УДК 539.3

© Л. М. Коган-Розенцвейг, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: Kogan_R@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-6-102-106

© L. M. Kogan-Rosenzweig, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: Kogan_R@mail.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПРОСТЫХ РАМАХ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА

CALCULATION OF DISPLACEMENTS IN SIMPLE FRAMES BY MEANS OF INTEGRATION OF THE DIFFERENTIAL BENDING EQUATION

К расчету перемещений в раме применяется прямое интегрирование дифференциального уравнения изгиба. Предлагается удобный прием сопряжения решений для отдельных стержней в узлах, что делает вычисления простыми.

Ключевые слова: упругие рамы, дифференциальное уравнение изгиба, вычисление перемещений.

Direct integration of the differential bending equation is used to calculate displacements of frame's cross-sections. An easy-to-use way for conjugating of solutions for individual rods is proposed, which makes the calculation simple.

Keywords: elastic frames, differential bending equation, displacement calculation.

В упругой стержневой системе общего вида перемещения можно вычислить по формуле Максвелла–Мора. Однако такой способ не всегда самый рациональный. В прямолинейном стержне, когда нужны сразу линейные и угловые перемещения во всех точках, рационально интегрировать дифференциальное уравнение изгиба. В раме таким путем перемещения не определяют из-за чрезмерно громоздкой процедуры сопряжения решений для отдельных стержней. Ниже предлагается прием сопряжения решений, который делает прямое интегрирование удобным для простых рам.

Прием интересен, во-первых, с методической точки зрения, так как расширяет область рационального использования уравнения изгиба.

Во-вторых, в раме переменного сечения он ускоряет компьютерные вычисления и одновременно упрощает запись аналитических выражений. Вычисления ускоряются за счет того, что подсчет одного интеграла Мора (перемещения в одной точке) и отыскание решения дифференциального уравнения второго порядка (перемещений во всех точках) современные численные

алгоритмы выполняют столь быстро, что пользователь не ощущает различия в скорости*.

Идею подхода подсказывает запись интегралов дифференциального уравнения изгиба

$$w'' = -\frac{M}{EI} \quad (1)$$

для прямолинейного стержня. Прогиб w и угол поворота θ такого стержня удобно разбить на два слагаемых:

$$\theta = [B] + \left[-\int_0^x \frac{M(\bar{x})}{EI(\bar{x})} \bar{x} d\bar{x} \right] = \theta^* + \theta^{\Delta}, \quad (2)$$

$$w = [A + Bx] + \left[-\int_0^x \int_0^{\bar{x}} \frac{M(\bar{x})}{EI(\bar{x})} d\bar{x} d\bar{x} \right] = w^* + w^{\Delta}. \quad (3)$$

Слагаемые θ^* , w^* суть прогиб и угол поворота освобожденного от связей жесткого стержня, определяются граничными условиями. Слагаемые θ^{Δ} , w^{Δ} учитывают деформацию, отвечают стержню, у которого сечение в начале координат закреплено, от граничных условий не зависят.

Для стержня постоянного сечения интегралы в (2), (3) удобно найти методом Клебша. В общем

* Возможно, предлагаемый прием был известен в начале XX века, однако теперь забыт. В доступных автору послевоенных книгах [1–7] интегрирование дифференциального уравнения изгиба применяется исключительно к прямолинейным стержням.

случае рационально суммировать приращения на участках, вдоль которых кривизна M/EI задана гладкой функцией. Применяя такое суммирование, для угла поворота имеем

$$\theta^{\text{Л}} = \sum_{k \in s} \Delta \theta_k^{\text{Л}}. \quad (4)$$

Здесь буквой s обозначен путь интегрирования, k — номер участка стержня. Каждое приращение $\Delta \theta_k^{\text{Л}}$ есть дополнительный поворот относительно начала участка. Эти повороты можно суммировать вследствие малости углов поворота.

