ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

ECCENTRIC COMPRESSION OF CONCRETE BAR WITH DUE ACCOUNT FOR NONLINEAR CREEP

Рассматривается решение задачи о внецентренном сжатии однородного бетонного жесткого стержня с помощью ранее предложенной теории нелинейной ползучести бетона. Сделан анализ о перераспределении напряжений в сечении в процессе нелинейной ползучести.

Ключевые слова: нелинейная ползучесть, внецентренное сжатие.

The paper studies eccentric compression of rigid homogeneous concrete bar by means of using the nonlinear creep theory of concrete. Analysis of the redistribution of stresses in the section under nonlinear creep of concrete is presented.

Keywords: nonlinear creep, eccentric compression.

Вертикальная сжимающая сила P приложена с эксцентриситетом ξ в точке, расположенной на главной центральной оси z сечения в пределах ядра сечения. При этом все сечение испытывает сжатие (напряжения имеют положительный знак). «Горизонтальная» главная ось y проходит через центр тяжести сечения.

Основное реологическое уравнение используемой нелинейной теории ползучести [1, 2, 3]:

$$\dot{\varepsilon}(z, t) = \frac{\dot{\sigma}(z, t)}{E} + \frac{\dot{\alpha}(z, t)}{1 - k \sigma(z, t) / R}. \quad (1)$$

Гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon(z, t) = a(t) + b(t)z. \quad (2)$$

Уравнение (1) проинтегрируем по времени в пределах от 0 до t . С учетом (2) получим

$$\begin{aligned} a(t) - a(0) + [b(t) - b(0)]z = \\ = \frac{\sigma(z, t) - \sigma(z, 0)}{E} + \int_0^t \frac{\dot{\alpha}(z, \tau)}{1 - k \sigma(z, \tau) / R} d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания линейной ползучести используем простейший вариант теории упругой наследственности:

$$\begin{aligned} C(t - \tau) &= C_\infty [1 - e^{-\gamma(t - \tau)}], \\ \alpha(z, t) &= - \int_0^t \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma(z, \tau) d\tau = \\ &= C_\infty \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t - \tau)} \sigma(z, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом, как легко показать,

$$\dot{\alpha}(z, t) = C_\infty \gamma \sigma(z, t) - \gamma \alpha(z, t). \quad (5)$$

Уравнение (3) проинтегрируем по площади сечения A :

$$[a(t) - a(0)]A = \int_0^t \int_A \gamma \frac{C_\infty \sigma(z, \tau) - \alpha(z, \tau)}{1 - k \sigma(z, \tau) / R} dA d\tau, \quad (6)$$

где учтено равенство нулю статического момента сечения и постоянство продольной силы, а также изменен порядок интегрирования по времени и по площади.

Теперь умножим (3) почленно на z и снова проинтегрируем по площади сечения A . С учетом постоянства изгибающего момента получим

$$[b(t) - b(0)]I_y = \int_0^t \int_A z \gamma \frac{C_\infty \sigma(z, \tau) - \alpha(z, \tau)}{1 - k \sigma(z, \tau) / R} dA d\tau, \quad (7)$$

где I_y — момент инерции сечения.

Дифференцирование уравнений (6) и (7) по времени приводит к соотношениям

$$\dot{a}(t)A = \int_A \gamma \frac{C_\infty \sigma(z, t) - \alpha(z, t)}{1 - k \sigma(z, t) / R} dA, \quad (8)$$

$$\dot{b}(t)I_y = \int_A z \gamma \frac{C_\infty \sigma(z, t) - \alpha(z, t)}{1 - k \sigma(z, t) / R} dA. \quad (9)$$

Уравнение (1) с учетом (2) и (5) дает

$$\dot{\sigma}(z, t) = E[\dot{a}(t) + \dot{b}(t)z] - E\gamma \frac{C_\infty \sigma(z, t) - \alpha(z, t)}{1 - k \sigma(z, t) / R}. \quad (10)$$

Уравнения (8)–(10) и (5) составляют расчетный аппарат для численного решения задачи. Начальные значения напряжений определяются упругим расчетом, т. е. выражаются формулой

$$\sigma(z, 0) = \frac{P}{A} + \frac{P\xi}{I_y} z. \quad (11)$$

Это позволяет вычислить начальные скорости (8)–(10) и (5). Дальнейшее решение задачи Коши выполняется методом Эйлера с учетом равенства $\Delta f_0 = \dot{f}_0 \Delta t$.

