УДК 624.191.953

© Н. М. Хасанов, канд. техн. наук, доцент

© С. С. Зарифов, ст. преподаватель

© А. О. Якубов, ассистент

(Таджикский технический университет

им. академика М. С. Осими)

E-mail: khasanov.nurali@mail.ru

DOI 10.23968/1999-5571-2017-14-3-178-183

© N. M. Khasanov, PhD in Sci. Tech., Associate Professor

© S. S. Zarifov, senior teacher

© A. O. Yakubov, assistant lecturer

(Tajik Technical University

named after Academician M. S. Osimi)

E-mail: khasanov.nurali@mail.ru

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕЗАКРЕПЛЕННЫХ ВЫРАБОТОК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF UN-TIMBERED WORKINGS BY THE BOUNDARY EQUATIONS METHOD

Изложены алгоритм и результаты численного решения задач концентрации тангенциальных напряжений на контуре выработки методом граничных уравнений. Получены граничные интегральные уравнения, соответствующие контурам выработки.

Ключевые слова: плоскость, граничные интегральные уравнения, разбивка, метод граничных уравнений, граничные элементы, угловые зоны, концентрация напряжений, численное решение.

The paper presents the algorithm and results of numerical solution of the tangential stresses concentration on the excavation boundaries by the method of boundary equations. The boundary integral equations corresponding to the the excavation contours are obtained.

Keywords: plane, boundary integral equations, layout, boundary equations method, boundary elements, corner zones, stress concentration, numerical solution.

В статье рассматривается численное решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния контура незакрепленных выработок произвольного очертания для подземных сооружений (с учетом изотропных свойств породы), испытывающего тектонические воздействия. Рассматривается упругое пространство с отверстием, находящееся в плоском деформированном состоянии.

Рассмотрим бесконечную область с отверстием в условиях плоской деформации, находящуюся под действием заданных начальных напряжений σ_x^0 , σ_y^0 , при этом $\tau_{xy} = 0$.

Пусть на контуре отверстия задана нагрузка, которая имеет составляющие P_x и P_y (рис. 1). Здесь для внешней задачи вектор нормали будет направлен внутрь, и обход контура при интегрировании выполним против часовой стрелки.

Граничные интегральные уравнения для области, ограниченной контурами S и Γ_∞ , записываются в виде [1]

$$[\bar{C}]\{U\}_p = \int_S [U^*]\{P\}_k ds - \int_S [P^*]\{U\}_k ds, \quad (1)$$

$$\text{где } [\bar{C}] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix};$$

$$[U^*] = \begin{bmatrix} u_{kx}^* & v_{kx}^* \\ u_{ky}^* & v_{ky}^* \end{bmatrix}; [P^*] = \begin{bmatrix} P_{xx}^* & P_{yx}^* \\ P_{xy}^* & P_{yy}^* \end{bmatrix}.$$

Граничные интегральные уравнения (1), соответствующие точкам $p(\xi, \eta)$ и $k(x, y)$ гладкого контура S отверстия, представляются в виде

$$0,5u_p + \int_S (P_{xx}^* u_k + P_{yx}^* v_k) ds = \int_S (u_{kx}^* P_x + v_{kx}^* P_y) ds;$$

$$0,5v_p + \int_S (P_{xy}^* u_k + P_{yy}^* v_k) ds = \int_S (u_{ky}^* P_x + v_{ky}^* P_y) ds, \quad (2)$$

где

$$u_{kx}^* = -a \left[(3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_1 \right];$$

$$u_{ky}^* = a \cos \beta_1 \cos \beta_2;$$

$$v_{kx}^* = a \cos \beta_1 \cos \beta_2;$$

$$v_{ky}^* = -a \left[(3-4\nu) \ln r_{pk} - \cos^2 \beta_2 \right]; \quad (3)$$

$a = 1/8\pi G(1-\nu)$; $r_{pk} = \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^{1/2}$ — расстояние между точками $k(x, y)$ и $p(\xi, \eta)$; β_1, β_2 — углы

Рис. 1. Бесконечная область с отверстием

наклона радиус-вектора r_{pk} к осям x и y ; G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона;

$$\begin{aligned} P_{xx}^* &= -b(c + 2m_1^2) \cos \gamma / r_{pk}; \\ P_{xy}^* &= -b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) + 2m_1 m_2 \cdot \cos \gamma] / r_{pk}; \\ P_{yx}^* &= b[c(m_1 n_2 - m_2 n_1) - 2m_1 m_2 \cdot \cos \gamma] / r_{pk}; \\ P_{yy}^* &= -b(c + 2m_2^2) \cos \gamma / r_{pk}; \end{aligned} \quad (4)$$

