УДК 624.042.7

© О. П. Нестерова, аспирант
(Петербургский государственный университет путей
сообщения Императора Александра I)
E-mail: neona975@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-3-50-54

© O. P. Nesterova, post-graduate student
(Emperor Alexander I Saint Petersburg
State Transport University)
E-mail: neona975@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕТОДИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ ДЕМПФИРОВАННЫХ СИСТЕМ

USING THE RESPONSE SPECTRUM METHOD FOR CALCULATING THE OSCILLATION DAMPERS OF DAMPED SYSTEMS

Рассмотрена возможность применения линейно-спектральной методики с учетом влияния демпфирования на формы колебания и корреляции форм колебания для расчета систем с динамическим гасителем колебаний (ДГК). Показано, что данная методика позволяет учесть работу ДГК в сильно демпфированных системах и оценить его эффективность. Данная методика позволяет подобрать оптимальное значение настройки ДГК.

Ключевые слова: динамический гаситель колебаний, спектральная методика, учет влияния затухания.

The article considers the possibility of using the response spectrum method taking into account the influence of damping on the oscillation shape modes and their correlation for calculation of systems with mass damper (MD). The research demonstrates that this method allows to take into account the behavior of MD for strongly damped systems and to evaluate its effectiveness. This technique allows selecting the optimum value of MD parameters.

Keywords: mass damper, response spectra method, accounting the influence of damping.

Возможность применения линейно-спектральной методики (ЛСМ) для расчета сооружений с динамическим гасителем колебаний (ДГК) рассмотрена в работе [1]. Как показано в [1], нормативный вариант ЛСМ позволяет оценить эффективность ДГК для сейсмозащиты сооружений, причем в запас, но только для систем с малым затуханием. Как показали имеющиеся исследования, в сейсмостойком строительстве эффективнее применять ДГК большой массы с большим демпфированием [2–4]. В последние годы рассматривается вопрос применения ДГК для снижения смещений в сейсмоизолированных системах. В таких системах затухание в защищаемом сооружении может быть больше 30 % от критического [2], и оценка эффективности применения ДГК для таких систем с помощью нормативного варианта ЛСМ дает большие погрешности [1, 5]. Для более точной оценки эффективности ДГК необходимо использовать уточненный вариант ЛСМ, в который вводится поправка, учитывающая затухание по формам колебаний (модальное демпфиро-

вание), обусловленное демпфированием как в пружине гасителя, так и в защищаемой системе [6–8].

Развитие ЛСМ для сильно демпфированных систем

Уравнение сейсмических колебаний для системы с учетом затухания имеет следующий вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{R}\mathbf{Y} = -\mathbf{M}\mathbf{V}_p\ddot{y}_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{R}$ — матрицы инерции и жесткости; $\mathbf{B}$ — матрица вязкого демпфирования; $\mathbf{Y}$ — вектор обобщенных координат; $\mathbf{V}_p$ — вектор проекций воздействия на направления обобщенных координат; $\ddot{y}_0$ — ускорение колебаний основания.

Для сильно демпфированных систем с непропорциональным демпфированием необходимо работать с полной матрицей системы (2):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} \\ \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

и уравнением вида

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\Theta} = [\dot{\mathbf{Y}}, \mathbf{Y}]$.

Для применения ЛСМ к сильно демпфированной системе удобно воспользоваться теоре-

мой о приведении произвольной вещественной матрицы к трехдиагональному виду [9]. Данная трехдиагональная матрица имеет порядок $2n$, где n — число степеней свободы; матрица состоит из четырех квадратных диагональных блоков размером $n \times n$. У первого и последнего блока на диагонали стоят вещественные части собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$, у второго и третьего блоков — мнимые части, причем у одного из блоков со знаком минус. Трехдиагональная матрица Φ имеет следующий вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{\Omega} \\ -\mathbf{\Omega} & \mathbf{N} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\mathbf{N} = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]$ — вещественные части собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$; $\mathbf{W} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ — мнимые части собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

В главных координатах система (1) примет следующий вид:

$$\ddot{\Xi} + \mathbf{GK}\dot{\Xi} + \mathbf{K}^2\Xi = -(\mathbf{\Omega Q}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{GKP}_1)\ddot{\Psi}_0 - \mathbf{P}_1\ddot{\Psi}_0; \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{H}} + \mathbf{GK}\dot{\mathbf{H}} + \mathbf{K}^2\mathbf{H} = -(\mathbf{\Omega P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{GKQ}_1)\ddot{\Psi}_0 - \mathbf{Q}_1\ddot{\Psi}_0. \quad (6)$$

