УДК 539.4

© В. Д. Харлаб, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: vdx33@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-5-77-82

© V. D. Kharlab, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: vdx33@mail.ru

РАЗВИТИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ БАЛОК (III)

DEVELOPMENT OF THE ELEMENTARY THEORY FOR SHEAR STRESSES AT SIMPLE BENDING OF BEAMS (III)

Содержатся три дополнения к разработанной автором элементарной теории изгибных касательных напряжений, являющейся обобщением теории Журавского. Во-первых, выводится формула для коэффициента формы сечения, который учитывает деформацию сечения в интегралах Мора для энергии и перемещений. Новый коэффициент формы, в отличие от классического, зависит от коэффициента Пуассона и соотношения размеров сечения. Во-вторых, дается весьма простая формула, выражающая погонную потенциальную энергию деформации стержня, связанную с вертикальным касательным напряжением. В-третьих, эта формула применяется для энергетического анализа теории автора, чем устанавливаются новые свойства теории Журавского: оказывается, что при определенных значениях коэффициента Пуассона (своих для каждого вида сечения) теория Журавского дает точные результаты, совпадающие с результатами теории упругости.

Ключевые слова: изгиб, теория Журавского, обобщение.

The article contains three additions to elementary theory of bending shearing stresses developed by author which is a generalization of the Zhuravsky theory. Firstly, the formula for the factor of the section form is deduced, which considers the warping effect of the section in the Mohr integrals for energy and displacements. The new factor of the form, unlike the classical one, depends on Poisson's effect and the influence of correlation of the cross section sizes' rate. Secondly, rather simple formula expressing running potential energy of deformation of the rod connected with vertical shearing stresses is given. Thirdly, this formula is applied for the power analysis of the theory developed by the author, which expands the Zhuravsky theory. It turns out that at certain values of Poisson's factor (individually for each kind of section), the Zhuravsky theory yields the exact results coinciding with results of the theory of elasticity.

Keywords: bending, the Zhuravsky theory, generalization.

Введение. В работах [1, 2] автор предложил элементарную теорию касательных напряжений при плоском изгибе балок, обобщающую и уточняющую теорию Д. И. Журавского, которая излагается в курсах сопротивления материалов. Настоящая статья содержит три дополнения к [1, 2], указанные выше.

Теория Журавского включает в себя допущение о равномерном распределении вертикального касательного напряжения τ_{xz} по ширине сечения и общеизвестную формулу Журавского для этого напряжения¹. В середине XIX века теория

Журавского явилась выдающимся достижением сопротивления материалов, но в настоящее время она нуждается в устранении недостатков, каковыми, согласно теории упругости, являются: несправедливость упомянутого допущения о равенстве напряжений τ_{xz} в точках с одинаковым значением вертикальной координаты, отсутствие формулы для горизонтального касательного напряжения² и тот факт, что теория не отражает сильное влияние эффекта Пуассона.

Наше обобщение теории Журавского в конечном итоге выглядит следующим образом:

¹ Формула Журавского дает точное значение средней по ширине сечения величины напряжения τ_{xz} .

² В действительности такая формула имеется, но она не фигурирует в курсах сопротивления материалов и нуждается в уточнении.

$$\tau_{xz}(y, z) = \bar{\tau}_{xz}(z)[1 - k + 12ky^2 / b^2(z)], \quad (1)$$

где y, z — главные центральные координаты точек сечения; $\bar{\tau}_{xz}(z)$ — напряжение по Журавскому; $b(z)$ — ширина сечения в рассматриваемом месте; k — постоянный параметр, определяемый согласно условию сплошности в напряжениях, по формуле

$$\frac{\Phi - (1 + \nu)^{-1}}{\Phi + \Psi}, \quad (2)$$

в которой ν — коэффициент Пуассона,

$$\Phi = -\langle \frac{S(z)}{b(z)} \rangle', \quad \Psi(z) = 24 \langle \frac{S(z)}{b^3(z)} \rangle, \quad (3)$$

где $S(z)$ — статический момент отсеченной площади сечения, а угловые скобки означают усреднение по точкам оси симметрии сечения:

$$\langle f(z) \rangle = \int_z f(z) b(z) dz / A, \quad (4)$$

A — площадь сечения.