$c = 1 - 2\nu$; $m_1 = \cos \beta_1$; $m_2 = \sin \beta_1$; $n_1 = \cos \alpha_1$, $n_2 = \sin \alpha_1$, $\cos \gamma = \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2$; γ — угол наклона между радиус-вектором r и нормалью n . Граничные условия при обходе контура против часовой стрелки представим в виде:

$$P_x = -\sigma_x^0 \cdot \cos \alpha_1, \quad P_y = -\sigma_y^0 \cdot \sin \alpha_1. \quad (5)$$

Подставив (5) в правую часть (2), а также учитывая (3) и (4), получим систему граничных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}^* u_j + \sum_{j=1}^n b_{ij} v_j &= -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^n e_{ij} \cos \alpha_{ij} - \sigma_y^0 \sum_{j=1}^n g_{ij} \sin \alpha_{ij}; \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j + \sum_{j=1}^n d_{ij}^* v_j &= \\ &= -\sigma_x^0 \sum_{j=1}^n f_{ij} \cos \alpha_{ij} - \sigma_y^0 \sum_{j=1}^n h_{ij} \sin \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $a_{ij}^* = a_{ij} + 0,5\delta_{ij}$; $d_{ij}^* = d_{ij} + 0,5\delta_{ij}$;

$$a_{ij} = -b \int_{\Delta S_j} \left(c + 2m_1^2 \right) \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j;$$

$$d_{ij} = -b \int_{\Delta S_j} \left(c + 2m_2^2 \right) \frac{\cos \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j;$$

$$b_{ij} = bc \int_{\Delta S_j} \frac{\sin^3 \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j - 2b \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 \frac{\cos^3 \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j;$$

$$c_{ij} = -bc \int_{\Delta S_j} \frac{\sin^3 \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j - 2b \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 \frac{\cos^3 \gamma_{ij}}{r_{ij}} ds_j; \quad (7)$$

$$e_{ij} = -a \int_{\Delta S_j} \left[(3 - 4\nu) \ln r_{ij} - m_1^2 \right] ds_j;$$

$$g_{ij} = a \int_{\Delta S_j} m_1 m_2 ds_j = f_{ij};$$

$$h_{ij} = -a \int_{\Delta S_j} \left[(3 - 4\nu) \ln r_{ij} - m_2^2 \right] ds_j;$$

$$\cos \gamma_{ij} = n_1 m_1 + n_2 m_2;$$

$$\sin \gamma_{ij} = m_1 n_2 - m_2 n_1;$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}.$$

Направляющие косинусы для j -го элемента с номерами j и $j + 1$ соответственно в начале и в конце находим по формулам

$$\begin{aligned} n_{1j} &= -\frac{(y_{j+1} - y_j)}{\Delta S_j}; \quad n_{2j} = -\frac{(x_j - x_{j+1})}{\Delta S_j}; \\ m_{1ij} &= \frac{(x_j - x_i)}{r_{ij}}; \quad m_{2ij} = \frac{(y_j - y_i)}{r_{ij}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты (7) вычислим по квадратурной формуле Гаусса с четным числом точек. Сформировав общую матрицу коэффициентов и вектора свободных членов, решим систему (6) и получим вектор искомых перемещений. Нормальные и тангенциальные перемещения точек контура отверстия определим по формулам

$$\begin{aligned} u_{nj} &= u_j \sin \alpha_{1j} - v_j \cos \alpha_{1j}; \\ u_{sj} &= u_j \cos \alpha_{1j} + v_j \sin \alpha_{1j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Деформацию контура отверстия вычислим по формуле конечных разностей:

$$\varepsilon_{s,j} = \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} \right)_j \approx \frac{u_{s,j+1,j} - u_{s,j-1,j}}{\Delta S}, \quad (10)$$