Аналогичную формулу для прогиба удобно записать, предварительно разложив приращения на участках длиной l_k на две части: на приращение за счет поворота $\theta_k^{\text{Л}}$ начального сечения и на приращение за счет изгиба $\Delta w_k^{\text{Л}}$. Имеем

$$w^{\text{Л}} = \sum_{k \in s} (\theta_k^{\text{Л}} l_k + \Delta w_k^{\text{Л}}). \quad (5)$$

Величины $\Delta \theta_k^{\text{Л}}$, $\Delta w_k^{\text{Л}}$ вычисляются прямым интегрированием (1) для соответствующих консолей. Длина последнего участка в (4), (5) зависит от координаты сечения.

Уравнения (2)–(5) подсказывают следующий способ вычисления перемещений в плоской раме с жесткими узлами.

Предлагаемый прием. Вводим вектор нормали $\vec{n}$ к оси рамы, сонаправленный с осями z_i локальных осей $x_i 0 z_i$ стержней. Задаем его проекциями u, v на оси глобальной системы координат XOY . s — дуговая координата сечения, отсчитываемая вдоль оси от точки A . Вдоль стержня с номером i вектор $\vec{n}$ имеет постоянное значение $\vec{n}_i$.

Идея состоит в замене прогиба w вектором перемещений $\vec{v} = w\vec{n}$. Для рамы прогиб w нельзя вычислить, суммируя приращения вдоль координаты s , вектор же $\vec{v}$ найти таким образом можно. Для приращений вдоль стержня с номером i имеем

$$\Delta \vec{v}_i = \Delta w \vec{n}_i. \quad (6)$$

Суммировать приращения $\Delta \vec{v}_i$ допустимо, если для всех стержней прогиб w вычислен по уравнению (1) (со знаком «минус»). Для этого локальные оси $x_i 0 z_i$ нужно выбирать соответствующим образом (правила выбора поясняет пример).

Предлагаемый прием справедлив при учете только поперечного изгиба стержней. В этом случае можно суммировать перемещения осво-

божденной от связей рамы как жесткого целого и перемещения рассматриваемой рамы за счет ее деформации:

$$\theta = \theta^{\text{Ж}} + \theta^{\text{Л}}, \quad (7)$$

$$\vec{v} = \vec{v}^{\text{Ж}} + \vec{v}^{\text{Л}}. \quad (8)$$

Обозначив за u_0, v_0, t_0 линейные перемещения и угол поворота сечения в точке A , для жесткого поворота имеем

$$\theta^{\text{Ж}} = t_0, \quad \vec{v}^{\text{Ж}} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + t_0 \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Здесь положительным считается поворот по ходу часовой стрелки; x, y — глобальные координаты сечения в правой системе координат.

Для угла поворота $\theta^{\text{Л}}$ рамы с жесткими узлами остается справедливым уравнение (4), суммирующее приращения углов.

Вектор $\vec{v}^{\text{Л}}$ также вычисляется суммированием приращений $\Delta \vec{v}^{\text{Л}}$ для отдельных стержней:

$$\vec{v}^{\text{Л}} = \sum_{k \in s} \Delta \vec{v}_k^{\text{Л}} = \sum_{k \in s} (\theta_k^{\text{Л}} l_k + \Delta w_k^{\text{Л}}) \vec{n}_k. \quad (10)$$

Здесь углы поворота $\theta_k^{\text{Л}}$ начала стержней заданы уравнением (4). Приращения $\Delta w_k^{\text{Л}}$ вычисляются интегрированием уравнения (1). Напомним, что последние слагаемые сумм (4), (10) относятся не к целым стержням, а к соответствующим фрагментам стержней.

Обратим внимание на то, что применить уравнение (1) непосредственно к вектору $\vec{v}^{\text{Л}}$ нельзя, так как нормаль $\vec{n}$ изменяется скачками.

