УДК 539.3

© А. А. Лукашевич, д-р техн. наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: aaluk@bk.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-5-71-76

© A. A. Lukashevich, Dr. Sci. Tech., Professor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: aaluk@bk.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ ПРИ УЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ КОНТАКТНОГО СЛОЯ

NUMERICAL SIMULATION OF PROBLEMS WITH UNILATERAL CONSTRAINTS TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEAR PROPERTIES OF THE CONTACT LAYER

Рассматривается численное решение контактной задачи при наличии нелинейно-деформируемого слоя между взаимодействующими телами. Решение задачи строится на основе метода пошагового анализа с использованием рамно-стержневых контактных элементов. Изложенный алгоритм иллюстрируется численным примером.

Ключевые слова: контактная задача, односторонние связи, пошаговый анализ, контактный слой, нелинейные свойства.

A numerical solution of the contact problem upon the availability of a nonlinearly deformable layer between interacting bodies is viewed in the paper. The problem is solved on basis of the step-by-step analysis method using the frame-rod contact elements. The algorithm is illustrated by a numerical example.

Keywords: contact problem, unilateral constraints, step-by-step analysis, contact layer, nonlinear properties.

В настоящее время для решения контактных задач с односторонними связями и трением применяются численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ) [1–4]. При этом континуальные задачи контакта сплошных упругих тел сводятся к конечномерным задачам с дискретными односторонними связями. В свою очередь для моделирования контактного взаимодействия также могут применяться специальные контактные конечные элементы (ККЭ), которые вводятся в зоне контакта упругих тел, тем самым дискретизируя некоторый тонкий слой между контактирующими поверхностями. Этот контактный слой объединяет взаимодействующие тела в единую систему и благодаря приданным ему свойствам может удовлетворять необходимым условиям контакта [5]. Такой подход позволяет конструктивную нелинейность рассматриваемой системы, то есть задачу с односторонними связями и трением между контактирующими телами, свести к рассмотрению самого нелинейного дискретного контактного слоя.

В данной работе для моделирования односторонних связей с трением используются пред-

ложенные автором контактные конечные элементы — в виде плоской или пространственной рамы [6–8]. Данные элементы взаимодействуют с обычными плоскими или пространственными элементами и обеспечивают контакт между узлами конечно-элементной сетки, находящимися на граничных поверхностях контактирующих тел. На основе рамно-стержневой модели контактного взаимодействия и метода пошагового анализа были разработаны алгоритмы решения различных контактных задач как при статическом, так и динамическом действии нагрузки. В их числе — учет трения на контакте взаимодействующих тел, упругой податливости и прочности контактных швов, последовательного возведения и нагружения сооружения, усложненных условий контакта с основанием, контактного взаимодействия в трещинах и ряда других факторов, рассмотрение которых приближает расчетную схему к реальным условиям работы сооружения [8–15].

Ниже рассматривается плоская контактная задача для линейно упругих тел V^+ и V^- , между граничными поверхностями которых (S_c^+ , S_c^-) находится нелинейно-деформируемый контакт-

ный слой толщиной ζ^0 , кроме того, между слоем и одной из граничных поверхностей возможен начальный зазор δ^0 . Моделирование контакта в дискретной модели МКЭ осуществляется с помощью плоских рамно-стержневых контактных элементов (рис. 1).

При использовании данных контактных элементов нет необходимости в совпадении координат узлов контактирующих поверхностей, т. е. могут применяться несогласованные сетки. Помимо выполнения функции регистрации состояния контактной зоны, ККЭ моделируют различные условия контакта (отрыва, сцепления, проскальзывания и т. д.). Кроме того, с помощью ККЭ можно учитывать различные свойства контактного слоя, такие, например, как податливость, начальная прочность, физическая нелинейность и др. Моделирование разнообразных условий контакта осуществляется посредством изменения физических свойств контактного слоя, которые, в свою очередь, выражаются через жесткостные характеристики рамно-стержневых ККЭ [5, 7, 10].

