ИНФОРМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

УДК 519.24

© Е. В. Седунов, д-р физ.-мат. наук, профессор

© Е. А. Седунова, канд. физ.-мат. наук, доцент

(Высшая школа печати и медиатехнологий

Санкт-Петербургского государственного

университета промышленных

технологий и дизайна)

E-mail: prof.sed@yandex.ru, lenasedunova31@yandex.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-3-280-285

© E. V. Sedunov, Dr. Sci. Phys.-Math., Professor

© E. A. Sedunova, PhD in Sci. Phys.-Math.,

Associate Professor

(Higher School of Printing and Media Technologies

of the Saint Petersburg State University of Industrial

Technologies and Design)

E-mail: prof.sed@yandex.ru, lenasedunova31@yandex.ru

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПЛАНИРОВАНИИ И АНАЛИЗЕ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

NON-PARAMETRIC PROBLEMS FOR REGRESSION EXPERIMENT DESIGN AND ANALYSIS

Рассматриваются основные недостатки параметрической теории планирования и анализа регрессионных экспериментов. В качестве альтернативы рекомендуются непараметрические подходы к такого рода задачам. Указывается, что непараметричность при планировании и анализе экспериментов может возникнуть при наличии бедной априорной информации о регрессионной модели, при нереализуемости измерений «в точках» и вынужденном переходе к схемам измерений «на функционалах» или «на операторах», а также при выборе пространства и оператора оценивания. Рассмотрены преимущества непараметрических постановок задач планирования и анализа регрессионных экспериментов и сферы их применения.

Ключевые слова: регрессионный эксперимент, детерминированный и рандомизованный планы, непараметрические задачи, функциональное пространство, пространство оценивания, систематическая и случайная ошибки, функциональная и операторная схемы измерений.

The paper considers major disadvantages of the parametric theory of regression experiment design and analysis. Alternatively, non-parametric approaches to such problems are recommended. It is pointed out that non-parametricity in the stated problems occurs given poor a priori information on the regression model, under measuring infeasibility "at points" enforcing the conversion using measurement schemes at "functionals" or "operators", as well as when selecting space and estimation operators. The advantages of nonparametric formulations for regression experiment design and analysis along with the scope of their applicability are considered.

Keywords: regression experiment, determinate and randomized designs, nonparametric problems, functional space, estimate space, systematic and random errors, functional and operating measuring schemes.

Параметрические задачи в планировании регрессионных экспериментов

Классическая теория оптимального планирования регрессионных экспериментов возникла на основе фундаментальных трудов английского статистика Р. Фишера (R. A. Fisher) [1], и ее родоначальником по праву считается американский математик Дж. Кифер (J. Kiefer) [2]. Системати-

ческое изложение и развитие этой теории можно найти в книге В. В. Федорова [3] и коллективной монографии под редакцией С. М. Ермакова [4].

Классическая теория ориентируется на параметрическую априорную информацию и, как следствие, характеризуется достаточно узкой сферой применимости. В ее основе лежит предположение, что неизвестная функция регрессии

$\eta(x)$ принадлежит заданному конечномерному линейному пространству F^m , натянутому на фиксированный базис $f_1(x), \dots, f_m(x)$. Считается также, что экспериментатор имеет возможность выбрать n различных точек $x_1, \dots, x_n$ компакта X (с повторением опытов) — детерминированный план эксперимента ξ — и измерить с некоторой случайной погрешностью значения $y_1 = y(x_1), \dots, y_n = y(x_n)$ конечномерной линейной модели вида

$$\eta(x, \theta) = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i(x),$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ — вектор подлежащих оценке параметров.

По результатам этих наблюдений с помощью некоторого линейного оператора s строится оценка $\hat{\eta}$ неизвестной функции $\eta(x)$:

$$\hat{\eta}(x, y, \xi, s) = \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i(y, \xi, s) f_i(x).$$

Естественными критериями качества процедуры (ξ, s) планирования и анализа служат некоторые функционалы $\Phi[D(\hat{\theta})]$ от ковариационной матрицы $D(\hat{\theta})$ вектора оценок $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m)^T$.

Отдавая должное хорошо разработанной классической теории, следует обратить внимание на некоторые ее особенности.

1. Прежде всего, существенное ограничение, накладываемое классическим подходом, состоит в априорном допущении об отсутствии систематической ошибки приближения. Однако в практических задачах принципиально существуют два источника расхождения между полученным приближением и истинной регрессионной моделью: случайная ошибка, связанная с наличием случайной погрешности в результатах наблюдений, и систематическая ошибка, вызванная неадекватностью принятой модели реальному объекту.

