УДК 539.3

© В. Н. Глухих, д-р техн. наук, доцент

© С. С. Красильникова, магистрант

(Санкт-Петербургский государственный

архитектурно-строительный университет)

E-mail: Glukhikh1234@gmail.com, Sofia_Krasilnikova@list.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-3-21-26

© V. N. Glukhikh, Dr. Sci. Tech., Associate Professor

© S. S. Krasil'nikova, undergraduate

(Saint Petersburg State University of Architecture

and Civil Engineering)

E-mail: Glukhikh1234@gmail.com, Sofia_Krasilnikova@list.ru

АНАЛИЗ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА НА ПРИМЕРЕ ДРЕВЕСИНЫ

ANALYSIS OF THE ELASTICITY MODULUS OF ANISOTROPIC MATERIAL ON THE EXAMPLE OF WOOD

Рассматривается модуль упругости древесины как композиционного материала. На основании экспериментальных данных Е. К. Ашкенази и теории упругости анизотропного тела С. Г. Лехницкого теоретические исследования В. Н. Глухих обосновали взаимосвязь постоянных упругости в главных направлениях анизотропии. Было доказано, что цилиндрически анизотропные тела при переходе от радиального направления к тангенциальному в зависимости от соотношений постоянных упругости могут иметь два или три экстремальных значения. Данный факт необходим при исследованиях постоянных упругости и напряженно-деформированного состояния элементов конструкций.

Ключевые слова: композит, постоянные упругости, цилиндрически анизотропный материал, слои, армирующие волокна, намотка, экстремальные значения постоянных упругости.

The paper considers the elasticity modulus of wood as a composite material. Based on experimental data obtained by E. K. Ashkenazi and the elasticity theory of anisotropic body worked out by S. G. Lekhnitsky, theoretical research carried out by V. N. Glukhikh has proved interrelation of the constants of elasticity in the main directions of anisotropy. Namely, it is established that cylindrically anisotropic bodies at transition from the radial direction to tangential direction can have two or three extreme values depending on the ratios of the constants of elasticity. Thus, this fact is necessary to be taken into account at carrying out research of the constants of elasticity and the intense deformed condition of the elements of designs.

Keywords: composite, elasticity constants, cylindrically anisotropic material, layers, reinforcing fibers, winding, extreme values of elasticity constants.

Эволюция живых систем и систем растительного происхождения происходит с оптимизацией их «инженерных» устройств, благодаря чему совершенствуется сопротивление внешним воздействиям. Под влиянием внешней среды формируется упорядоченная структура. Анизотропию растительных материалов, используемых человеком в своей практике, можно рассматривать как результат оптимизации конструкции несущей части, в частности, ствола дерева в длительном процессе развития. В процессе эволюционной оптимизации несущей конструкции в механических тканях образовались наиболее прочные армирующие волокна, совпадающие по направлению с максимальными растягивающими и сжимающими напряжениями.

Ориентированность микро- и макроструктуры, обеспечивающая высокое сопротивление механических тканей воздействиям внешней среды, является следствием эволюционной оптимизации опорных систем живой природы, к числу которых относятся стволы деревьев, костные ткани животных и человека. Такая упорядоченность структуры механических тканей живого мира в последние десятилетия стала объектом повышенного внимания с целью заимствования материалов с наперед заданными свойствами при создании новых высокопрочных композиционных материалов для техники и строительства.

При практическом использовании древесины в виде цельных крупных сортиментов (бревен) ее рассматривают как трансверсально анизотроп-

ный материал, у которого свойства в направлениях поперек волокон принимают неизменными независимо от положения годичных слоев. Такая схема анизотропии удобна при решении некоторых практических задач, когда существует неопределенность в положении годичных слоев в сечениях элементов из древесины.