Считая k -й контактный элемент как k -ю дискретную упругую связь (опору) между взаимодействующими телами, запишем условия на контакте в терминах усилий и перемещений в опорном стержне k -го ККЭ [5, 10]:

$$\begin{aligned} u_{nk} + u_{nk}^c &\leq \delta_k^0; N_k \leq 0; \\ (u_{nk} + u_{nk}^c - \delta_k^0) N_k &= 0; |T_k| \leq |T_{pk}|; \\ T_k (u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) &\geq 0; (|T_k| - T_{pk}) (u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_{nk} , $u_{\tau k}$ — взаимное смещение противоположных узлов на S_c^+ и S_c^- ($k \in S_c$, $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$) по нормали и по касательной; u_{nk}^c , $u_{\tau k}^c$ — продольная и поперечная деформация k -го ККЭ (соответствующие обжатию и сдвигу контактного

слоя); N_k , T_k — продольная и поперечная силы (контактные усилия) в опорном стержне k -го ККЭ; $T_{pk} = -f_k N_k$ — предельная «кулоновская» сила трения; $f_k \geq 0$ — коэффициент трения на k -м контакте.

Численная реализация условий (1) выполняется при помощи пошагового анализа изменения состояний контакта в процессе нагружения. Переход от одного состояния контакта к другому представляет собой соответственно событие выключения, включения односторонней связи, проскальзывания или зацепления. Метод пошагового анализа является наиболее эффективным для рассматриваемого класса контактных задач, кроме того, имеется возможность управления поведением дискретного контактного слоя в соответствии с его напряженно-деформированным состоянием, характером нагружения, текущим состоянием контактной зоны и т. п.

Численные алгоритмы пошагового анализа, в том числе последовательность действий на каждом шаге, как при статическом, так и динамическом нагружении достаточно подробно изложены в [5–8, 10, 12, 14]. В основе указанных алгоритмов — представление конструктивно нелинейной контактной задачи в виде последовательности конечного числа линейных задач при последовательном изменении рабочих схем сооружения. Из анализа поведения рабочей схемы определяется момент наступления очередного события на контакте. В результате очередного шага изменяется рабочая схема и устанавливается новое состояние контакта, при этом для выполнения контактных условий, в частности по трению, применяется способ компенсирующих нагрузок. Это позволяет не только уточнять величину текущего шага нагружения, но и неко-

Рис. 1. Схема контактного взаимодействия при помощи рамно-стержневых ККЭ: а — ККЭ в зоне контакта двух тел; б — перемещения и усилия в ККЭ

торым образом прогнозировать величину следующего шага [5, 7].

При пошаговом расчете рассматриваемой контактной задачи (на основе дискретной модели МКЭ) для каждого $(s + 1)$ -го уровня нагружения будет справедливо следующее матричное уравнение равновесия [16]:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{s+1}) \mathbf{u}^{s+1} = \mathbf{P}^{s+1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}^{s+1}$ и $\mathbf{P}^{s+1}$ — соответственно векторы узловых перемещений и внешней нагрузки в конце $(s + 1)$ -го шага; $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{s+1})$ — матрица жесткости системы конечных элементов, которая зависит не только от геометрических и жесткостных характеристик сооружения, но и от деформации дискретного контактного слоя.

Принимая во внимание, что $\mathbf{u}^{s+1} = \mathbf{u}^s + \Delta \mathbf{u}^{s+1}$, где $\Delta \mathbf{u}^{s+1}$ — приращение перемещений на $(s + 1)$ -м шаге, а также представив матрицу $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{s+1})$ как сумму линейной и нелинейной составляющих $\mathbf{K}(\mathbf{u}^{s+1}) = \mathbf{K}_{\text{лин}} + \mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}^{s+1})$, преобразуем уравнение (2) к виду, позволяющему решить конструктивно и физически нелинейной задачи свести к решению последовательности только физически нелинейных задач с использованием пошагового алгоритма:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{K}_{\text{лин}} + \mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}^{s+1})] \Delta \mathbf{u}^{s+1} = \\ & = \mathbf{P}^{s+1} - [\mathbf{K}_{\text{лин}} + \mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}^{s+1})] \mathbf{u}^s. \end{aligned} \quad (3)$$

Перенеся нелинейную составляющую уравнения $\mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}^{s+1}) \Delta \mathbf{u}^{s+1}$ в правую часть, можно записать следующее рекуррентное уравнение для определения приращений перемещений $\Delta \mathbf{u}^{s+1}$ на $(s + 1)$ -м шаге с помощью итерационной процедуры последовательных приближений:

$$\mathbf{K}_{\text{лин}} \Delta \mathbf{u}_i^{s+1} = \mathbf{P}_{\text{лин}}^{s+1} - \mathbf{P}_{i-1}^{s+1}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}), \quad (4)$$

где $\Delta \mathbf{u}_i^{s+1}$ — значения приращений перемещений на текущей i -й итерации; $\mathbf{P}_{\text{лин}}^{s+1} = (\mathbf{P}^{s+1} - \mathbf{K}_{\text{лин}} \mathbf{u}^s)$ — постоянная (линейная) часть вектора правых частей; $\mathbf{P}_{i-1}^{s+1}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) = \mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) (\mathbf{u}^s + \Delta \mathbf{u}_{i-1}^{s+1})$ — изменяемая в процессе итераций часть вектора правых частей (зависящая от значений перемещений $\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}$ на предыдущей $(i - 1)$ -й итерации).