Разработке вопросов учета систематической ошибки в рамках параметрического подхода была посвящена статья [5] Г. Бокса (G. E. P. Box) и Н. Дрейпера (N. Draper), а также работы их последователей (см., например, [6–8]). На строгий математический фундамент параметрическая задача Бокса–Дрейпера была поставлена после выхода работы С. М. Ермакова [9], где впервые был предложен принцип несмещенности при учете систематической ошибки.

2. В классической теории предполагается, что функция регрессии $\eta(x)$ является непрерывной функцией на компакте X , а измерения производятся «в точках» этого компакта. При этом традиционная теория не охватывает обширный класс практически важных задач (например, многие обратные задачи математической физики), когда наблюдения «в точках» не реализуемы, а допускаются измерения только на некотором множестве линейных ограниченных функционалов от η . Впервые на важность рассмотрения задач с бесконечномерной областью планирования указал В. П. Козлов (см., например, [10]).

3. Наконец, при классическом подходе речь идет об оценке набора параметров $\theta = (\theta_i)_{i=1}^m$ в разложении $\eta(x)$ по заданному базису $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$. В то же время хорошо известно, что в линейно параметризованных моделях выбор базиса связан скорее с традициями и состоянием разработки соответствующего аналитического аппарата, чем с существом задачи.

Задание конечномерного пространства F^m (путем указания базиса $\{f_i(x)\}_{i=1}^m$ этого пространства) в классической теории отражает априорную информацию о функции $\eta(x)$. Однако вопросы о том, какое пространство выбрать и как это сделать, остаются за рамками этой теории.

Непараметрические постановки при задании функции регрессии

Изучение непараметрических задач планирования и анализа регрессионных экспериментов было начато С. М. Ермаковым с выбора рандомизованных процедур в целях минимизации дисперсии в методе Монте-Карло [11]. Понятие рандомизованного плана регрессионного эксперимента как вероятностной меры на множестве детерминированных планов было впервые введено С. М. Ермаковым и Б. Л. Грановским в работе [12]. Предполагалось, что неизвестный регрессионный элемент $\eta(x)$ принадлежит подпространству F пространства $L^2(X, \mu)$ μ -интегрируемых с квадратом на компакте X функций, состоящих из непрерывных на X функций. Требовалось по результатам измерений в специально выбранных точках из X построить в заданном конечномерном подпространстве $F^{m_0} = \text{Lin}(f_1(x), \dots, f_{m_0}(x)) \subset F$ оценку $\hat{\eta}(x)$, не смещенную к наилучшему в метрике $L^2(X, \mu)$

приближению $\eta^*(x)$ в F^{m_0} к $\eta(x) \in F$. При бедной априорной информации об $\eta(x)$ (например, $\dim F = \infty$) решением такой задачи несмещенного планирования не может служить конечный набор экспериментальных точек (детерминированный план), и возникает необходимость перехода к их случайному выбору, т. е. к рандомизованному плану [11, 12].

Рандомизованные процедуры осуществляются на практике в виде независимых серий x^N по N измерений:

$$x^N = (x_1, \dots, x_N)^T \in X^N.$$

Серии x^N реализуются в эксперименте $y^N(x^N) = \eta^N(x^N) + \varepsilon^N(x^N)$ в соответствии с вероятностной мерой $\xi(dx^N)$ — рандомизованным планом. Здесь $\eta^N(x^N) = (\eta(x_1), \dots, \eta(x_N))^T$; $y^N(x^N) = (y(x_1), \dots, y(x_N))^T$ — вектор результатов измерений; $\varepsilon^N(x^N) = (\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_N))^T$ — вектор случайных ошибок.

Если распределение случайных точек x^N обладает по отношению к заданной мере совместной плотностью $g(x^N)$, то последняя может характеризовать рандомизованный план $\xi(dx^N)$.

Как показано в [11], процедура, в которой точки плана распределены с совместной плотностью:

$$g(x^N) = \frac{(N - m_0)!}{N!} \det([f_1, f_1], \dots, [f_{m_0}, f_{m_0}])_{i=1}^{m_0},$$

где

$$[f_i, f_i] = \sum_{j=1}^N f_i(x_j) f_i(x_j), \quad N \geq m_0,$$

а оценки $\hat{\tau}_i, i = 1 : m_0$, в аппроксимирующей модели

$$\hat{\eta}(x, y^N, \xi(dx^N), s) = \sum_{i=1}^{m_0} \hat{\tau}_i(y^N, \xi(dx^N), s) f_i(x)$$

вычисляются по методу наименьших квадратов, является процедурой рандомизованного несмещенного планирования.