Отметим, что, согласно известной теореме Маслова–Арутюняна, формула (11) остается справедливой в рамках линейной теории ползучести (в нашем случае при $k = 0$). Это обстоятельство может служить хорошей проверкой программы нелинейного решения задачи. Также хорошей проверкой решения задачи является предположение эксцентриситета равным нулю. Тогда все формулы «вырождаются» в уравнения для решения задачи центрально сжатого стержня. Результат должен быть аналогичным полученному ранее другим способом при решении задачи о бетонном центрально сжатом стержне [1, 3].

Реализация численного расчета была достигнута для стержня прямоугольного сечения с помощью программного комплекса MathCAD. При этом были приняты следующие исходные данные: модуль упругости бетона $E = 3 \cdot 10^5$ кгс/см²; мгновенная прочность бетона при сжатии $R = 200$ кгс/см²; предельная характеристика линейной ползучести $\varphi_\infty = EC_\infty = 3$; коэффициент затухания $\gamma = 0,05$ сут⁻¹; эмпирические коэффициенты $k_1 = 100$ и $k = k_1 k_2 = 1$; высота и ширина поперечного сечения $H = 40$ см (это, конечно, условная ширина, принятая для удобства; закономерности процессов изменения НДС стержня не зависят от ширины сечения); нагрузка $P = 3800$ кг; эксцентриситет приложения нагрузки $\xi = 0,1H = 4$ см.

При решении задачи сечение было разбито по высоте на восемь равных частей. Точки разбиения 0 и 8 расположены на гранях сечения и имеют координаты $-H/2$ и $H/2$ соответственно, точка 4 расположена посередине сечения. В этих точках исследовались изменения напряжений, текущей прочности и полных деформаций, а также деформаций линейной и нелинейной ползучести на интервале 100 суток. Результаты расчета представлены на рис. 1–5.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

1. Нелинейная ползучесть оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние стержня. Расчет с использованием только линейной ползучести показал, что характер распределения напряжений по сечению (см. рис. 1) с течением времени не меняется и остается таким же, как и при расчете по упругой стадии (этим подтверждается правильность расчета). Полученный характер изменения распределения напряжений по сечению с течением времени уже описан многими исследователями, например, такой же результат получили в своих работах Э. П. Брыжатый и Я. Г. Мирвис, К. В. Петрова и Е. Ш. Жумагулов [4], а также А. А. Гвоздев [5, 6], П. И. Васильев [7, 8], Е. А. Яценко [9, 10].

Рис. 1. Эпюра напряжений: в момент приложения нагрузки или с учетом только линейной ползучести; через 1 сутки и через 100 суток — с учетом линейной и нелинейной ползучести

Рис. 2. Напряжение, отнесенное к текущей прочности

Рис. 3. Эпюра относительных напряжений: в момент приложения нагрузки; через 1 сутки и через 100 суток — с учетом линейной и нелинейной ползучести

Рис. 4. Характер изменения полных деформаций по сечению: в момент приложения нагрузки или только с учетом линейной деформации ползучести; через 1 сутки, через 50 суток, через 100 суток — с учетом линейной и нелинейной ползучести

2. На рис. 1 видно, что в процессе нелинейной ползучести происходит перераспределение напряжений в сечении, причем оно носит, с первого взгляда, не совсем понятный характер. Если бы наблюдалась повсеместная передача напряжений с более нагруженных волокон на менее нагруженные, то это было бы (в рамках сложившихся представлений) «вполне понятно»: первые волокна деформируются с большей скоростью и тем самым уходят из-под нагрузки, передавая часть ее на другие волокна (такое объяснение фигурирует в литературе). Но мы видим, что разгрузку испытывают как наиболее, так и наименее нагруженные волокна, расположенные ближе к краям сечения, тогда как увеличение напряжений происходит в средних по расположению и по напряженности волокнах. Поэтому указанное объяснение является недостаточным. Обратим внима-

Рис. 5. Изменение во времени полных деформаций в точках 0...8 (снизу вверх — от менее нагруженного волокна к более нагруженному) в течение 100 суток. Сплошными линиями показаны деформации с учетом нелинейной и линейной ползучести, а точками — с учетом только линейной ползучести