При использовании элементов прямоугольной формы в деревянных конструкциях, когда положение годичных слоев по отношению к осям сечений можно считать достаточно определенным, необходимо принимать ортотропную (ортотропную) схему анизотропии. В любой точке объема ортотропного тела можно выделить три взаимно перпендикулярных направления (радиальное, тангенциальное, продольное), по которым физико-механические свойства остаются неизменными.

Изучению древесины как ортотропного анизотропного материала посвящено большое число работ отечественных и зарубежных авторов, среди которых особого внимания заслуживают работы Е. К. Ашкенази [1, 2], С. Г. Лехницкого [4, 5], А. И. Кузнецова [10], Н. Kübler [9], А. Iinen [11], А. А. Позднякова [6], А. Н. Митинского [7] и других.

Значительное внимание в работах этих ученых было уделено анизотропии упругости.

В работах Е. К. Ашкенази [1, 2] отмечается, что оси эллипсоида деформаций не совпадают с осями эллипсоида напряжений.

Величина угла между наибольшей полуосью эллипсоида деформаций и направлением растягивающего напряжения достигает максимальных значений (20–30°) при растяжении под углом около 15° к направлению волокон. Несовпадение осей у эллипсоидов напряжений и деформаций следует ожидать и у композиционных материалов.

Создание композиционного материала со структурой, напоминающей структуру ствола дерева, уже не одно десятилетие производится намоткой, при которой используют армировку из волокнистых металлических и неметаллических материалов в виде волокон либо ленты. Намотка осуществляется на специальных автоматических станках [8]. При соблюдении технологических режимов прочность композиционного материала может достигать более 35 000 кг/см², в то

время как обычно она составляет 14 700 кг/см². Метод намотки может применяться и для изготовления изделий прямоугольной формы [8].

В строительной сфере это могут быть декоративные строительные панели, тепловые экраны, емкости для растворов и жидкостей, ирригационные трубы, лестницы, изоляция труб, электрические изоляционные трубки, арматура, цистерны для подогрева воды, корпуса вентиляторов, осветительные столбы и др.

Намоточные композиционные материалы, как и древесина, во многих случаях могут быть отнесены к цилиндрически анизотропным ортотропным материалам. Полный комплекс характеристик их упругой деформативности состоит из девяти независимых постоянных упругости [4]. Зная величины постоянных упругости в главных направлениях анизотропии, можно вычислить величину любой постоянной в требуемом направлении, что часто бывает необходимым для определения деформаций в направлениях, не совпадающих с главными.

Для этого в теории упругости [4] известны соответствующие расчетные формулы. Например, для модуля упругости в плоской задаче:

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_x} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_y} + \left(\frac{4}{E_{xy}^{(45)}} - \frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right) \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad (1)$$

$$\frac{1}{G_{x'y'}} = \frac{\cos^2 2\alpha}{G_{xy}} + \frac{\sin^2 2\alpha}{G_{xy}^{(45)}}, \quad (2)$$

или то же в обозначениях [2]:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_0; E_y = E_{90}; E_{xy}^{(45)} = E_{45}; E_{x'} = E_{\alpha}; \\ c &= \frac{E_0}{E_{90}}; b = \frac{E_0}{E_{45}} - \frac{1+c}{4}; G_{xy} = G_0; \\ G_{xy}^{(45)} &= G_{45}; G_{x'y'} = G_{\alpha}; \mu_{xy} = \mu_0; \mu_{yx} = \mu_{90}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{E_{\alpha}}{E_0} = \frac{1}{\cos^4 \alpha + b \sin^2 2\alpha + c \sin^4 \alpha}; \quad (4)$$

$$\frac{G_{\alpha}}{G_0} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha + \frac{G_0}{G_{45}} \sin^2 2\alpha}. \quad (5)$$

Наибольший интерес при решении практических задач представляет вопрос о направлениях, в которых материал имеет экстремальные свойства.

Исследование на экстремум функции модуля упругости (1) приравниванием ее первой производной к нулю позволяет получить уравнение

$$\left[\cos^2 \alpha - c \sin^2 \alpha - 2b(1 - 2 \sin^2 \alpha) \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (6)$$

подтверждающее наличие двух экстремумов при значениях углов 0° , 90° .