Основные результаты теории рандомизованного планирования С. М. Ермакова перенесены на функциональную схему измерений в работе [13].

Укажем еще один класс рандомизованных процедур (см., например, [14]), которые включают рандомизованный план, задаваемый плотностью $g(x)$ распределения случайной величины x , одинаково распределенной с $x_1, \dots, x_N$, и непараметрические оценки функции регрессии

ядерного типа

$$\hat{\eta}(x) = N^{-1} \sum_{j=1}^N K_N(x, x_j) y(x_j) / g(x_j),$$

где $K_N(x, x_j)$ — функция ядра, характеризующая тип оценки.

Непараметрические постановки при задании области планирования

Перейдем к задачам с бесконечномерной областью планирования. Необходимость их изучения, как уже отмечалось, диктуется тем, что для многих прикладных исследований (например, в спектроскопии, ядерной физике, дистанционном зондировании атмосферы, регистрации и анализе изображений, анализе состава веществ, цветометрии и т. д.) схема измерений непрерывной функции «в точках» не реализуема. Адекватный подход состоит в рассмотрении в качестве области планирования некоторого подмножества того или иного функционального пространства. Соответствующая теория, наибольший вклад в которую внесли работы В. П. Козлова (см., например, [10]), получила название планирования эксперимента в функциональных пространствах.

Будем считать, следуя [10], что в эксперименте по оцениванию параметров $\theta_1, \dots, \theta_m$ неизвестного элемента

$$\eta \in H^m = \text{Lin}\{f_1, \dots, f_m\} \subset H; \quad \eta = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i,$$

где H — гильбертово пространство, единичное наблюдение реализуется с помощью некоторого линейного ограниченного функционала на H :

$$u : \{\eta\} \rightarrow R^1, u \in U \subset H^* = H$$

(H^* — сопряженное пространство к пространству H), отображающего множество состояний $\{\eta\}$ наблюдаемого объекта в вещественную прямую. Этому случаю соответствует схема измерений вида

$$y_j = u_j(\eta) + \varepsilon_j; \quad j = 1, \dots, n,$$

где случайные ошибки ε_j и $\varepsilon_r, j \neq r$, некоррелированы и центрированы.

Наилучшая линейная оценка $\hat{\eta} \in H^m$ строится по результатам наблюдений $\{y_j\}_{j=1}^n$, проведенных по плану $\xi = (u_1, \dots, u_n; p_1, \dots, p_n)$, где $u_j \in U$, p_j — вес наблюдения на функционале u_j ($j = 1 : n$). Оптимальный выбор плана ξ производится из условия минимизации функционала $\Psi[M(\xi)]$, заданного на множестве информационных матриц $M(\xi) = (M_i(\xi))_{i,l=1}^m$,

где

$$M_{il}(\xi) = \sum_{j=1}^n p_j u_j(f_i) u_j(f_l), i, l \in 1:m.$$

Например, в случае спектроскопических экспериментов [10] реально доступными измерениям оказываются только значения линейных функционалов u_j от распределения интенсивности $\eta(x)$ по лебеговой мере μ , которые определяются аппаратными функциями спектрального прибора $a_j(x)$:

$$u_j(\eta) = \int_X a_j(x) \eta(x) \mu(dx), j = 1, \dots, n,$$

где j — индекс, нумерующий наблюдения; X — носитель распределения $\eta(x)$.

Реальный физический смысл аппаратной функции в каждой конкретной задаче имеет свою специфику. Если в оптических измерениях речь идет об истинном и наблюдаемом распределении энергии по длинам волн, то в других задачах спектрометрии под x можно понимать частоту излучения (радиоспектроскопия), энергию электрона (электронная спектрометрия), массу иона (масс-спектрометрия), угловую или пространственную координату (светорассеяние), время (времяпролетная спектрометрия) и т. д.

Непосредственные обобщения схемы наблюдений «на функционалах» предложены Н. Г. Сидоренко [15] путем перехода к схеме измерений «на операторах» или к схеме с неизвестным оператором измерения. На важность последней задачи для многих прикладных исследований было указано Г. И. Марчуком и С. М. Ермаковым в работе [16] (см. также [17]).

