е. напряжение $\sigma_{\delta}(t)$, отнесенное к текущей прочности $r_{\delta}(t)$, как показано на рис. 3–6.

Очевидно, что и в бетонном [4], и в железобетонном внецентренно сжатых стержнях наблюдается перераспределение напряжений по сечению (см. рис. 1, 2, 5, 6). Эпюра напряжений в бетоне (см. рис. 1, 2) при действии нелинейной ползучести с течением времени приобретает нелинейный характер. Аналогичное поведение

Рис. 7. Характер изменения полных деформаций $\varepsilon(t)$ по сечению с учетом нелинейной и линейной ползучести

Рис. 8. Характер изменения полных деформаций $\varepsilon(t)$ по сечению с учетом только линейной ползучести

Рис. 9. Изменение относительных напряжений арматуры σ_a / R_a с течением времени в наиболее (верхний график) и наименее (нижний график) напряженном стержнях с учетом нелинейной и линейной ползучести

наблюдается на эпюре относительных напряжений бетона $\sigma_b(t)/r_b(t)$ (см. рис. 5, 6).

Необходимо отметить, что в железобетонном внецентренно сжатом стержне, в отличие от бетонного, с течением времени происходит передача напряжений с бетона на арматуру (см. рис. 3, 4, 9, 10), причем чем выше уровень начальных

Рис. 10. Изменение относительных напряжений арматуры σ_a / R_a с течением времени в наиболее (верхний график) и наименее (нижний график) напряженном стержнях с учетом только линейной ползучести

Рис. 11. Изменение деформаций ползучести $\varepsilon_{полз}(t)$ в точках 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 (снизу вверх — от менее напряженного волокна к более нагруженному) в течение 100 суток. Сплошными линиями показаны деформации с учетом нелинейной и линейной ползучести, а точками — с учетом только линейной ползучести

напряжений, тем интенсивнее происходит перераспределение напряжений не только с бетона на арматуру, но и в пределах всего сечения в целом (см. рис. 1, 2, 5, 6).

Также в процессе ползучести с течением времени наблюдается поворот сечения (см. рис. 7, 8), причем при учете нелинейной составляющей процесс поворота происходит более интенсивно (см. рис. 7, 8, 11).

Большое практическое значение представленной задачи о внецентренном сжатии железобетонного стержня подтверждается необходимостью учета вклада нелинейной ползучести для более точного определения величин напряжений в бетоне и арматуре при перераспределении напряжений в сечении, а также для отслеживания

роста полных деформаций волокон сечения с течением времени.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д., Гурьева Ю. А. Теория нелинейной ползучести и длительной прочности нестареющего бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2007. № 3 (12). С. 19–21.
2. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2008. № 2 (15). С. 37–41.
3. Гурьева Ю. А. Некоторые приложения упрощенной теории нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии // Промышленное и гражданское строительство. 2008. № 6. С. 52–53.
4. Гурьева Ю. А. Внецентренное сжатие бетонного стержня с учетом нелинейной ползучести // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 3 (62). С. 27–31.
5. Гурьева Ю. А. Железобетонный стержень, центрально сжатый длительно действующей постоянной нагрузкой, в условиях нелинейной ползучести бетона // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 4 (63). С. 124–129.
6. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии: дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2009. 101 с.
7. Жумагулов Е. Ш. Перераспределение напряжений в нормальном сечении бетона при внецентренном сжатии и его влияние на длительную прочность: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1983. 22 с.
8. Гвоздев А. А. О пересмотре способов расчета железобетонных конструкций и о первых его результатах // Сектор бетона, железобетонных и каменных конструкций. М.; Л.: ЦНИПС, 1934. 51 с.
9. Гвоздев А. А. Ползучесть бетона // Механика твердого тела: тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикладной механике. М.: Наука, 1966.
10. Васильев П. И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом влияния времени // Изв. ВНИИГ. 1951. Т. 45. С. 76–93.
11. Васильев П. И. Некоторые вопросы определения деформативных свойств бетона // Методика лабораторных исследований деформаций и прочности бетона арматуры и железобетонных конструкций: тр. координационного совещания / Акад. строительства и архитектуры СССР, НИИЖБ; ред. В. В. Макаричев. М.: Госстройиздат, 1962. С. 93–95.
12. Яценко Е. А. Исследование потерь предварительного напряжения от усадки и ползучести бетона во внецентренно обжатых железобетонных элементах // Изв. высших учеб. заведений: Строительство и архитектура. 1963. № 3. С. 23–36.