Эффект Пуассона учитывается через коэффициент k . Например, для прямоугольника, круга и треугольника теория дает соответственно

$$k_{\pi} = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{1}{1 + 2(h/b)^2};$$

$$k_k = -\frac{1 - 2\nu}{8(1 + \nu)}; \quad k_{\tau} = -\frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)} \frac{1}{1 + 6(h/b)^2}, \quad (5)$$

где h, b — высота и ширина сечения.

Формула для горизонтального касательного напряжения, выведенная из дифференциального уравнения равновесия и результата (1), имеет вид

$$\tau_{xy}(y, z) = \frac{Q}{I} y \{ z + (1 - k) [\frac{S(z)}{b(z)}]' + 4ky^2 [\frac{S(z)}{b^3(z)}]' \}. \quad (6)$$

К сожалению, она является более сложной, чем формула (1) для τ_{xz} , и к тому же обладает меньшей точностью.

Выражение в квадратных скобках (1) служит поправочным множителем к формуле Журавского. В [1, 2] указано несколько способов определения коэффициента k , здесь рассмотрен только один из них. Важным следствием теории являются формулы, весьма просто выражающие напряжения в точках оси симметрии сечения и бокового контура:

$$\tau_{xz}(0, z) = \bar{\tau}_{xz}(z)(1 - k), \quad \tau_{xz}(y_*, z) = \bar{\tau}_{xz}(z)(1 + 2k), \quad (7)$$

где y_* — координата контурной точки.

Сравнение с известными точными решениями задач показало, что рассматриваемая теория правильно отражает влияние коэффициен-

та Пуассона и соотношения размеров сечения и вообще имеет достаточно хорошую техническую точность.

Переходим к рассмотрению новых результатов.

Коэффициент формы сечения α . Этот коэффициент, как известно, учитывает деформацию сечения в интегралах Мора для энергии и перемещений от поперечной силы³:

$$U = \int_s \frac{\alpha Q^2}{2GA} ds, \quad \delta = \int_s \frac{\alpha Q \bar{Q}}{2GA} ds. \quad (8)$$

Если принимать во внимание только вертикальное касательное напряжение и определять его по формуле Журавского, то, как известно,

$$\alpha = (A / I_y^2) \int_A [S(z) / b(z)]^2 dA. \quad (9)$$

Наша теория заменила формулу Журавского другой формулой и должна, следовательно, использовать вместо (9) иное выражение. Оно вытекает непосредственно из первого соотношения (8). Взяв элемент стержня единичной длины, получаем

$$\alpha = U^{(1)} / \frac{Q^2}{2GA}. \quad (10)$$

Если, как обычно, считаться только с вертикальным касательным напряжением (энергетический вклад второго касательного напряжения незначителен), то, с учетом (1)

$$U^{(1)} = \int_A \tau_{xz}^2(y, z) dA / 2GA =$$

$$= \int_A \frac{Q^2 S^2(z)}{b^2(z) I_y^2} [1 - k + 12k \frac{y^2}{b^2(z)}]^2 dA / 2G, \quad (11)$$

и, согласно (10),

$$\alpha = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{S^2(z)}{b^2(z)} [1 - k + 12k \frac{y^2}{b^2(z)}]^2 dA, \quad (12)$$

или, после интегрирования по y в пределах от $-b(z)/2$ до $b(z)/2$,

$$\alpha = (1 + 0,8k^2) \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{A}{I_y^2} \int_z \frac{S^2(z)}{b(z)} dz. \quad (13)$$

При $k = 0$ (теория Журавского) формула (12) вырождается в формулу (9), а формула (13) принимает вид

$$\alpha = \alpha_0. \quad (14)$$

В отличие от теории Журавского, в нашей теории коэффициент α оказывается зависящим (через параметр k) от коэффициента Пуассона и соотношения генеральных размеров сечения (это демонстрирует рис. 1 на примере прямо-

³ Обычные обозначения не поясняем.

угольного сечения, где значение $\xi = h/b = 0$ надо понимать в смысле $h \ll b$).

Согласно рис. 1 коэффициент α прямоугольника имеет значения, лежащие в пределах от $\lambda_{\min} = 1,2$ до $\lambda_{\max} = 1,307$.