Перенесение результатов с функциональной на операторную измерительную схему позволяет расширить область действия теории, например, распространить ее на традиционные линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных, на некоторые задачи теории рассеяния в акустике, оптике, а также на задачи планирования экспериментов при анализе случайных процессов.

Непараметрические постановки при задании пространства оценивания

В задачах планирования и анализа регрессионных экспериментов непараметричность может возникать не только при задании функции регрессии и области планирования, но и, как уже отмечалось, в вопросах оценивания.

В связи с этим необходимо отметить цикл работ [18–20] по теории несмещенного планирования в гильбертовых пространствах, где непараметричность постановки задачи проявляется во всех трех указанных выше аспектах.

В этих работах функция регрессии $\eta(x)$ считается элементом гильбертова пространства H (которое может быть и бесконечномерным) и используется инвариантный язык изложения. Последнее означает, что в отличие от классического подхода в работах [18–20] никакой базис не вводится, а строится оценка $\hat{\eta}$ самой функции η , рассматриваемой как элемент гильбертова пространства H .

Такой подход представляется более естественным, так как если в задаче нет оснований для предпочтения одного базиса другому, то базис при изложении теории вообще не должен фигурировать (он может появляться лишь при вычислениях, исходя из их удобства).

При измерении элемента $\eta \in H$ на функционале u_j из заданной области планирования $U \subset H^*$ результатом служит случайная величина y_j со средним значением $\langle \eta, u_j \rangle$:

$$y_j = \langle \eta, u_j \rangle + \varepsilon_j, j = 1, \dots, n.$$

Здесь $\langle \eta, u_j \rangle$ — скалярное произведение элементов η и u_j из H ; ε_j — случайная погрешность измерения.

Под детерминированным планом эксперимента ξ в рассматриваемой постановке понимается вероятностная мера $\xi \in \Xi$ с конечным носителем $\text{supp } \xi$:

$$\begin{aligned} \text{supp } \xi &= \{u \in U : \xi(u) \neq 0\}, \\ \Xi &= \{\xi : \text{supp } \xi \subset U : \text{card}(\text{supp } \xi) < \infty\}. \end{aligned}$$

При этом планы ξ из Ξ записываются в виде

$$\xi = (u_1, \dots, u_n; p_1, \dots, p_n),$$

где $u_j \in \text{supp } \xi$; $p_j = \xi(u_j) > 0 (j \in 1:n)$ — вес j -го наблюдения, который можно интерпретировать как долю экспериментальных ресурсов (общего числа наблюдений N или времени эксперимента t_0), затрачиваемых для измерения η на функционале u_j . В силу ограниченности экспериментальных ресурсов допустимое множество планов $\Xi_{\text{доп}}$ задается как

$$\Xi_{\text{доп}} = \{\xi \in \Xi : \text{supp } \xi \subset U, \text{card}(\text{supp } \xi) \leq n_{\text{max}}\}.$$

Для разработанной в [18–20] теории характерно, что аффинное подпространство $H_d = H_0 + d \subset H$ (H_0 — линейное подпростран-

ство H ; d — параметр сдвига), в котором ищется оценка $\hat{\eta} = S_d \eta$ (S_d — аффинный оператор оценивания) неизвестного элемента η , не фиксируется с самого начала. Оно выбирается совместно с планом эксперимента на основе дополнительной априорной информации байесовского типа по заданному критерию качества приближения. А именно, предполагается заданным априорное вероятностное распределение с носителем в пространстве H , и это распределение используется при планировании и анализе эксперимента.

Заметим, что использование в рассматриваемых работах не линейных H_0 , а аффинных подпространств H_d оценивания (т. е. таких подпространств, которые получаются из линейных параллельным переносом) дает дополнительную возможность для уменьшения систематической ошибки. Соответственно, для построения оценки $\hat{\eta}$ используются не линейные S_0 , а аффинные операторы S_d .

При построении оценок $\hat{\eta}$ в работах [18–20] учитываются, как и в параметрической постановке Бокса–Дрейпера, два типа ошибок приближения: систематическая ошибка, возникающая всякий раз, когда включение $H_d \subset H$ строгое, так как $E \hat{\eta} \neq \eta$ для $\eta \notin H_d$, и случайная ошибка, связанная с присутствием случайной погрешности ε в результатах наблюдений.