References

1. Kharlab V. D., Guryeva Yu. A. *Teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti nestareyushchego betona pri szhatii* [The theory of non-linear creep and long term durability of non-ageing concrete at compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2007, no. 3 (12), pp. 19–21.
2. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti betona pri szhatii* [A simplified theory of non-linear creep of concrete under compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2008, no. 2 (15), pp. 37–41.
3. Guryeva Yu. A. *Nekotorye prilozheniya uproshchennoy teorii nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii* [Some applications of simplified theory of non-linear creep of concrete under compression]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo – Industrial and civil engineering*, 2008, no. 6, pp. 52–53.
4. Guryeva Yu. A. *Vnetsentrennoe szhatie betonogo sterzhnya s uchetom nelineynoy polzuchesti* [Eccentric compression of concrete bar with due account for nonlinear creep]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 3 (62), pp. 27–31.
5. Guryeva Yu. A. *Zhelezobetonnyy sterzhen', tsentral'no szhatyy dlitel'no deystvuyushchey postoyannoy nagruzkoy, v usloviyakh nelineynoy polzuchesti betona* [Compression of reinforced concrete bar subjected to constant load in condition of nonlinear concrete creep]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2017, no. 4 (63), pp. 124–129.
6. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii. Diss. kand. tekhn. nauk* [Simplified theory of non-linear creep of non-ageing concrete in condition of compression. PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2009, 101 p.
7. Zhumagulov E. Sh. *Pereraspredelenie napryazheniy v normal'nom sechenii betona pri vnetsentrennom szhatii i ego vliyanie na dlitel'nuyu prochnost'*. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Distribution of stresses on the normal section of concrete at eccentric compression and its impact on the long-term durability. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Moscow, 1983, 22 p.
8. Gvozdev A. A. *O peresmotre sposobov rascheta zhelezobetonnykh konstruktsiy i o pervykh ego rezul'tatakh* [About revising of the calculation methods applied to steel concrete constructions and its first results]. Concrete, reinforced concrete and stone designs department. Moscow, Leningrad, TsNIPS Publ., 1934, 51 p.
9. Gvozdev A. A. *Polzuchest' betona* [Creep of concrete]. *Trudy II Vsesoyuznogo s'ezda po teor. i prikladnoy mekhanike «Mekhanika tverdogo tela»* [Proc. of the II All-Union Congress on a theoretical and application-oriented

mechanics "Mechanics of Solid Body"]. Moscow, Nauka Publ., 1966.

10. Vasil'ev P. I. *Svyaz' mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami v betone pri szhatii s uchetom vliyaniya vremeni* [Interrelation between stresses and deformations in concrete at compression taking into account the influence of the time factor]. *Izvestiya VNIIG – Bulletin of VNIIG*, 1951, vol. 45, pp. 76–93.

11. Vasil'ev P. I. *Nekotorye voprosy opredeleniya deformativnykh svoystv betona* [Some issues of determining the properties of concrete]. *Metodika laboratornykh issledovaniy deformatsiy i prochnosti betona armatury i zhelezobetonnykh konstruktsiy* [Technique of laboratory research of concrete deformation and durability in fittings

and reinforced concrete constructions]. Coll. of works of the Academy of Construction and Architecture USSR NIIZhB. Ed. By V. V. Makarichev. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1962, pp. 93–95.

12. Yatsenko E. A. *Issledovanie poter' predvaritel'nogo napryazheniya ot usadki i polzuchesti betona vo vnetsentrenno obzhatykh zhelezobetonnykh ehlementakh* [Research of preliminary stress losses resulted from concrete shrinkage and creep in eccentrically compressed steel concrete members]. *Izvestiya vysshikh uchebnukh zavedeniy. Stroitel'stvo i arkhitektura – Proceedings of higher educational institutions. Construction and architecture*, 1963, no. 3, pp. 23–36.