Здесь $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k]$; $\mathbf{H} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k]$ — главные координаты;

$$\ddot{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{V}_p\ddot{\mathbf{y}}_0;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = & \left[-\frac{\gamma_1 k_1}{2}, -\frac{\gamma_2 k_2}{2}, \dots, -\frac{\gamma_n k_n}{2}, -\frac{\gamma_1 k_1}{2}, -\frac{\gamma_2 k_2}{2}, \dots, -\frac{\gamma_n k_n}{2} \right] + \\ & + \mathbf{i} \left[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n \right] = \\ & = \left[\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \right] + \\ & + \mathbf{i} \left[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n \right] = \\ & = [\mathbf{N}, \mathbf{N}] + \mathbf{i} [\mathbf{\Omega}, -\mathbf{\Omega}] — \end{aligned}$$

собственные числа матрицы $\mathbf{A}$;

$\mathbf{K} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ — спектр частот матрицы $\mathbf{A}$;

$\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ — спектр демпфирования матрицы $\mathbf{A}$.

При суммировании перемещений и усилий по формам колебаний в ЛСМ предполагается, что суммируемые функции являются случайными функциями с нулевым математическим ожиданием, а в качестве расчетного усилия принимается среднеквадратическое отклонение этой величины [10–12].

Для сейсмической силы S_i по i -му обобщенному направлению формулу с учетом корреляции можно записать в виде:

$$s_i =$$

$$= \left[\sum_j \sum_k s_{ij} s_{ik} \varepsilon_{jk} + \sum_j \sum_k s'_{ij} s'_{ik} \varepsilon'_{jk} + \sum_{j \neq k} \sum_k s_{ij} s'_{ik} \varepsilon'_{jk} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

В этой формуле в первой сумме S_{ij} является аналогом традиционных сейсмических сил и вычисляется по формуле

$$s_{ij} = Ag\beta(T_j)K_\psi(\gamma_j)\eta_{ij}, \quad (8)$$

где ε_{jk} , ε'_{jk} и ε''_{jk} — коэффициенты корреляции форм колебаний.

Обычно [11] коэффициент корреляции определяют в предположении стационарности процессов

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_{ij}^{(0)}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (9)$$

где $K_{ij}^{(0)}$ — корреляционная функция i -й и j -й координат при $t = 0$ (математическое ожидание произведения $\xi_i \xi_j$); σ_j — среднеквадратичное отклонение j -й главной координаты.

Значения $K_{ij}^{(0)}$ и σ_j определяются по известным формулам [11]

$$K_{ij}^{(0)} = \int_0^\infty \frac{Z(\omega)S(\omega)d\omega}{H_i(\omega) \cdot H_j(\omega)}. \quad (10)$$

Здесь $H_j(\omega) = (\omega^2 - k_j^2)^2 + \gamma_j^2 k_j^2 \omega^2$;

$$Z(\omega) = (k_j^2 - \omega^2)(k_k^2 - \omega^2) + \gamma_j \gamma_k k_j k_k \omega^2;$$

$$\sigma_j^2 = \int_0^\infty \frac{S(\omega)d\omega}{H_j(\omega)}. \quad (11)$$

Не представляет затруднений численное взятие интегралов (9), (10). Для ряда процессов (вида функции $S(\omega)$) интегралы (9), (10) взяты аналитически [10, 13].

Вторая сумма в формуле определяется составляющими смещений от компоненты уравнений (10, 11) с $\ddot{\mathbf{Y}}_0$. Сейсмические силы в данной сумме вычисляются по формуле, аналогичной (8). Коэффициент корреляции в этом слагаемом определяется интегралами

$$\begin{aligned} K_{ij}''^{(0)} &= \int_0^\infty \frac{Z(\omega)S(\omega)\omega^2 d\omega}{H_i(\omega) \cdot H_j(\omega)}; \\ (\sigma_j'')^2 &= \int_0^\infty \frac{S(\omega)\omega^4 d\omega}{H_j(\omega)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Третья сумма связана с попарной корреляцией компонент смещений, вызванных составляющими $\ddot{\mathbf{Y}}_0$ и $\ddot{\mathbf{y}}_0$ в уравнениях (5), (6). Коэффициент корреляции в этом слагаемом определяется интегралами

$$\begin{aligned} K_{ij}'^{(0)} &= \int_0^\infty \frac{Z(\omega)S(\omega)\omega d\omega}{H_i(\omega) \cdot H_j(\omega)}; \\ (\sigma_j')^2 &= \int_0^\infty \frac{S(\omega)\omega^2 d\omega}{H_j(\omega)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты корреляции факторов, обусловленных второй и третьей производной при $j = k$, равны нулю.