Использование ККЭ позволяет физическую нелинейность контактного слоя свести к внутренней нелинейности системы рамно-стержневых контактных элементов, при этом нелинейные свойства слоя будут задаваться через нелинейные характеристики отдельных стержней ККЭ. Представим нелинейную матри-

цу $\mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u})$, отвечающую дискретному слою, как сумму нелинейных составляющих матриц жесткости контактных элементов:

$$\mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}) = \sum_k [\mathbf{K}_{n \text{ нел}}^{(k)}(\mathbf{u}_n^c) + \mathbf{K}_{\tau \text{ нел}}^{(k)}(\mathbf{u}_\tau^c)]. \quad (5)$$

В свою очередь, нелинейная составляющая матрицы жесткости k -го ККЭ, например $\mathbf{K}_{n \text{ нел}}^{(k)}(\mathbf{u}_n^c)$, может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{K}_{n \text{ нел}}^{(k)}(\mathbf{u}_n^c) = C_n(\mathbf{u}_n^c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $C_n(\mathbf{u}_n^c)$ — функция, выражающая нелинейный закон деформирования контактного слоя в направлении нормали к контактным поверхностям. При этом вклад отдельного ККЭ в изменяемую (нелинейную) часть вектора правых частей $\mathbf{K}_{\text{нел}}(\mathbf{u}_{i-1}^{s+1}) (\mathbf{u}^s + \Delta \mathbf{u}_{i-1}^{s+1})$ будет следующим:

$$\begin{aligned} & C_n(\mathbf{u}_n^c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_n^+)^s + (\Delta \mathbf{u}_n^+)^{s+1} \\ (\mathbf{u}_n^-)^s + (\Delta \mathbf{u}_n^-)^{s+1} \end{bmatrix} \right\} = \\ & = C_n(\mathbf{u}_n^c) \left\{ \begin{bmatrix} -(\mathbf{u}_n^c)^s - (\Delta \mathbf{u}_n^c)^{s+1} \\ (\mathbf{u}_n^c)^s + (\Delta \mathbf{u}_n^c)^{s+1} \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $(\mathbf{u}_n^+)^s, (\mathbf{u}_n^-)^s$ — перемещения противоположащих точек на S_c^+, S_c^- в конце s -го шага; $(\Delta \mathbf{u}_n^\pm)^{s+1} = (\mathbf{u}_n^\pm)^{s+1} - (\mathbf{u}_n^\pm)^s$ — соответственно приращения перемещений противоположащих точек в $(i - 1)$ -м приближении для $(s + 1)$ -го шага; $(\mathbf{u}_n^c)^s$ — обжатие слоя между граничными поверхностями для s -го уровня нагружения; $(\Delta \mathbf{u}_n^c)^{s+1} = (\mathbf{u}_n^c)^{s+1} - (\mathbf{u}_n^c)^s$ — приращение величины обжатия слоя в $(i - 1)$ -м приближении для $(s + 1)$ -го шага.

С учетом нелинейного деформирования контактного слоя, как в нормальном, так и в касательном направлении — согласно (5), итерационное выражение (4) примет следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{\text{лин}} \Delta \mathbf{u}_i^{s+1} = \mathbf{P}_{\text{лин}}^{s+1} - \\ & - \left(\sum_{k \in S_{1c}, S_{2c}} \begin{bmatrix} F_{nk}^+ \\ F_{nk}^- \end{bmatrix} + \sum_{k \in S_{1c}} \begin{bmatrix} F_{\tau k}^+ \\ F_{\tau k}^- \end{bmatrix} \right)_{i-1}^{s+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $F_{nk}^+, F_{nk}^-, F_{\tau k}^+, F_{\tau k}^-$ — силы, прикладываемые на i -й итерации (в процессе итерационного уточнения $\Delta \mathbf{u}^{s+1}$ для $(s + 1)$ -го шага нагружения) к противоположащим узлам контактных поверхностей S_c^+ и S_c^- соответственно по нормали и по касательной; S_{1c} — участок контакта в состоянии

сцепления; S_{2c} — участок контакта в состоянии скольжения.