Рис. 1

Формула для погонной энергии от Q. Теперь энергию единицы длины стержня, связанную с действием только вертикальных касательных напряжений (с этим ограничением получена формула для коэффициента α), можно определять по формуле

$$U^{(1)} = \frac{Q^2 \alpha}{2GA} = \frac{Q^2 \alpha_0}{2GA} (1 + 0,8k^2), \quad (15)$$

более удобной, чем общая формула

$$U^{(1)} = \int_z \int_y \tau_{xz}^2(y, z) dy dz / 2G. \quad (16)$$

Если надо учесть энергию от горизонтального напряжения, то это можно сделать по формуле (16) с заменой напряжения τ_{xz} напряжением τ_{xy} , определяемым формулой (6). К сожалению, это не приводит в случае произвольного сечения к формуле, аналогичной по простоте формуле (15). Простые результаты получаются для конкретных сечений.

Рассмотрим, например, прямоугольное сечение. Для такого случая формула (6) дает

$$\tau_{xy} = -\frac{Q}{I_y} k y z (1 - 4 \frac{y^2}{b^2}). \quad (17)$$

Этому напряжению соответствует погонная энергия

$$U^{(1)}(\tau_{xy}) = \int_z \int_y \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dy dz = 0,114 \frac{b^2}{h^2} \frac{Q^2 k^2}{2GA}, \quad (18)$$

тогда как $U^{(1)}(\tau_{xz})$ определяется формулой (15). Отношение

$$\frac{U^{(1)}(\tau_{xy})}{U^{(1)}(\tau_{xz})} = 0,095 \frac{k^2}{1 + 0,8k^2} \frac{b^2}{h^2} \quad (19)$$

позволяет оценить вклад в энергию горизонтальных касательных напряжений. Пусть $b = h$,

$v = 0,5$, тогда с учетом (5) $U(\tau_{xy})/U(\tau_{xz}) = 1,61 \cdot 10^{-3}$. При $b = 2h$ рассматриваемое соотношение увеличивается в 4 раза, оставаясь все еще очень малым ($6,44 \cdot 10^{-3}$).

Привлечение теоремы о минимуме энергии. В линейной теории упругости существует теорема Кастильяно [3]: среди всех статически возможных напряженных состояний действительным является то, которому соответствует минимум потенциальной энергии деформации. Попробуем использовать эту теорему для получения дополнительной информации о параметре k .

Заметим прежде всего, что напряжение τ_{xz} при любом k удовлетворяет интегральному условию равновесия

$$\int_z \int_y \tau_{xz}(y, z) dy dz = Q \quad (20)$$

и двум граничным условиям

$$\tau_{xz}(y, z_{\min}) = \tau_{xz}(y, z_{\max}) = 0. \quad (21)$$

Представляется, что этого достаточно, чтобы признать напряжения τ_{xz} статически возможными. Можно, конечно, к напряжениям τ_{xz} (1) добавить напряжения τ_{xy} (6), тогда во всех точках сечения будут выполняться д. у. равновесия и, по свидетельству приведенных в [1, 2] примеров, в боковых точках контура сечения будут соблюдаться граничные условия. То есть в этом случае система напряжений τ_{xz} и τ_{xy} будет действительно статически возможной (оставаясь все же неполной). Но это приводит, как выяснилось, к значительным усложнениям без новых результатов.

Итак, применим теорему о минимуме энергии к совокупности напряжений $\tau_{xz}(k)$. Потенциальная энергия деформации этого объекта как функция параметра k определяется формулой (15). Глядя на эту формулу, видим, что параметр k является глобальной переменной для множества рассматриваемых статически возможных напряженных состояний (охватывает все эти состояния). Условие минимума энергии (15) дает

$$\frac{dU^{(1)}}{dk} = \frac{Q^2 \alpha_0}{2GA} 1,6k = 0, k = 0. \quad (22)$$

Этот результат, означающий, что минимуму энергии отвечает теория Журавского, является неожиданным и требует осмысления. Казалось бы, (22) говорит, что истинным напряженным состоянием нашего объекта всегда является то, которое дает теория Журавского, но это заклю-

чение, очевидно, не может быть верным. Парадокс исчезает, если принять во внимание, что параметр k не является свободной переменной, а зависит от коэффициента Пуассона (см. приведенный выше пример (5)). При этом выясняется, что применительно к прямоугольному сечению равенство $k = 0$ означает $\nu = 0$. Иными словами, если $\nu = 0$, то истинным напряженным состоянием, соответствующим минимуму энергии (15), для прямоугольного сечения является состояние по Журавскому (т. е. теория Журавского в данном случае дает то же самое, что и теория упругости). Сказанное можно повторить применительно к круглому и треугольному сечениям, но с поправкой: $\nu = 0,5$.