Определять углы поворота $\theta_k^{\text{Л}}$ начальных сечений стержней удобно, двигаясь вдоль оси рамы к нужному сечению и суммируя приращения:

$$\theta_1^{\text{Л}} = 0, \theta_i^{\text{Л}} = \theta_k^{\text{Л}} + \Delta \theta_k^{\text{Л}}, \quad \Delta \theta_k^{\text{Л}} = \Delta \theta_x \big|_{x_k=l_k}. \quad (11)$$

Здесь i — номер рассматриваемого стержня; k — номер предшествующего на пути интегрирования стержня.

Линейные перемещения $\vec{v}_i$ также удобно определять последовательно:

$$\vec{v}_1^{\text{Л}} = 0, \vec{v}_i^{\text{Л}} = \vec{v}_k^{\text{Л}} + (\theta_k^{\text{Л}} l_k + \Delta w_k^{\text{Л}}) \vec{n}_k, \quad \Delta w_k^{\text{Л}} = \Delta w_x \big|_{x_k=l_k}. \quad (12)$$

Формулы (4), (10)–(12) сводят вычисление перемещений $\theta^{\text{Л}}$, $\vec{v}^{\text{Л}}$ к интегрированию уравнения изгиба для жестко зашумленных консолей. Отметим, что по формулам (11), (12) находятся как

перемещения произвольных сечений, так и перемещения $\theta_i^d, \bar{v}_i^d$ узлов.

Остается определить $\theta^k, \bar{v}^k$, располагая величинами $\theta_i^d, \bar{v}_i^d$. Это делаем, привлекая граничные условия. Вычислительную процедуру поясняют два примера.

Рама со стержнями постоянного сечения.

Рама на рис. 1 имеет жесткие узлы, изображена вместе с нагрузками. Номера узлов и стержней указаны соответственно в кружках и в квадратах. Глобальная система координат XOY помещена в закрепленный узел, поэтому $u_0 = v_0 = 0$. От этого же узла отсчитывается дуговая координата s . Угол поворота t_0 вычисляется.

Выбор локальных осей. Локальные системы координат x_iOz_i (i — номер стержня) принимаются левыми, при передвижении вдоль оси рамы координаты x_i и s увеличиваются одновременно. Обратим внимание на то, что локальные оси z_2, z_3 стержней 2 и 3 направлены в разные стороны.

Все вычисления примера выполнены средствами MathCad. Расчетный лист представлен на рис. 2. На листе приведены необходимые формулы, они записаны в обозначениях статьи и в тексте статьи не повторяются. Исходные данные (длины, жесткости, векторы нормалей и координаты узлов) заданы в виде матриц. Матрицы в расчете используются в первую очередь для компактной записи, их применять необязательно.

Область вычисления моментов и перемещений консолей по методу Клебша на расчетном листе обведена пунктиром, использованы обозначения: $M_i, \Delta\theta_i, \Delta w_i$ (i — номер стержня).

Рис. 1

Сплошной рамкой обведена область, реализующая предлагаемый прием сопряжения. Вычислены согласно (11) необходимые углы поворота θ_i узлов с номерами i за счет деформации рамы. По формулам (12) следующим шагом определены векторы линейных перемещений узлов.

Угол поворота t_0 дает равенство нулю вертикального перемещения узла 3:

$$-t_0 x_3 + v_{3y}^d = 0.$$

Здесь x_3 — горизонтальная координата узла; v_{3y}^d — вертикальное перемещение за счет деформации.

Строя изогнутую ось рамы, каждый стержень разбиваем на 10 частей. Необходимые вычисления также представлены на расчетном листе.

Рама со стержнями переменного сечения.

У той же рамы рис. 1 жесткости стержней заданы законами $f_i(x_i)$ произвольного вида, непрерывность не предполагается.

Теперь перемещения консолей вычисляются прямым интегрированием дифференциального уравнения изгиба с помощью функции Odesolve, что требует замены в расчетном листе MathCad (см. рис. 2) обведенного пунктиром блока блоком рис. 3. Степенные законы изменения жесткостей взяты для примера.