ние на то, что оно является недостаточным даже в рамках линейной теории. Действительно, и в этом случае имеются более и менее нагруженные волокна, однако перераспределения напряжений не происходит (они остаются неизменными во времени при постоянной внешней нагрузке). Указанное объяснение — целиком «физическое», именно поэтому оно и воспринимается как «понятное». Однако, как было показано, оно не является достаточным, в связи с чем необходимо еще опереться на формальные соображения: в процессе перераспределения элементарных усилий между волокнами главный вектор и главный момент всех этих усилий остаются неизменными; именно неизменность главного момента «вынуждает» напряжения изменяться симметрично (в определенном смысле) относительно центра тяжести сечения, причем там, где плечи больше, то есть в периферийных зонах; а постоянство главного вектора «требуется», чтобы разгрузка на периферии сопровождалась догрузкой в средней области. Во всем этом не последнюю роль играет гипотеза плоских сечений. Как следствие, начальные напряжения распределены по закону плоскости. Соответственно в рамках линейной теории ползучести приращение деформаций ползучести, пропорциональные напряжениям, не приводят к искривлению плоскости сечения, которое должно быть устранено изменением напряжений — напряжения и остаются неизменными.

Таким образом, именно нелинейная ползучесть ответственна за перераспределение напряжений в сечении. Сказанное не означает, что обычное объяснение перераспределения напряжений полностью отвергается, оно лишь уточняется: конечно, процесс перераспределения начинается с того, что самые нагруженные волокна, деформируясь не пропорционально напряжениям, начинают разгружаться; но далее этот процесс контролируется гипотезой плоских сечений и требованием постоянства главного момента и главного вектора внутренних сил.

3. В волокнах, расположенных по обе стороны от центра тяжести сечения на расстоянии, примерно равном радиусу инерции (в нашем случае это 11,6 см), напряжения остаются неизменными, равными напряжениям в момент приложения нагрузки (см. рис. 1). Этот факт уже был отмечен Е. А. Яценко [9].

4. На рис. 4 видно, что с течением времени сечение, оставаясь плоским, поворачивается вокруг неподвижной оси, расположенной несколько левее рис. 4 (значит, нейтральная ось не изменяет положения с течением времени).

5. «Истинный» уровень напряжения, т. е. напряжение, отнесенное к текущей прочности, изменяется со временем заметно иначе, чем само напряжение (см. рис. 1–3). Поэтому необходимо учитывать все факторы, связанные с накоплением повреждений в материале в процессе ползучести. К этому обязывает и необходимость проверки прочности сечения.

6. Как уже было отмечено различными исследователями, задача нелинейной теории ползучести о внецентренном сжатии бетонного стержня имеет большое практическое значение именно вследствие перераспределения напряжений по сечению стержня, что может привести к появлению растягивающих напряжений и возникновению трещин.

Библиографический список

1. Харлаб В. Д., Гурьева Ю. А. Теория нелинейной ползучести и длительной прочности нестареющего бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2007. № 3 (12). С. 19–21.
2. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести бетона при сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2008. № 2 (15). С. 37–41.

3. Гурьева Ю. А. Упрощенная теория нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии: дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2009. 101 с.

4. Жумагулов Е. Ш. Перераспределение напряжений в нормальном сечении бетона при внецентренном сжатии и его влияние на длительную прочность: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1983. 22 с.

5. Гвоздев А. А. О пересмотре способов расчета железобетонных конструкций и о первых его результатах // Сектор бетона, железобетонных и каменных конструкций. М.; Л.: ЦНИПС, 1934.

6. Гвоздев А. А. Ползучесть бетона // Механика твердого тела: тр. II Всесоюзного съезда по теор. и прикладной механике. М.: Наука, 1966.

7. Васильев П. И. Связь между напряжениями и деформациями в бетоне при сжатии с учетом влияния времени // Изв. ВНИИГ, 1951. Т. 45. С. 76–93.

8. Васильев П. И. Некоторые вопросы определения деформативных свойств бетона // Тр. координационного совещания НИИЖБ. М., 1962.

9. Яценко Е. А. Исследование потерь предварительного напряжения от усадки и ползучести бетона во внецентренно обжатых железобетонных элементах // Изв. высших учеб. заведений: Строительство и архитектура. 1963. № 3. С. 23–36.