Левая часть уравнений (8) для данной рабочей схемы контакта здесь не меняется, что позволяет провести факторизацию матрицы жесткости один раз, корректируя затем значение Δu_i^{s+1} до тех пор, пока разница между двумя последующими итерациями не будет удовлетворять заданной точности расчета [16]. При этом значения корректирующих сил F_{nk}^+ , F_{nk}^- , $F_{\tau k}^+$, $F_{\tau k}^-$ вычисляются по результатам предыдущей $(i - 1)$ -й итерации:

$$\begin{cases} F_{nk}^+ \\ F_{nk}^- \end{cases} = C_n(u_n^c) \begin{cases} -(u_n^c)^s - (\Delta u_n^c)^{s+1} \\ (u_n^c)^s + (\Delta u_n^c)^{s+1} \end{cases}; \\ \begin{cases} F_{\tau k}^+ \\ F_{\tau k}^- \end{cases} = C_\tau(u_\tau^c) \begin{cases} -(u_\tau^c)^s - (\Delta u_\tau^c)^{s+1} \\ (u_\tau^c)^s + (\Delta u_\tau^c)^{s+1} \end{cases}, \quad (9)$$

где функция $C_\tau(u_\tau^c)$ выражает нелинейный закон деформирования контактного слоя в касательном направлении.

Таким образом, для каждого $(s + 1)$ -го шага нагружения с помощью рекуррентных уравнений (4) или (8) производится итерационное уточнение приращений перемещений Δu^{s+1} и соответственно приращений контактных усилий. При этом соответствующие выражения для определения момента наступления очередного события на контакте (выключения, включения связи, проскальзывания или зацепления) [5, 8, 10] записываются в виде итерационных формул. Например, уточнение величины шага нагружения до наступления момента проскальзывания либо отрыва k -й связи, находящейся до этого в состоянии контакта, будет производиться соответственно по следующим итерационным формулам:

$$(\Delta \lambda_k^{s+1})_i = (\Delta \lambda_k^{s+1})_{i-1} \left(\frac{T_{pk}^s - T_k^s}{(\Delta T_k^{s+1} - \Delta T_{pk}^{s+1})_{i-1}} \right), \quad k \in S_{1c}; \\ (\Delta \lambda_k^{s+1})_i = (\Delta \lambda_k^{s+1})_{i-1} \left(\frac{-N_k^s}{(\Delta N_k^{s+1})_{i-1}} \right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}, \quad (10)$$

где T_k^s , N_k^s — значения контактных усилий для s -го уровня нагружения; $(\Delta T_k^{s+1})_{i-1}$, $(\Delta N_k^{s+1})_{i-1}$ — приращения усилий на $(i - 1)$ -й итерации для $(s + 1)$ -го шага; $(\Delta \lambda_k^{s+1})_i$ — i -е итерационное уточнение величины $(s + 1)$ -го шага. Итерационный вид принимают и другие определяющие выра-

жения пошагового алгоритма. Окончанием итераций для какой-либо искомой величины будет достижение заданной точности вычислений. В остальном последовательность численного решения контактной задачи с нелинейно деформируемым слоем соответствует алгоритмам, изложенным в [5–10].

Нелинейный закон деформирования контактного слоя в действительности может быть гораздо сложнее, чем записанный в виде (6). Прежде всего, это относится к касательным усилиям, при учете которых следует принимать во внимание не только деформации сдвига, но и обжатие контактного слоя. В этом случае использование метода пошагового анализа позволяет устанавливать зависимость усилий от деформаций на каждом отдельном шаге нагружения, проводя затем итерационное уточнение решения для текущего уровня нагружения [16].

В качестве тестового примера рассмотрим задачу контактного взаимодействия сооружения с жестким основанием, приведенную ранее в [10]. Размеры, внешняя нагрузка, условия закрепления, характеристики материала сооружения и основания принимались теми же (коэффициент трения $f = 0,2$, начальный зазор $\delta^0 = 0$). Разбивка области на конечные элементы показана на рис. 2 (справа от оси симметрии). Количество узлов на участке контакта равнялось 9.