Систематическая ошибка приближения характеризуется величиной

$$B_\gamma(\pi) = \int_H \text{dist}^2(\eta, E\hat{\eta}) \gamma(d\eta),$$

где $\pi = (H_d, S_d, \xi)$ — процедура планирования и анализа, а интегрирование в H проводится по заданной мере γ с ограниченным носителем в H , в которой заключена априорная информация об $\eta \in H$. Случайная ошибка приближения $V(\pi)$ как обычно характеризуется некоторым функционалом $\Phi(D[\hat{\eta}])$.

Двухкритериальная задача выбора процедуры π в работах [18–20] рассматривается как оптимизационная задача с приоритетом, представляемым систематической ошибкой.

При использовании развитых в работах [18–20] методов в практических задачах прежде всего возникает вопрос о том, как задать меру γ . Иначе говоря, как преобразовать имеющуюся у экспериментатора априорную информацию к виду, удобному для построения такой меры.

Ограничимся указанием на две принципиальные возможности получения такого рода априорной информации:

- априорная информация может возникать из теории изучаемого в эксперименте процесса;
- априорная информация может возникать из предварительно проведенных экспериментов.

Библиографический список

1. Fisher R. The design of experiments. Edinburg: London: Oliver and Boyd, 1960. 248 p.
2. Kiefer J. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory) // Annals Statist. 1974. Vol. 2. № 5. Pp. 849–879.
3. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.
4. Математическая теория планирования эксперимента / под ред. С. М. Ермакова. М.: Наука, 1983. 392 с.
5. Box G. E. P., Draper N. R. A basis for the selection of a response surface design // J. Amer. Statist. Assoc. 1959. Vol. 54. Pp. 622–654.
6. Karson M. J., Manson A. R., Hader R. J. Minimum bias estimation and experimental design for response surfaces // Technometrics. 1969. Vol. 11. № 3. Pp. 461–475.
7. Седунов Е. В. Планирование эксперимента: неадекватные модели. СПб.: СПГУТД, 2009. 208 с.
8. Григорьев Ю. Д. Методы оптимального планирования эксперимента. Линейные модели. СПб.: Лань, 2015. 320 с.
9. Ермаков С. М. Об оптимальных несмещенных планах регрессионных экспериментов // Труды Математического АН СССР. 1970. Т. 111. С. 252–257.
10. Козлов В. П. Избранные труды по теории планирования эксперимента и обратным задачам оптического зондирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. 500 с.
11. Ермаков С. М. Об оценивании параметров при непрямых измерениях // Труды Математического института АН СССР. 1965. Т. 79. С. 106–112.
12. Грановский Б. Л., Ермаков С. М. О непараметрическом подходе к задачам планирования регрессионных экспериментов // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 2. С. 273–275.
13. Седунов Е. В., Липин А. В. Рандомизация условий регрессионного эксперимента для функциональных моделей измерений // Теория вероятностей и ее применения. 1992. Т. 37. № 4. С. 750–759.
14. Седунов Е. В., Седунова Е. А., Старшинов А. И. Непараметрические алгоритмы последовательного рандомизованного планирования эксперимента // Вопросы механики и процессов управления. Л.: ЛГУ, 1986. Вып. 9. С. 121–129.
15. Сидоренко Н. Г. Планирование и анализ экспериментов с векторным откликом при ограниченных

ресурсах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1988. 16 с.

16. Марчук Г. И., Ермаков С. М. О некоторых проблемах теории планирования эксперимента // Математические методы планирования эксперимента. Новосибирск: Наука, 1981. С. 3–18.

17. Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987. 320 с.

18. Седунов Е. В., Сидоренко Н. Г. Оптимизация измерений на функционалах гильбертова пространства // Кибернетика. 1987. № 2. С. 58–64.

19. Седунов Е. В., Сидоренко Н. Г. Несмещенное планирование эксперимента в гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32. № 4. С. 804–808.

20. Седунов Е. В. Численные методы оптимального несмещенного планирования эксперимента в гильбертовом пространстве // Кибернетика. 1988. № 5. С. 55–62.

References

1. Fisher R. *The design of experiments*. Edinburg; London, Oliver and Boyd Publ., 1960, 248 p.

2. Kiefer J. General equivalence theory for optimal designs (approximate theory). *Annals Statistics Journal*, 1974, vol. 2, no. 5, pp. 849–879.

3. Fedorov V. V. *Teoriya optimal'nogo ehksperimenta* [Optimal experiment theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 312 p.

4. *Matematicheskaya teoriya planirovaniya ehksperimenta* [Mathematic theory of experiment design]. Ed. by Ermakov S. M. Moscow, Nauka Publ., 1983, 392 p.