Угол, соответствующий третьему экстремуму, можно найти из соотношения в квадратных скобках, приравненного к нулю [2]:

$$\cos^2 \alpha - c \sin^2 \alpha - 2b(1 - 2 \sin^2 \alpha) = 0; \quad (7)$$

$$\alpha_3 = \arcsin \sqrt{\frac{1-2b}{1+c-4b}}. \quad (8)$$

Третье экстремальное значение модуля упругости будет иметь место у материалов, для которых будет выполняться соотношение

$$\frac{4}{E_{rt}^{(45)}} - \frac{1}{E_r} - \frac{1}{E_t} = \frac{1}{G_{rt}} - \frac{2\mu_{rt}}{E_r} = \frac{3-\alpha^2}{E_t}, \quad (9)$$

где $E_r, E_t, G_{rt}, \mu_{rt}, E_{rt}^{(45)}$ — постоянные упругости в направлении поперек армирующих волокон в полярных координатах;

$$\alpha^2 = \frac{E_t}{E_r}. \quad (10)$$

Выполненное в работе [3] теоретическое исследование с применением дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных для цилиндрически анизотропного ортотропного тела при использовании функции напряжений в виде суммы полиномов позволило установить, во-первых, взаимосвязь между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии и, во-вторых, при каких параметрах упругости постоянные при повороте осей имеют два либо три экстремальных значения. Важным является ответ на вопрос о распределении постоянных упругости в таких случаях для однонаправленных композитов.

В работах Е. К. Ашкенази [1, 2] отмечается, что у однонаправленных композитов постоянные упругости при повороте осей имеют только два экстремальных значения (при 0° и при 90°).

Однако намоточные композиционные материалы в направлениях поперек волокон являются криволинейными, а в продольных плоскостях однонаправленными, т. е. комбинированными. Как будут изменяться постоянные упругости таких материалов при различной ориентации слоев и волокон, сколько экстремумов будут иметь

постоянные упругости — два либо три — до последнего времени оставалось неизвестным. Теоретические исследования В. Н. Глухих [3] обосновали взаимосвязь постоянных упругости в главных направлениях анизотропии, причем было доказано, что цилиндрически анизотропные тела в зависимости от соотношений постоянных упругости условно могут быть разделены на две группы. В первую группу входят анизотропные тела, у которых модуль упругости при переходе от радиального направления к тангенциальному приобретает три экстремальных значения (см. формулу (9)).

При другом соотношении постоянных упругости

$$\frac{4}{E_{rt}^{(45)}} - \frac{1}{E_r} - \frac{1}{E_t} = \frac{1}{G_{rt}} - \frac{2\mu_{rt}}{E_r} = \frac{1+5\alpha^2}{3E_t}, \quad (11)$$

модуль упругости в плоскости поперек армирующих волокон имеет всего два экстремальных значения (E_r, E_t).

Как это повлияет на величину постоянных упругости в продольных плоскостях, остается неизвестным. В работе Е. К. Ашкенази [1] не учитывались соотношения между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии, поскольку на момент их опубликования эти соотношения были неизвестны. Поэтому результаты теоретических и экспериментальных исследований часто противоречат друг другу.

В качестве примера нами был выполнен расчет для цилиндрически анизотропных тел растительного происхождения — древесины березы и сосны. Результаты расчетов приведены в табл. 1 и 2 и проиллюстрированы на рис. 1 и 2. Для сравнения в табл. 3 и 4 и на рис. 3 и 4 приведены данные по изменению модуля упругости поперек волокон, полученные Е. К. Ашкенази.

Сравнение результатов наших расчетов и результатов, полученных Ашкенази, показывает, что при изменении модуля упругости в поперечных сечениях (у березы) с тремя экстремальными значениями модуль упругости в продольных плоскостях имеет лишь два экстремума (см. табл. 3, рис. 3). Однако наши исследования подтверждают наличие третьего экстремума при переходе от тангенциального направления к направлению вдоль волокон (при 60°).

