УДК 624.074.3: 624.046: 691.2

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-4-135-138

© А.-Х. Б. Калдар-оол, соискатель
(Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет)
E-mail: oorzhaka-h@mail.ru

© A.-Kh. B. Kaldar-ool, competitor
(Saint Petersburg State University of Architecture
and Civil Engineering)
E-mail: oorzhaka-h@mail.ru

РАСЧЕТ КОРОБОВОГО СВОДА МЕТОДОМ СИЛ

CALCULATION OF THE BOX VAULT BY THE FORCE METHOD

Получены аналитические выражения для описания внешних нагрузок, действующих на свод, а также выражения для внутренних усилий на основе метода сил, позволяющего оценить действительное состояние коробового свода. Аналитическое исследование напряженного состояния коробовых сводов позволяет провести численный анализ поведения цилиндрических коробовых сводчатых конструкций, используемых в качестве элементов памятников архитектуры.

Ключевые слова: расчет, коробовый свод, метод сил.

There were obtained analytical expressions for describing external loads acting on the vault, as well as expressions of internal forces, on the basis of the method of forces, which makes it possible to assess the actual state of the box vault. An analytical study of the stressed state of box vaults allows for a numerical analysis of the behavior of cylindrical box vaulted structures used as elements of architectural monuments.

Keywords: calculation, box vault, method of force.

Расчетная схема свода приближенно может быть представлена как система независимых параллельных арок. В этом случае, если нагрузка вдоль свода не меняется, то о его несущей способности и деформациях также можно судить по работе одной элементарной арки (единичной ширины), являющейся, таким образом, приближенной расчетной схемой свода для этого частного случая [3, 10].

По этим соображениям для расчета коробового свода принимаем упрощенную расчетную схему в виде бесшарнирной арки.

Общий случай загрузки можно представить четырьмя типами нагрузок: от собственного веса свода, веса забутки, от равномерно распределенной нагрузки поверх забутки (вес пола) и различные виды временных нагрузок F (вес людей и оборудования).

Величина нагрузки от собственного веса свода зависит от формы оси и высоты поперечного сечения арки [7]. Аналитическое выражение этой нагрузки можно написать в виде логического математического выражения (1). Графически это выражение приведено на рис. 1.

$$q_{с.в}(\varphi) = \begin{cases} |r_1(\varphi + \alpha)A\gamma - r_2\alpha A\gamma|, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\alpha; \\ |r_2\varphi A\gamma|, & \text{если } -\alpha \leq \varphi \leq \alpha; \\ |r_1(\varphi - \alpha)A\gamma + r_2\alpha A\gamma|, & \text{если } \alpha < \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Для определения веса забутки находим наружные радиусы свода:

$$r_1 t = r_1 + \frac{h}{2}; \quad r_2 t = r_2 + \frac{h}{2}.$$

Площадь забутки может быть определена из следующего логического выражения (графически это выражение приведено на рис. 2):

$$A(\varphi) = \begin{cases} r_2 t^2 \int_{-\alpha}^0 \cos(\xi)(1 - \cos(\xi)) d\xi + \\ + \left[\int_{\varphi}^{-\alpha} r_1 t \cos(\xi) \left[r_2 t (1 - \cos(\alpha)) + \right. \right. \\ \left. \left. + r_1 t (\cos(\alpha) - \cos(\xi)) \right] d\xi \right], & \text{если } -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq -\alpha \\ r_2 t^2 \int_{\varphi}^0 \cos(\xi)(1 - \cos(\xi)) d\xi, & \text{если } -\alpha \leq \varphi \leq 0 \\ r_2 t^2 \int_0^{\varphi} \cos(\xi)(1 - \cos(\xi)) d\xi, & \text{если } 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ r_2 t^2 \int_0^{\alpha} \cos(\xi)(1 - \cos(\xi)) d\xi + \\ + \left[\int_{\alpha}^{\varphi} r_1 t \cos(\xi) \left[r_2 t (1 - \cos(\alpha)) + \right. \right. \\ \left. \left. + r_1 t (\cos(\alpha) - \cos(\xi)) \right] d\xi \right], & \text{если } \alpha < \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Рис. 1. График нарастания нагрузки от собственного веса свода

Рис. 3. График нагрузки от забутки

Рис. 2. График изменения площади забутки

Рис. 4. График равномерно распределенной нагрузки

Величина нагрузки от забутки (график на рис. 3):

$$q_3(\varphi) = A(\varphi) \cdot \gamma \cdot b, \quad (3)$$

где γ — объемный вес кладки.