Применение предлагаемого варианта ЛСМ для анализа работы ДГК

Рассмотрим двухмассную систему, показанную на рис. 1 и моделирующую работу динамического гасителя колебаний (ДГК). В основном сооружении коэффициент неупругого сопротивления $\gamma = 0,1$, а в пружине гасителя эта величина γ_r варьируется.

Следует отметить, что в рассматриваемой системе, как было показано в [14, 15], существенны демпфирование и корреляция форм колебаний. В связи с этим был выполнен расчет перерезывающей силы по основанию стержня как нор-

Рис. 1. Расчетная схема для анализа работы системы с ДГК

мативной ЛСМ, так и по уточненной методике, учитывающей демпфирование в системе, с использованием формулы (7). Соответствующие зависимости величины Q от демпфирования в пружине гасителя приведены на рис. 2. Как видно на рисунке, неоднородное демпфирование и корреляция форм колебаний существенно сказываются на результатах расчета при затухании в пружине гасителя, близком к оптимальному, причем неучет влияния демпфирования на формы колебаний дает неконсервативный результат.

Закключение

Приведенный пример иллюстрирует возможность применения ЛСМ для анализа работы и подбора параметров ДГК.

Различия между расчетом на гармоническое воздействие и расчетом по ЛСМ не носят качественного характера и обусловлены различным видом кривых динамичности в расчетах на гармонику и по ЛСМ.

Использование уточненного варианта ЛСМ с учетом влияния демпфирования на формы колебаний позволяет учесть основные качественные особенности работы ДГК и подобрать оптимальное демпфирование в пружине гасителя.

Библиографический список

1. Нестерова О. П., Смирнова Л. Н., Азаев Т. Д. Возможность применения линейно-спектральной

Рис. 2. Зависимость эффективности ДГК от затухания в его пружине

методики (ЛСМ) для расчета динамических гасителей сейсмических колебаний (ДГК) // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2016. № 2. С. 47–51.

2. Уздин А. М., Елизаров С. В., Белаиш Т. А. Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений: учеб. пособие. М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2012. 500 с.

3. Никитин А. А., Уздин А. М. Применение динамических гасителей колебаний для сейсмозащиты мостов // Экспресс-информация ВНИИИС. Сер. 14. Сейсмостойкое строительство. 1986. Вып. 9. С. 20–24.

4. Сахарова В. В., Симкин А. А., Никитин А. А., Уздин А. М. Использование пролетного строения для гашения сейсмических колебаний опор мостов // Экспресс-информация ВНИИИС. Сер. 14. Сейсмостойкое строительство. 1982. Вып. 4. С. 14–18.

5. Уздин А. М., Щелкунов Д. В. Об одном способе задания сил сопротивления в системах с неоднородным демпфированием // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2011. № 2. С. 47–50.

6. Пейчев М. М., Уздин А. М. К вопросу учета демпфирования в рамках СНиП «Строительство в сейсмических районах» // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2001. № 3. С. 37–39.

7. Воробьева К. В., Уздин А. М., Фрезе М. В., Ван Хайбинь, Чанг Юань. Влияние взаимодействия фундамента с основанием на динамику металлических пролетных строений мостов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2016. № 5. С. 35–40.

8. Уздин А. М., Кузнецова И. О. Сейсмостойкость мостов. Саарбрюкен (Германия): Palmarium, 2014. 450 с.

9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

10. Igusa T., Der Kiureghian A. Dynamic response of multiply supported secondary systems // Journal of Engineering Mechanics (ASCE). 1985. 111(1). Pp. 20–41.

11. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1961. 202 с.

12. Сейсмический риск и инженерные решения: пер. с англ. / под ред. Ц. Ломнитца и Э. Розенблюта. М.: Недра, 1981. 375 с.

13. Петров А. А. Рекомендации по расчету высоких башен и мачт на динамические ветровые воздействия. М.: ЦНИИПСК им. Мельникова, 1983. 28 с.

14. Уздин А. М. К вопросу о возможном усилении сейсмических колебаний наземных сооружений и оценке этого усиления по действующим нормам // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2002. № 5. С. 50–54.

15. Нестерова О. П., Уздин А. М. Особенности работы динамических гасителей колебаний при силовом и кинематическом возмущении демпфирован-

ных сооружений // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. 2016. Вып. 2 (92). С. 84–89.