Обратим внимание на то, что подобный расчет с помощью проектных расчетных комплексов (например, средствами SCAD) более трудоемок и менее точен: приемлемую точность получим, разбив каждый стержень на большое число элементов постоянного сечения и предварительно подсчитав жесткости этих элементов. Для каждого нового закона изменения жесткостей процедуру ввода данных придется выполнить заново.

Библиографический список

1. Timoshenko S. Strength of materials. Part 1. Toronto: D. Van Nostrand Co, 1951. 359 p.
2. Александров А. В., Потапов В. П., Державин Б. П. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1995. 560 с.
3. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. II. М.: Наука, 1978. 616 с.
4. Корноухов И. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. М.: Стройиздат, 1949. 376 с.
5. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982. 400 с.

ORIGIN := 1 Длины Жесткости Нагрузки TOL := 10⁻¹³
Геометрия и нагрузки L := (1 1 1)^T EI := (1 1 1)^T P1 := 1 P2 := 1 q := 5 a := 0.4 L1
 Векторы нормалей n := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Координаты узлов C := $\begin{pmatrix} 0 & 0 & L_2 & -L_3 \\ 0 & L_1 & L_1 & L_1 \end{pmatrix}$

Моменты в форме Клебша и прогибы отдельных консолей Опорные реакции H := P2 Rp := $\left(P_2 \cdot L_1 + q \cdot \frac{a^2}{2} - P_1 \cdot L_3 \right) \cdot (L_2)^{-1}$
Стержень 1 M1(x) := H · x R1 := $\left[P_1 \cdot (L_2 + L_3) + q \cdot a \cdot \left(L_2 - \frac{a}{2} \right) - P_2 \cdot L_1 \right] \cdot (L_2)^{-1}$
 $\Delta\theta_1(x) := -\frac{1}{EI_1} \cdot H \cdot \frac{x^2}{2}$ **Стержень 2** M20 := Rp · L2 - q · $\frac{a^2}{2}$ Q20 := -Rp + q · a
 $\Delta w_1(x) := -\frac{1}{EI_1} \cdot H \cdot \frac{x^3}{6}$ M2(x) := M20 + Q20 · x - q · $\frac{x^2}{2}$ + q · $\frac{(x-a)^2}{2} \cdot (x > a)$
Стержень 3 M30 := P1 · L3 Q30 := -P1 $\Delta\theta_2(x) := -\frac{1}{EI_2} \cdot \left[M_{20} \cdot x + Q_{20} \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{x^3}{6} + q \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \cdot (x > a) \right]$
 M3(x) := M30 + Q30 · x $\Delta w_2(x) := -\frac{1}{EI_2} \cdot \left[M_{20} \cdot \frac{x^2}{2} + Q_{20} \cdot \frac{x^3}{6} - q \cdot \frac{x^4}{24} + q \cdot \frac{(x-a)^4}{24} \cdot (x > a) \right]$
 $\Delta\theta_3(x) := -\frac{1}{EI_3} \cdot \left(M_{30} \cdot x + Q_{30} \cdot \frac{x^2}{2} \right)$
 $\Delta w_3(x) := -\frac{1}{EI_3} \cdot \left(M_{30} \cdot \frac{x^2}{2} + Q_{30} \cdot \frac{x^3}{6} \right)$