Контактный слой моделировался девятью рамно-стержневыми ККЭ. Нелинейный закон деформирования контактного слоя в направлении нормали к граничным поверхностям задавался следующей функцией:

$$C_{nk}(u_{nk}^c) = A_k / \left[\rho_0 \left(1 - \sqrt[3]{|u_{nk}^c| / \zeta^0} \right) \right]. \quad (11)$$

В касательном направлении жесткость контактного слоя принималась постоянной

Рис. 2. Расчетная схема задачи о взаимодействии сооружения 1 с жестким основанием 2

Рис. 3. Перемещения на контакте сооружения с основанием: а — в направлении нормали; б — в направлении касательной

$C_{\tau k} = A_k / \rho_0$. Здесь A_k — площадь контакта, приходящаяся на каждый ККЭ; начальная толщина слоя $\zeta^0 = 2$ мм; коэффициент податливости $\rho_0 = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{МН}$ (модуль упругости материала сооружения 3060 МПа).

Анализировались и сравнивались результаты расчета при следующих условиях контакта:

- 1) жесткий контакт сооружения с основанием (при нулевой податливости контактного слоя);
- 2) с линейно податливым контактным слоем (при постоянном коэффициенте податливости);
- 3) при нелинейной податливости контактного слоя в направлении нормали к поверхностям контакта.

Результаты расчетов приведены на рис. 3. Сплошная линия соответствует расчету по первому варианту, штриховая — по второму, пунктирная — по третьему. Сопоставление результатов расчета показывает, что изменение податливости контактного слоя согласно закону (11) приводит к некоторому перераспределению деформаций при его обжатии. При этом величины контактных напряжений в зоне контакта, по сравнению с результатами расчета по второму варианту [10], изменились незначительно.

Библиографический список

1. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems. Berlin: Springer. 2006. 395 p.
2. Laursen T. A., Yang B. A. Contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations // Computational Mechanics. 2008. № 41. Pp. 189–205.
3. Бабин А. П., Зернин М. В. Конечно-элементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 84–107.
4. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н. [и др.] Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка. 1989. 232 с.
5. Лукашевич А. А., Розин Л. А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 1. С. 75–81.
6. Лукашевич А. А. Моделирование контактного взаимодействия и разрушения упруго-деформируемых твердых тел при действии жесткого индентора // Вестник ТОГУ. 2007. № 1 (4). С. 127–138.
7. Лукашевич А. А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач // Изв. вузов. Строительство. 2007. № 12. С. 18–23.
8. Лукашевич А. А. Решение контактных упругих задач с трением Кулона при пошаговом нагружении // Изв. вузов. Строительство. 2008. № 10. С. 14–21.
9. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Расчет наклонного трубопровода на температурное воздействие с учетом контактного взаимодействия с основанием // Гидротехническое строительство. 2009. № 1. С. 38–41.
10. Лукашевич А. А. Решение контактных задач при учете податливости и прочности односторонних связей методом пошагового нагружения // Вестник гражданских инженеров. 2009. № 3 (20). С. 18–23.
11. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Расчет сооружений с учетом последовательного возведения и наличия односторонних связей на контактах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 4–1 (89). С. 74–78.
12. Лукашевич А. А. Решение динамических контактных задач с трением методом пошагового анализа // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 3 (24). С. 71–76.
13. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Оценка устойчивости сооружения на нескальном основании при несимметричном приложении нагрузок // Гидротехническое строительство. 2011. № 8. С. 23–27.
14. Лукашевич А. А. Решение задач с односторонними связями и трением Кулона при динамических

воздействиях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 1. С. 66–73.

15. Лукашевич А. А. Расчетные модели контактного взаимодействия и разрушения деформируемых тел с применением ККЭ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2013. № 2 (171). С. 60–65.

16. Лукашевич А. А. Решение контактных задач для упругих систем с односторонними связями методом пошагового анализа: дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 2011. 283 с.

References

1. Wriggers P., Nackenhorst U. *Analysis and Simulation of Contact Problems*. Berlin, Springer Publ., 2006, 395 p.

2. Laursen T. A., Yang B. A. Contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. *Computational Mechanics*, 2008, no. 41, pp. 189–205.

3. Babin A. P., Zernin M. V. *Konechno-ehlementnoe modelirovanie kontaktnogo vzaimodeystviya s ispol'zovaniem polozheniy mekhaniki kontaktnoy psevdosredy* [Finite element modeling of contact interaction using the provisions of mechanics of the contact pseudo-environment]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela – Bulletin of the RAS. Mechanics of solid body*, 2009, no. 4, pp. 84–107.