10. Яценко Е. А. Ползучесть бетона и железобетонных конструкций: конспект лекций // Днепрпетровский ин-т инж. ж.-д. транспорта, кафедра строит. конструкций. Днепрпетровск, 1973. 97 с.

11. Яценко Е. А. О нелинейной теории ползучести в задаче плоского изгиба бруса // Изв. высших учеб. заведений: Строительство и архитектура. 1976. № 1. С. 60–66.

References

1. Kharlab V. D., Guryeva Yu. A. *Teoriya nelineynoy polzuchesti i dlitel'noy prochnosti nestareyushchego betona pri szhatii* [The theory of non-linear creep and long-term durability of non-ageing concrete in case of compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2007, no. 3 (12), pp. 19–21.
2. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti betona pri szhatii* [A simplified theory of non-linear creep of concrete under compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2008, no. 2 (15), pp. 37–41.
3. Guryeva Yu. A. *Uproshchennaya teoriya nelineynoy polzuchesti nestareyushchego betona pri szhatii*. Diss. kand. tekhn. nauk [Simplified theory of non-linear creep of non-ageing concrete in case of compression. PhD in Sci. Tech. diss.]. St. Petersburg, 2009, 101 p.
4. Zhumagulov E. Sh. *Pereraspredelenie napryazheniy v normal'nom sechenii betona pri vnetsentrennom szhatii*

i ego vliyaniye na dlitel'nuyu prochnost'. Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk [Redistribution of stresses in the normal section of concrete in case of eccentric compression and its influence on the long-term durability. Author's thesis of PhD in Sci. Tech. diss.]. Moscow, 1983, 22 p.

5. Gvozdev A. A. *O peresmotre sposobov rascheta zhelezobetonnykh konstruksiy i o pervykh ego rezul'tatakh* [About revising the calculation techniques of steel concrete constructions and the first results]. *Sektor betona, zhelezobetonnykh i kamennykh konstruksiy* [Sector of concrete, steel concrete and stone constructions]. Moscow, Leningrad, TsNIPS Publ., 1934.

6. Gvozdev A. A. *Polzuchest' betona* [Creep of concrete]. *Trudy II Vsesoyuznogo s'ezda po teor. i prikladnoy mekhanike «Mekhanika tverdogo tela»* [Proc. of II All-Union congress on the theory and application-oriented mechanics "Mechanics of solid body"]. Moscow, Nauka Publ., 1966.

7. Vasil'ev P. I. *Svyaz' mezhdru napryazheniyami i deformatsiyami v betone pri szhatii s uchedom vliyaniya vremeni* [Inter-connection between stresses and deformations in concrete in case of compression taking into account the time factor effect]. *Izvestiya VNIIG – VNIIG Bulletin*, 1951, vol. 45, pp. 76–93.

8. Vasil'ev P. I. *Nekotorye voprosy opredeleniya deformativnykh svoystv betona* [Some issues of determining the properties of concrete]. *Trudy koordinatsionnogo soveshchaniya NIIZhB* [Proc. of coordination meeting of NIIZhB]. Moscow, 1962.

9. Yatsenko E. A. *Issledovanie poter' predvaritel'nogo napryazheniya ot usadki i polzuchesti betona vo vnetsentrenno obzhatykh zhelezobetonnykh ehlementakh* [Research of losses of preliminary tension from shrinkage and creep of concrete in eccentrically pressed steel reinforced concrete members]. *Izvestiya vysshikh ucheb. zavedeniy: Stroitel'stvo i arkhitektura – Higher Schools Bulletin. Construction and architecture*, 1963, no. 3, pp. 23–36.

10. Yatsenko E. A. *Polzuchest' betona i zhelezobetonnykh konstruksiy: konspekt lektsiy* [Creep of concrete and steel concrete constructions. Lecture notes]. *Dnepropetrovskiy in-t inzh. zh.-d. transporta, kafedra stroit. konstruksiy* [Dnepropetrovsk Institute of Railway Transport, building constructions department]. Dnepropetrovsk, 1973, 97p.

11. Yatsenko E. A. *O nelineynoy teorii polzuchesti v zadache ploskogo izgiba brusa* [About the non-linear theory of creep in the problem of plane bending of the bar]. *Izvestiya vysshikh ucheb. zavedeniy: Stroitel'stvo i arkhitektura – Higher Schools Bulletin. Construction and architecture*, 1976, no. 1, pp. 60–66.