Величина равномерно распределенной нагрузки (график на рис. 4):

$$q(\varphi) = \begin{cases} q \cdot b, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\alpha \\ q \cdot b, & \text{если } -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \\ q \cdot b, & \text{если } \alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Величина временной нагрузки, прикладываемой в любой точке в интервале $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (рис. 5):

$$F(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\alpha \\ 0, & \text{если } -\alpha \leq \varphi \leq 0 \\ 0, & \text{если } 0 \leq \varphi \leq \gamma \\ P, & \text{если } \gamma \leq \varphi \leq \alpha \\ P, & \text{если } \alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Рис. 5. График изменения временной нагрузки

Статический расчет трехцентрового коробового свода производится для вышеназванной расчетной схемы (рис. 6).

X_1, X_2, X_3 — неизвестные метода сил.

Условиями совместности перемещений будут три уравнения [6, 8, 9]:

Рис. 6. Основная система

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1q} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2q} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3q} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

В силу симметрии часть коэффициентов при неизвестных системы уравнений (6) равны нулю, а именно $\delta_{13}, \delta_{31}, \delta_{23}, \delta_{32} = 0$.

Используя выражение возможной работы Мора [6, 9], можно представить перемещения δ_{ik} в виде следующей записи, в которой учтены не только упругое обжатие, но и влияние на искомое перемещение продольных и поперечных сил:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} = & \sum_{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_i(\varphi)N_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EA} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{N_i(\varphi)N_k(\varphi)r_2 d\varphi}{EA} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{N_i(\varphi)N_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EA} + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EJ_{r_1}} + \\ & + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_2 d\varphi}{EJ_{r_2}} + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EJ_{r_1}} + \\ & + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_i(\varphi)Q_k(\varphi)r_1 d\varphi}{GA} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{Q_i(\varphi)Q_k(\varphi)r_2 d\varphi}{GA} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{Q_i(\varphi)Q_k(\varphi)r_1 d\varphi}{GA} + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_k(\varphi)N_i(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1} + \\ & + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_k(\varphi)N_i(\varphi)r_2 d\varphi}{EA r_2} + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_k(\varphi)N_i(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1} + \\ & + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)N_k(\varphi)d\varphi}{EA} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)N_k(\varphi)d\varphi}{EA} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)N_k(\varphi)d\varphi}{EA} + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1^2} + \\ & + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_2 d\varphi}{EA r_2^2} + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_k(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Перемещения Δ_{iq} по направлению X_i от заданной нагрузки [6, 9]:

$$\begin{aligned}\Delta_{iq} = & \sum_{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_i(\varphi)N_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{N_i(\varphi)N_q(\varphi)r_2 d\varphi}{EA} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{N_i(\varphi)N_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA} + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EJ_{r_1}} + \\ & + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_2 d\varphi}{EJ_{r_2}} + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EJ_{r_1}} + \\ & + \mu \left[\sum_{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_i(\varphi)Q_q(\varphi)r_1 d\varphi}{GA} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{Q_i(\varphi)Q_q(\varphi)r_2 d\varphi}{GA} + \right. \\ & \left. + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{Q_i(\varphi)Q_q(\varphi)r_1 d\varphi}{GA} \right] + \\ & + \sum_{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{N_i(\varphi)M_q(\varphi)r_2 d\varphi}{EA r_2} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{N_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1} + \sum_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)N_q(\varphi)d\varphi}{EA} + \\ & + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)N_q(\varphi)d\varphi}{EA} + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)N_q(\varphi)d\varphi}{EA} + \\ & + \sum_{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1^2} + \sum_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_2 d\varphi}{EA r_2^2} + \\ & + \sum_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \frac{M_i(\varphi)M_q(\varphi)r_1 d\varphi}{EA r_1^2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Решение системы канонических уравнений в матричной форме можно представить в следующем виде.

Матрица коэффициентов при неизвестных [5]:

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix}.\quad (9)$$

Матрица свободных членов:

$$D_f = \begin{pmatrix} \Delta_{1q} \\ \Delta_{2q} \\ \Delta_{3q} \end{pmatrix}.\quad (10)$$

Искомые неизвестные метода сил:

$$X = -D^{-1} \cdot D_f.\quad (11)$$

Для принятой основной системы выражения внутренних сил свода имеют вид по общей формуле [4, 6, 8, 9]:

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= M_1(\varphi)X_1 + M_2(\varphi)X_2 + M_3(\varphi)X_3 + M_q(\varphi); \\ N(\varphi) &= N_1(\varphi)X_1 + N_2(\varphi)X_2 + N_3(\varphi)X_3 + N_q(\varphi); \\ Q(\varphi) &= Q_1(\varphi)X_1 + Q_2(\varphi)X_2 + Q_3(\varphi)X_3 + Q_q(\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом влияния нормальной силы и изгибающего момента напряжение определяется по формуле [4, 6, 9]:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M \cdot z}{J_y}, \quad (13)$$

где N — наибольшая продольная сила в сечении; M — наибольший изгибающий момент в сечении; A — площадь поперечного сечения; J — момент инерции.