4. Podgornyy A. N., et al. *Zadachi kontaktnogo vzaimodeystviya ehlementov konstruktsii* [Problems of contact interaction of design elements]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1989, 232 p.

5. Lukashevich A. A., Rozin L. A. *O reshenii kontaktnykh zadach stroitel'noy mekhaniki s odносторонними svyazyami i treniem metodom poshagovogo analiza* [About solving of contact problems of construction mechanics with unilateral constraints by the step-by-step analysis method]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – Construction Journal*, 2013, no. 1, pp. 75–81.

6. Lukashevich A. A. *Modelirovanie kontaktnogo vzaimodeystviya i razrusheniya uprugodeformiruemyykh tverdykh tel pri deystvii zhestkogo indentora* [Modeling of contact interaction and destruction of elastic and deformable solid bodies at the action of a rigid indenter]. *Vestnik TOGU – Bulletin of the Pacific national University*, 2007, no. 1 (4), pp. 127–138.

7. Lukashevich A. A. *Postroenie i realizatsiya skhem pryamogo metoda konechnykh ehlementov dlya resheniya kontaktnykh zadach* [Construction and implementation of schemes of direct finite element method for solving contact tasks]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo – Bulletin of higher education institutions. Construction*, 2007, no. 12, pp. 18–23.

8. Lukashevich A. A. *Reshenie kontaktnykh uprugikh zadach s treniem Kulona pri poshagovom nagruzhenii* [Solving of contact elastic tasks using Coulomb's Law of Friction at step-by-step loading]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo –*

Bulletin of higher education institutions. Construction, 2008, no. 10, pp. 14–21.

9. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. *Raschet naklonnogo truboprovoda na temperaturnoe vozdeystvie s uchetom kontaktnogo vzaimodeystviya s osnovaniem* [Calculation of the inclined pipeline at temperature effect taking into account contact interaction with the base]. *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo – Hydrotechnical construction*, 2009, no. 1, pp. 38–41.

10. Lukashevich A. A. *Reshenie kontaktnykh zadach pri uchete podatlivosti i prochnosti odносторонnikh svyazey metodom poshagovogo nagruzheniya* [Solving contact problems taking into account compliance and strength of unilateral constraints by the step-by-step loading method]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2009, no.3 (20), pp. 18–23.

11. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. *Raschet sooruzheniy s uchetom posledovatel'nogo vozvedeniya i nalichiya odносторонnikh svyazey na kontaktakh* [Calculation of constructions taking into account consecutive construction and existence of unilateral constraints on the contacts]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU – Scientific-Technical Bulletin of SPbGPU*, 2009, no. 4-1 (89), pp. 74–78.

12. Lukashevich A. A. *Reshenie dinamicheskikh kontaktnykh zadach s treniem metodom poshagovogo analiza* [Solving of dynamic contact friction tasks by step-by-step modeling method]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2010, no.3 (24), pp. 71–76.

13. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. *Otsenka ustoychivosti sooruzheniya na neskalk'nom osnovanii pri nesimmetrichnom prilozhenii nagruzok* [Assessment of stability of the construction on non-rocky base at the asymmetrical application of loadings]. *Gidrotekhnicheskoe stroitel'stvo – Hydrotechnical construction*, 2011, no. 8, pp. 23–27.

14. Lukashevich A. A. *Reshenie zadach s odносторонnimi svyazyami i treniem Kulona pri dinamicheskikh vozdeystviyakh* [Solving of problems with unilateral constraints and Coulomb's Law of Friction under the dynamic load]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy – Construction mechanics of engineering designs and constructions*, 2011, no. 1, pp. 66–73.

15. Lukashevich A. A. *Raschetnye modeli kontaktnogo vzaimodeystviya i razrusheniya deformiruemyykh tel s primeneniem KKEh* [Computational models of contact interaction and destruction of deformable bodies using the contact finite elements] *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU – Scientific-Technical Bulletin of SPbGPU*, 2013, no. 2 (171), pp. 60–65.

16. Lukashevich A. A. *Reshenie kontaktnykh zadach dlya uprugikh sistem s odносторонnimi svyazyami metodom poshagovogo analiza*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Solving of contact tasks for elastic systems with unilateral constraints by the step-by-step analysis method. Dr. Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2011, 283 p.