Для древесины сосны по данным Ашкенази в поперечном сечении модуль упругости имеет

Таблица 1

Изменение модуля упругости E_x березы в различных направлениях в пространстве

$\theta, ^\circ \backslash \alpha, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
0	1126	1129,13	1190,31	1457,49	2346,97	5934,46	16 660
15	1126	1114,40	1123,87	1247,18	1602,13	2286,83	2802,14
30	1126	1076,80	983,69	923,94	921,39	954,44	975,06
45	1126	1030,96	855,62	723,94	655,35	629,50	624,07
60	1126	990,57	771,24	631,64	572,15	558,35	558,51
75	1126	963,98	727,37	599,05	564,46	579,83	594,63
90	1126	954,82	714,19	592,48	571,09	604,22	629

Таблица 2

Изменение модуля упругости E_x сосны в различных направлениях в пространстве

$\theta, ^\circ \backslash \alpha, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
0	1124	1117,13	1155,51	1390,63	2218,76	5654,93	16 600
15	1124	1101,10	1086,60	1182,13	1500,23	2133,58	2616,41
30	1124	1060,34	942,87	866,66	855,09	883,65	902,99
45	1124	1010,98	813,40	674,23	605,70	581,62	577,09
60	1124	967,78	728,94	585,81	527,64	515,52	516,42
75	1124	939,48	685,20	554,30	519,86	535,21	550,04
90	1124	929,75	672,07	547,81	525,70	557,70	582

Рис. 1. Диаграмма анизотропии модуля упругости E_x березы Рис. 2. Диаграмма анизотропии модуля упругости E_x сосны

Таблица 3

Изменение модуля упругости E_x березы в различных направлениях в пространстве

$\varphi, ^\circ \backslash \theta, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
0	16 660	9120	4008	2219	1507	1209	1126
15	8640	5842	3064	1827	1285	1048	981
30	3309	2726	1832	1256	950	803	760
45	1567	1430	1152	908	748	661	634
60	937	903	822	732	659	614	600
75	694	688	672	652	632	619	614
90	629	629	629	629	629	629	629

Таблица 4

Изменение модуля упругости E_x сосны в различных направлениях в пространстве

$\varphi, ^\circ \backslash \theta, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
0	16 600	9412	4185	2289	1529	1212	1124
15	6779	5468	3501	2270	1634	1557	1250
30	2479	2408	2214	1958	1723	1566	1513
45	1259	1270	1300	1335	1363	1379	1383
60	811	818	839	868	898	921	930
75	631	633	638	645	651	659	659
90	582	582	582	582	582	582	582

Рис. 3. Диаграмма анизотропии модуля упругости E_x березы

Рис. 4. Диаграмма анизотропии модуля упругости E_x сосны

два экстремальных значения (E_r, E_t). Два экстремальных значения остаются и во всех продольных сечениях. Однако по нашим данным, в первых, модуль упругости в поперечных сечениях, изменяясь от наибольшего в радиальном до меньшего в тангенциальном направлении, принимает третье экстремальное (минимальное) значение при угле наклона годичных слоев 60° . Кроме этого, изменяясь от продольного направления к тангенциальному, модуль упругости принимает третье экстремальное (минимальное) значение при 60° , что отличается от данных, полученных в расчетах Е. К. Ашкенази.

Аналогичные результаты могут быть получены для намоточных композиционных материалов при различных значениях и соотношениях постоянных упругости, что является необходимым при исследованиях напряженно-деформированного состояния элементов конструкций.

Новые соотношения между постоянными упругости, на наш взгляд, могут быть использованы для композиционных материалов с плоской анизотропией при предельном переходе от криволинейной, когда радиус кривизны слоев стремится к бесконечности.