References

1. Nesterova O. P., Smirnova L. N., Azaev T. D. *Vozmozhnost' primeneniya lineynno-spektral'noy metodiki (LSM) dlya rascheta dinamicheskikh gasiteley seysmicheskikh kolebaniy (DGK)* [Possibility of applying response spectrum method (RSM) for calculation of seismic dampers (SD)]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Aseismic construction. Safety of constructions*, 2016, no. 2, pp. 47–51.

2. Uzdin A. M., Elizarov S. V., Belash T. A. *Seysmostoykie konstruksii transportnykh zdaniy i sooruzheniy. Ucheb. posobie* [Aseismic structures of transport buildings and structures. Teaching manual]. Moscow, FGOU "The Educational and Methodical Center by Training on Railway Transport" Publ., 2012, 500 p.

3. Nikitin A. A., Uzdin A. M. *Primenenie dinamicheskikh gasiteley kolebaniy dlya seysmozashchity mostov* [Application of dynamic dampers of oscillations for seismic protection of bridges]. *Ehkspress-informatsiya VNIIS. Ser. 14. Seysmostoykoe stroitel'stvo* [Express information of VNIIS. Ser. 14. Aseismic construction]. 1986, iss. 9, pp. 20–24.

4. Sakharova V. V., Simkin A. A., Nikitin A. A., Uzdin A. M. *Ispol'zovanie proletnogo stroeniya dlya gasheniya seysmicheskikh kolebaniy opor mostov* [Using the bridge superstructure for damping seismic oscillations in the bridge pillars]. *Ehkspress-informatsiya VNIIS. Ser. 14. Seysmostoykoe stroitel'stvo* [Express information of VNIIS. Ser. 14. Aseismic construction]. 1982, iss. 4, pp. 14–18.

5. Uzdin A. M., Shchelkunov D. V. *Ob odnom sposobe zadaniya sil soprotivleniya v sistemakh s neodnorodnym dempfirovaniem* [About one way of setting the values of resistance forces in systems with non-uniform damping]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Aseismic construction. Safety of constructions*, 2011, no. 2, pp. 47–50.

6. Peychev M. M., Uzdin A. M. *K voprosu ucheta dempfirovaniya v ramkakh SNiP «Stroitel'stvo v seysmicheskikh rayonakh»* [To the issue of the accounting the damping within the SNiP "Construction in seismic countries"]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Aseismic construction. Safety of constructions*, 2001, no. 3, pp. 37–39.

7. Vorob'eva K. V., et al. *Vliyanie vzaimodeystviya fundamenta s osnovaniem na dinamiku metallicheskh proletnykh stroeniy mostov* [The influence of interaction of the base with the foundation on dynamics of metal span structures of bridges]. *Osnovaniya, fundamenty i mekha-*

nika gruntov – Bases, foundations and mechanics of soil, 2016, no.5, pp. 35–40.

8. Uzdin A. M., Kuznetsova I. O. *Seysmostoykost' mostov* [Seismic stability of bridges]. Saarbrücken (Germany), Palmarium, 2014, 450 p.

9. Gantmakher F. R. *Teoriya matritz* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ. 1988, 552 p.

10. Igusa T., Der Kiureghian A. Dynamic response of multiply supported secondary systems. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 1985, 111(1), pp. 20–41.

11. Bolotin V. V. *Statisticheskie metody v stroitel'noy mekhanike* [Statistical methods in construction mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1961, 202 p.

12. *Seysmicheskiy risk i inzhenernye resheniya* [Seismic risk and engineering solutions]. Transl. from English. Ed. by Lomnits Ts. and Rozenblyut E. Moscow, Nedra Publ., 1981, 375 p.

13. Petrov A. A. *Rekomendatsii po raschetu vysokikh bashen i makh na dinamicheskie vetrovye vozdeystviya*

[Recommendations about calculation of high towers and masts on dynamic wind exposure]. Moscow, TsNIIPSK named after Mel'nikov Publ., 1983, 28 p.

14. Uzdin A. M. *K voprosu o vozmozhnom usilenii seysmicheskikh kolebaniy nazemnykh sooruzheniy i otsenke ehtogo usileniya po deystvuyushchim normam* [To the issue of possible strengthening of seismic oscillations of land constructions and the assessment of this strengthening according to the currently valid norms]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy – Aseismic construction. Safety of constructions*, 2002, no. 5, pp. 50–54.

15. Nesterova O. P., Uzdin A. M. *Osobennosti raboty dinamicheskikh gasiteley kolebaniy pri silovom i kinematicheskom vozmushchenii dempfirovannykh sooruzheniy* [Features of work of dynamic dampers of oscillations at power and kinematic disturbance of damped structures]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk – Bulletin of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences*, 2016, no. 2 (92), pp. 84–89.