Углы поворота узлов за счет деформации $\theta_1 := 0$ $\theta_2 := \theta_1 + \Delta\theta_1(L_1)$
Перемещения узлов за счет деформации $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 := v_1 + \Delta w_1(L_1) \cdot n^{(1)}$ $v_3 := v_2 + (\theta_2 \cdot L_2 + \Delta w_2(L_2)) \cdot n^{(2)}$
 $v_4 := v_2 + (\theta_2 \cdot L_3 + \Delta w_3(L_3)) \cdot n^{(3)}$
Постоянная интегрирования $t_0 := \frac{v_{32}}{C_{1,3}}$
Окончательные векторы перемещений $V_1(x) := t_0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + v_1 + \Delta w_1(x) \cdot n^{(1)}$ $V_2(x) := t_0 \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ -x \end{pmatrix} + v_2 + (\theta_2 \cdot x + \Delta w_2(x)) \cdot n^{(2)}$
 $V_3(x) := t_0 \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ x \end{pmatrix} + v_2 + (\theta_2 \cdot x + \Delta w_3(x)) \cdot n^{(3)}$

Изображение изогнутой оси Масштаб Sc := 1
 N := 11 i := 1..N
 $x_i := \frac{i-1}{N-1} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_1 \cdot x_i \end{pmatrix} + Sc \cdot V_1(L_1 \cdot x_i)$ $\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 \cdot x_i \\ L_1 \end{pmatrix} + Sc \cdot V_2(L_2 \cdot x_i)$ $\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_3 \cdot x_i \\ L_1 \end{pmatrix} + Sc \cdot V_3(L_3 \cdot x_i)$
 X := stack(u1,i,u2,i,u3,i) Y := stack(v1,i,v2,i,v3,i) Xm := max(X) Ym := max(Y)

Рис. 2. Расчетный лист MathCad с вычислением перемещений в раме со стержнями постоянного сечения

Законы изменения сечений $\alpha := (0.1 \ 0.5 \ 0.3)^T$ $f1(x) := (1 - \alpha_1 \cdot x)^4$ $f2(x) := (1 - \alpha_2 \cdot x)^4$ $f3(x) := (1 - \alpha_3 \cdot x)^4$

Моменты и прогибы консолей

Стержень 1 $M1(x) := H \cdot x$

Given

$$y'(x) = -\frac{M1(x)}{EI_1 \cdot f1(x)} \quad w'(x) = y(x) \quad w(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Delta w1 \\ \Delta \theta1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}, x, L1 \right]$$

Стержень 2 $M20 := R_p \cdot L_2 - q \cdot \frac{a^2}{2}$ $Q20 := -R_p + q \cdot a$ $M2(x) := M20 + Q20 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot (x > a)$

Given

$$y'(x) = -\frac{M2(x)}{EI_2 \cdot f2(x)} \quad w'(x) = y(x) \quad w(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Delta w2 \\ \Delta \theta2 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}, x, L2 \right]$$

Стержень 3 $M30 := P1 \cdot L_3$ $Q30 := -P1$ $M3(x) := M30 + Q30 \cdot x$

Given

$$y'(x) = -\frac{M3(x)}{EI_3 \cdot f3(x)} \quad w'(x) = y(x) \quad w(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Delta w3 \\ \Delta \theta3 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}, x, L3 \right]$$

Рис. 3. Фрагмент расчетного листа MathCad, вычисляющий прогибы в стержнях переменного сечения

6. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 608 с.

7. Баженов В. А., Оробей В. Ф., Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В. Строительная механика. Одесса: Астропринт, 2001. 115 с.

References

1. Timoshenko S. *Strength of materials*. Pt. 1. Toronto, D. Van Nostrand Co, 1951, 359 p.

2. Aleksandrov A. V., Potapov V. P., Derzhavin B. P. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1995, 560 p.

3. Filin A. P. *Prikladnaya mekhanika tverdogo deformiruemogo tela* [Applied mechanics of deformable solids]. Vol. II. Moscow, Nauka Publ., 1978, 616 p.

4. Kornoukhov I. V. *Prochnost' i ustoychivost' sterzhnevnykh system* [Strength and stability of framed structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1949, 376 p.

5. Rzhantsyn A. R. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982, 400 p.

6. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986, 608 p.

7. Bazhenov V. A., Orobey V. F., Dashchenko A. F., Kolomiets L. V. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Odessa, Astroprint Publ., 2001, 115 p.