Из-за неполноты используемой совокупности статически возможных напряженных состояний сделанный вывод мы должны рассматривать как гипотезу, нуждающуюся в подкреплении. С этой целью обратимся к известным точным решениям теории упругости. Таковым, в частности, является решение Сен-Венана для прямоугольного сечения:

$$\tau_{xz}(y, z) = \frac{3Q}{2A} \left\{ 1 - \frac{4z^2}{h^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} - \frac{4y^2}{b^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{ch}(2n\pi z/b)}{\operatorname{ch}(n\pi h/b)} \cos(2n\pi y/b) \right] \right\}. \quad (23)$$

Положив здесь $\nu = 0$, сразу же получаем решение Журавского. Замечательно, что этот вывод справедлив при любом соотношении сторон прямоугольника.

Обратимся к рассмотрению круглого сечения. Для такого сечения наша теория дает

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{Q}{I} \frac{r^2 - z^2}{3}, \quad k = -\frac{1-2\nu}{8(1+\nu)}, \quad (24)$$

$$\tau_{xz}(y, z) = \bar{\tau}_{xz}(z)[1 - k + 3ky^2 / (r^2 - z^2)]. \quad (25)$$

В теории упругости имеется точное решение (принадлежащее опять же Сен-Венану):

$$\tau_{xz} = \frac{Q}{I_y} \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \left[r^2 - z^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} y^2 \right]. \quad (26)$$

На рис. 2 представлено сравнение решений (25) и (26) (для таких исходных данных: $r = 10$, $\nu = 0,3$, $k = -0,038$).

При взгляде на этот рисунок создается впечатление, что наше приближенное решение является на самом деле точным. Оказалось, что так оно и есть: формула (25) алгебраическими преобразованиями может быть приведена к виду (26).

Рис. 2

Приняв $\nu = 0,5$, убеждаемся в том, что решения (25) и (26) обращаются в решение (24), что и требовалось получить.

Итак, теперь мы можем с большой долей уверенности утверждать следующее:

Теорема. При определенных значениях коэффициента Пуассона $\nu = \nu_*$ (своих для каждого вида сечения) теория Журавского дает точные результаты, совпадающие с результатами теории упругости.

Этим вскрывается новое свойство теории Журавского. Отметим, что граница отсеченной площади должна располагаться, конечно, перпендикулярно к оси симметрии сечения.

Выше уже было показано, что упомянутым значением коэффициента Пуассона для прямоугольника является 0, а для круга и треугольника 0,5. Дадим теперь более полную информацию на этот счет. Общим выражением параметра k в нашей теории служит формула (2) при расшифровке (3).

Из (2) видно, что равенство нулю параметра k имеет место при

$$\Phi = (1+\nu)^{-1}. \quad (27)$$

Подставив сюда значение Φ для интересующего нас сечения, узнаем соответствующее значение коэффициента Пуассона, при котором наша теория, теория Журавского и теория упругости приводят к одинаковым результатам. Так, например, для сложного сечения рис. 3

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

следовательно, $\nu_* = \Phi^{-1} - 1 = 0,183$.

Надо сделать важную оговорку: равенство (29) не всегда выполнимо (например, оно невыполнимо при $\Phi < 0$) или может давать неприемлемые значения ν_* (например, $\nu_* = -0,5$). В таких случаях обсуждаемая теорема несправедлива.

Рис. 3

Рассмотрим пример сечения в виде правильного многоугольника. В выступающих углах многоугольника напряжения равны нулю и, следовательно, в этом месте равномерное распределение вертикального напряжения по ширине сечения (предполагаемое теорией Журавского) не может иметь места. Как уже было сказано, в нашей теории для напряжений в контурных точках справедливо соотношение

$$\tau_{xz}(y_*, z) = (1 + 2k)\bar{\tau}_{xz}.$$

Если рассматриваемое контурное напряжение равно нулю, то это означает, что $k = -0,5$ независимо от величины коэффициента Пуассона. Следовательно, никаким выбором коэффициента Пуассона нельзя обратить параметр k в ноль. Это означает, что сечение в виде правильного многоугольника не подпадает под действие теоремы (исключение составляет квадрат при поперечной силе, направленной параллельно стороне).