Аналитический метод, в котором рабочая схема представлена как система независимых параллельных арок, а раскрытие статической неопределимости осуществляется с использованием метода сил, не уступает МКЭ по своей простоте и наглядности, а в отдельных случаях превосходит его (учет упругого обжатия, учет кривизны).

Библиографический список

1. Бернштейн С. А. Основы расчета статически неопределимых систем. М.: Госстройиздат, 1936. 224 с.
2. Бернштейн С. А. Очерки по истории строительной механики. М.: Госстройиздат, 1957. 236 с.
3. Бессонов Г. Б. Исследование деформаций, расчет несущей способности и конструктивное укрепление древних распорных систем. М.: Росреставрация, 1989. 163 с.
4. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 456 с.
5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов вузов: в 2 ч. 4-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 1986. Ч. II. 415 с.
6. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика: учебник. 10-е изд., стер. СПб.: Лань, 2005. 656 с.
7. Калдар-оол А.-Х. Б., Корзон С. А. Аналитические способы построения трехцентровых коробовых кривых // Вестник гражданских инженеров. 2012. № 1 (30). С. 112–114.
8. Качурин В. К. Расчет бесшарнирных симметричных сводов. М.: Советская наука, 1942. 166 с.
9. Киселев В. А. Строительная механика. М.: Госстройиздат, 1960. 560 с.
10. Подъяпольский С. С., Бессонов Г. Б., Беляев Л. А., Постникова Т. М. Реставрация памятников архитектуры: учеб. пособие для вузов. М.: Стройиздат, 1988. 264 с.
11. Рабинович И. М. Курс строительной механики. 2-е изд., перераб. М.; Л.: Стройиздат, 1950. 387 с.

References

1. Bernstein S. A. *Osnovy rascheta staticheski neopredelimykh sistem* [Fundamentals of the calculation of statically indeterminate systems]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1936, 224 p.
2. Bernstein S. A. *Ocherki po istorii stroitel'noy mekhaniki* [Essays on the history of structural mechanics]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1957, 236 p.
3. Bessonov G. B. *Issledovanie deformatsiy, raschet nesushchey sposobnosti i konstruktivnoye ukreplenie drevnikh raspornykh sistem* [Investigation of deformations, calculation of bearing capacity and constructive strengthening of ancient spacing systems]. Moscow, Rosrestavratsiya Publ., 1989, 163 p.
4. Gastev V. A. *Kratkiy kurs soprotivleniya materialov* [Short course of resistance of materials]. 2-nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
5. Danko P. E., Popov A. G., Kozhevnikova T. Ya. *Vyshshaya matematika v uprazhneniyakh i zadachakh. Ucheb. posobie dlya studentov vuzov* [Higher mathematics in exercises and tasks. Textbook for university students]. In 2 parts. 4-th ed., revised and added. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1986, pt. 2, 415 p.
6. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naya mekhanika. Uchebnik* [Construction mechanics. Textbook.]. 10-th. ed. St. Petersburg, Lan' Publ., 2005, 656 p.
7. Korzon S. A., Kaldar-ool A.-Kh. B. *Analiticheskie sposoby postroeniya trekhcentrovyykh korobovyykh krivyykh* [Analytical methods of constructing three-centre circular curves (Korobov curves)]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2012, no. 1 (30), pp. 112–114.
8. Kachurin V. K. *Raschet bessharnirnykh simmetrichnykh svodov* [Calculation of hingeless symmetric arches]. Moscow, Sovetskaya Nauka Publ., 1942, 166 p.
9. Kiselev V. A. *Stroitel'naya mekhanika* [Construction mechanics]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1960, 560 p.
10. Pod'yapol'skiy S. S., Bessonov G. B., Belyaev L. A., Postnikova T. M. *Restavratsiya pamyatnikov arkhitektury. Ucheb. posobie dlya vuzov* [Restoration of monuments of architecture. Teaching manual for higher schools]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1988, 264 p.
11. Rabinovich I. M. *Kurs stroitel'noy mekhaniki* [Course of construction mechanics]. 2-nd ed., revised. Moscow, Leningrad, Stroyizdat Publ., 1950, 387 p.