5. Box G. E. P., Draper N. R. A basis for the selection of a response surface design. *Journal of the American Statistical Association*, 1959, vol. 54, pp. 622–654.

6. Karson M. J., Manson A. R., Hader R. J. Minimum bias estimation and experimental design for response surfaces. *Technometrics*, 1969, vol. 11, no. 3, pp. 461–475.

7. Sedunov E. V. *Planirovanie ehksperimenta: neadekvatnye modeli* [Designing an experiment: inadequate models]. St. Petersburg, SPbSUITD Publ., 2009, 208 p.

8. Grigor'ev Yu. D. *Metody optimal'nogo planirovaniya ehksperimenta. Lineynye modeli* [Methods of optimal planning of experiments. Linear models]. St. Petersburg, Lan Publ., 2015, 320 p.

9. Ermakov S. M. *Ob optimal'nykh nesmeshchennykh planakh regressionnykh ehksperimentov* [About the optimal unbiased plans of regression experiments]. *Trudy Matematicheskogo AN SSSR* [Proc. of the Mathematical Academy of Sciences of the USSR], 1970, vol. 111, pp. 252–257.

10. Kozlov V. P. *Izbrannyye trudy po teorii planirovaniya ehksperimenta i obratnym zadacham opticheskogo zondirovaniya* [Selected research works on the theory of experiment design and regression problems of optical sounding]. St. Petersburg, SPbSU Publ., 2000, 500 p.

11. Ermakov S. M. *Ob otsenivanii parametrov pri nepryamykh izmereniyakh* [About estimation of parameters at indirect measurements]. *Trudy Matematicheskogo AN SSSR* [Proc. of the Mathematical Academy of Sciences of the USSR], 1965, vol. 79, pp. 106–112.

12. Granovskiy B. L., Ermakov S. M. *O neparametricheskom podkhode k zadacham planirovaniya regressionnykh ehksperimentov* [About nonparametric approach to problems of planning of regression experiments]. *Doklady AN SSSR – Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 180, no. 2, pp. 273–275.

13. Sedunov E. V., Lipin A. V. *Randomizatsiya usloviy regressionnogo ehksperimenta dlya funktsional'nykh modely izmereniy* [Randomization of regression experiment for functional models of measurements]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability theory and its applications*, 1992, vol. 37, no. 4, pp. 750–759.

14. Sedunov E. V., Sedunova E. A., Starshinov A. I. *Neparametricheskie algoritmy posledovatel'nogo randomizovannogo planirovaniya ehksperimenta* [Nonparametric algorithms of consecutive randomized planning of an experiment]. *Voprosy mekhaniki i protsessov upravleniya – Issues of mechanics and management processes*, Leningrad, LSU Publ., 1986, no. 9, pp. 121–129.

15. Sidorenko N. G. *Planirovanie i analiz ehksperimentov s vektornym otlikom pri ogranichennykh resursakh. Avtoref. diss. kand. fiz. mat. nauk* [Planning and analysis of experiments with a vector response at limited resources. Author's thesis of PhD in Sci. Phys.-Math.]. Leningrad, LSU, 1988, 16 p.

16. Marchuk G. I., Ermakov S. M. *O nekotorykh problemakh teorii planirovaniya ehksperimenta* [About some problems of the theory of experiment design]. *Matematicheskie metody planirovaniya ehksperimenta* [Mathematical methods of planning an experiment]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1981, pp. 3–18.

17. Ermakov S. M., Zhiglyavskiy A. A. *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo ehksperimenta* [Mathematical theory of an optimal experiment]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 320 p.

18. Sedunov E. V., Sidorenko N. G. *Optimizatsiya izmereniy na funktsionalakh gil'bertova prostranstva* [Optimization of measurements on Hilbert space functional]. *Kibernetika – Cybernetics*, 1987, no. 2, pp. 58–64.

19. Sedunov E. V., Sidorenko N. G. *Nesmeshchennoe planirovanie ehksperimenta v gil'bertovom prostranstve* [Unbiased planning of an experiment in Hilbert space]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya – Probability theory and its applications*, 1987, vol. 32, no. 4, pp. 804–808.

20. Sedunov E. V. *Chislennyye metody optimal'nogo nesmeshchennogo planirovaniya ehksperimenta v gil'bertovom prostranstve* [Numerical methods of the optimum unbiased planning of an experiment in Hilbert space]. *Kibernetika – Cybernetics*, 1988, no. 5, pp. 55–62.