Для проверки этой гипотезы потребуется провести экспериментальные исследования на соответствующих композитах.

Библиографический список

1. Ашкенази Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. М.: Лесная промышленность, 1978. 221 с.
2. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. М.: Лесная промышленность, 1981. 320 с.
3. Глухих В. Н. Анизотропия древесины как фактор для повышения качества сушки пиломатериалов. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2007. 161 с.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостехиздат, 1977. 415 с.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
6. Поздняков А. А. К вопросу об усталостной прочности анизотропных материалов // Научные труды ЛТА. № 96. Л., 1961. С. 83–91.
7. Митинский А. Н. Упругие постоянные древесины как ортотропного материала // Труды ЛТА. № 63. Л., 1948. С. 23–54.

8. Росато Д. В., Грове К. С. Намотка стеклонитью: пер. с англ. М.: Машиностроение, 1969. 310 с.

9. Kübler H. Die Spannungen in Faserrichtung. Holz als Roh- und Werkstoff., 1959. B. 17. H. 2. S. 115–134.

10. Кузнецов А. И. Внутренние напряжения в древесине. М.: ГЛБИ, 1950. 59 с.

11. Ilinen A. Über den Einfluß des Spätholzanteils und der Rohwichte auf die Elastizitätsmoduln, die Poissonischen Konstanten und die Schubmoduln bei Holz mit ausgeprägten Jahrringsbau. Technische Hochschule in Finland. Forschungen № 9. Helsinki, 1956. 26 s.

References

1. Ashkenazi E. K. Anizotropiya drevesiny i drevesnykh materialov [Anisotropy of wood and timber materials]. Moscow, Lesnaya promyshlennost' – Forest industry, 1978, 221 p.
2. Ashkenazi E. K., Ganov Eh. V. Anizotropiya konstruktivnykh materialov. Spravochnik [Anisotropy of construction materials. Reference book]. Moscow, Lesnaya promyshlennost' – Forest industry, 1981, 320 p.
3. Glukhikh V. N. Anizotropiya drevesiny kak faktor dlya povysheniya kachestva sushki pilomaterialov [Anisotropy of wood as a factor of improving the quality of drying of timber]. St. Petersburg, SPbSU Publ., 2007, 161 p.
4. Lekhnitskiy S. G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of the anisotropic body]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1977, 41 p.
5. Lekhnitskiy S. G. Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1957, 46 p.
6. Pozdnyakov A. A. K voprosu ob ustalostnoy prochnosti anizotropnykh materialov [To the issue of the fatigue durability of anisotropic materials]. Nauchnye trudy LTA – Scientific works of LTA, no. 96. Leningrad, 1961, pp. 83–91.
7. Mitinskiy A. N. Uprugie postoyannye drevesiny kak ortotropnogo materiala [Elastic constants of wood as orthotropic material]. Trudy LTA – Proc. of the LTA, no. 63. Leningrad, 1948, pp. 23–54.
8. Rosato D. V., Grove K. S. Namotka steklonit'yu [Winding with fiber glass filament]. Transl. from English. Moscow, Mashinostroyeniye – Mechanical engineering, 1969, 310 p.
9. Kübler H. Die Spannungen in Faserrichtung [Stresses in the direction of fiber]. Holz als Roh und Werkstoff [Wood as raw stuff and industrial material], 1959, B. 17, H. 2, pp. 115–134.
10. Kuznetsov A. I. Vnutrennie napryazheniya v drevesine [Internal stresses in wood]. Moscow, GLBI Publ., 1950, 59 p.
11. Ilinen A. Über den Einfluß des Spätholzanteils und der Rohwichte auf die Elastizitätsmoduln, die Poissonischen Konstanten und die Schubmoduln bei Holz mit ausgeprägten Jahrringsbau [About the influence of the latewood and density on the elasticity modulus, Poisson constants and shift modulus in wood with distinct ring patterns]. Technische Hochschule in Finland, Forschungen no. 9. Helsinki, 1956, 26 p.