Двух примеров (прямоугольник и круг), конечно, недостаточно для обоснования нашей теоремы. Поэтому должны быть рассмотрены дополнительные примеры. Здесь за недостатком места приведем только результаты, относящиеся к треугольному сечению (рис. 4).

Параметр k в этом случае связан с коэффициентом Пуассона формулой

$$k = -\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \frac{1}{1+6H^2/B^2},$$

следовательно, $k = 0$ при $\nu = \nu_* = 0,5$.

Теория Журавского дает для треугольного сечения

$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{QS(z)}{b(z)I_y} = \frac{12Q}{BH^3} \left(\frac{2}{3}H - z \right) \left(\frac{1}{3}H + z \right).$$

При этом горизонтальное касательное напряжение

$$\tau_{xy}(y, z) = \bar{\tau}_{xz}(z) \frac{b'(z)}{b(z)} y = -\frac{12Q}{BH^3} y \left(\frac{1}{3}H + z \right).$$

Согласно рассматриваемой теореме, при $\nu = \nu_* = 0,5$ теория упругости должна дать то же самое, что и теория Журавского, т. е.

$$\tau_{xy}(y, z) = -\frac{12Q}{BH^3} y \left(\frac{1}{3}H + z \right),$$

$$\tau_{xz}(y, z) = \frac{12Q}{BH^3} \left(\frac{2}{3}H - z \right) \left(\frac{1}{3}H + z \right)$$

и, кроме того,

$$\sigma_x(y, z) = \frac{Mz}{I_y}.$$

Проверим это обратным методом. Дифференциальное уравнение равновесия (единственное из трех, которое не выполняется тождественно) удовлетворяется, так как из него получена формула для горизонтального касательного напряжения. Рассматриваем первое уравнение Бельтрами-Мичелла:

$$\nabla^2 \tau_{xz}(y, z) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial z} = \frac{12Q}{BH^3} (-2) + \frac{2}{3} \frac{Q36}{BH^3} \equiv 0.$$

Обратим внимание на то, что здесь множитель $2/3$ соответствует коэффициенту Пуассона $\nu_* = 0,5$, при другом значении коэффициента Пуассона рассматриваемое условие сплошности не соблюдается.

Во втором уравнении Бельтрами-Мичелла

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} = 0$$

оба слагаемые равны нулю. Прочие уравнения сплошности удовлетворяются тождественно.

Осталось рассмотреть условия на боковых сторонах сечения (условие на верхней стороне соблюдается, так как здесь отсеченная площадь

Рис. 4

равна нулю). Полное касательное напряжение на боковой стороне должно быть направлено вдоль стороны. Соответственно должно быть

$$\frac{|\tau_{xy}|}{\tau_{xz}} = \frac{B/2}{H}.$$

Учитывая, что координата y точки, лежащей на боковой стороне сечения, равна

$$\frac{B}{2H} \left(\frac{2}{3}H - z \right),$$

убеждаемся в выполнении требуемого отношения.

Таким образом, продемонстрирована справедливость теоремы в случае трех существенно разных сечений (прямоугольного, круглого и треугольного). Обратным методом легко проверить теорему и в случае других сечений.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д. Развитие элементарной теории касательных напряжений при плоском изгибе балок (I) // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 1 (48). С. 82–87.

2. Харлаб В. Д. Развитие элементарной теории касательных напряжений при плоском изгибе балок (II) // Вестник гражданских инженеров. 2015. № 4 (51). С. 74–78.

3. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.

References

1. Kharlab V. D. *Razvitie ehlementarnoy teorii kasatel'nykh napryazheniy pri ploskom izgibe balok (I)* [Development of the elementary theory of shear stresses at simple bending of beams (I)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 1 (48), pp. 82–87.

2. Kharlab V. D. *Razvitie ehlementarnoy teorii kasatel'nykh napryazheniy pri ploskom izgibe balok (II)* [Development of the elementary theory of shear stresses at simple bending of beams (II)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2015, no. 4 (51), pp. 74–78.

3. Leybenzon L. S. *Kurs teorii uprugosti* [The theory of elasticity course]. Moscow-Leningrad, OGIz GITTL Publ., 1948.