где $u_{s,j+1,j}$, $u_{s,j-1,j}$ — тангенциальные перемещения в элементах $j + 1$ и $j - 1$, спроецированные по направлению j -го элемента:

$$\begin{aligned} u_{s,j-1,j} &= u_{s,j-1} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1j-1}) + \\ &+ u_{n,j-1} \sin(\alpha_{1j} - \alpha_{1j-1}); \\ u_{s,j+1,j} &= u_{s,j+1} \cos(\alpha_{1j+1} - \alpha_{1j}) - \\ &- u_{n,j+1} \sin(\alpha_{1j+1} - \alpha_{1j}); \end{aligned}$$

$$\Delta S = \Delta S_j + \frac{\Delta S_{j-1}}{2} \cos(\alpha_{1j} - \alpha_{1j-1}) + \\ + \frac{\Delta S_{j+1}}{2} \cos(\alpha_{1j+1} - \alpha_{1j}).$$

Тангенциальные напряжения на контуре отверстия записываются в виде:

$$\sigma_{s,j} = \frac{1}{1-\nu} \left(2G\varepsilon_{s,j} - \nu\sigma_x^0 \cos^2 \alpha_{1,j} - \nu\sigma_y^0 \sin^2 \alpha_{1,j} \right) + \\ + \sigma_x^0 \sin^2 \alpha_{1,j} + \sigma_y^0 \cos^2 \alpha_{1,j}. \quad (11)$$

Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния бесконечной плоскости с отверстием сводится к расчету на действие дополнительных напряжений, где окончательный результат мы получаем суммированием результатов двух состояний: начального и дополнительного. На основе вышеизложенного алгоритма разработана программа и для анализа сходимости и точности результатов проведены численные эксперименты.

Рассмотрим задачу по определению напряженно-деформированного состояния контура квадратного отверстия в бесконечной области при одноосном растяжении (рис. 2). Аналитическое решение этой задачи [2] для контура квадратного отверстия имеет вид

$$\sigma_s = \frac{8p}{5 + 4 \cos 4\vartheta} \times \\ \times \left(\frac{3}{8} - \frac{9}{7} \cos 2\alpha \cdot \cos 2\vartheta - \frac{3}{5} \sin 2\alpha \cdot \sin 2\vartheta \right), \\ \sigma_n = \tau_{ns} = 0, \quad (12)$$

где α — угол наклона вектора внешней нагрузки p , приложенной на бесконечности относительно

Рис. 2. Плоскость с прямоугольным отверстием при одноосном растяжении

оси x ; ϑ — коэффициент, принимаемый по таблицам [2].

В табл. 1 представлены результаты, полученные для контрольных точек четверти контура отверстия (рис. 3) при различных значениях k . Значения $k = 8, 22, 36$ соответствуют разбивке всего контура отверстия на 28, 84, 140 элементов нулевого порядка. Буквами L и M обозначены номера крайних элементов, примыкающих к угловым зонам. При $k = 22, 36$ L и M соответственно равны: $L = 12; 19$, $M = 11; 18$. Численное интегрирование коэффициентов (7) произведено методом Гаусса с восемью точками [2]. Результаты расчета напряженно-деформированного

Таблица 1

Результаты расчета при различных разбиениях контура отверстия

Метод	Перемещения и напряжения	Количество элементов NE	Контрольные узлы									
			1	2	3	4	L	M	5	6	7	8
МГУ	u_n	28	-1,886	-1,830	-1,650	-1,282	—	—	0,211	0,219	0,225	0,226
		84	-1,901	-1,844	-1,659	-1,273	-1,042	0,243	0,237	0,239	0,243	0,244
		140	-1,904	-1,847	-1,661	-1,272	-0,969	0,257	0,242	0,243	0,246	0,247
	u_s	28	0,0	-0,120	-0,234	-0,327	—	—	-0,457	-0,299	-0,145	0,0
		84	0,0	-0,125	-0,244	-0,344	-0,362	-0,597	-0,518	-0,315	-0,151	0,0
		140	0,0	-0,125	-0,246	-0,346	-0,363	-0,639	-0,526	-0,317	-0,151	0,0
	σ_s	28	-0,867	-0,854	-0,794	-0,262	—	—	3,914	1,693	1,664	1,645
		84	-0,890	-0,880	-0,837	-0,644	0,560	5,6584	2,029	1,790	1,689	1,662
		140	-0,894	-0,884	-0,843	-0,658	1,183	6,747	2,154	1,798	1,692	1,664
Савин	σ_s	9	-0,871	-0,901	-0,702	0,265	—	—	4,230	1,932	1,802	1,616

Рис. 3. Дискретное представление половины контура отверстия

состояния представлены при следующих исходных данных: $a = 4,2$ м, $G = 1$, $\sigma_v^0 = 1$, $v = 0,25$.

Как следует из сравнения результатов (см. табл. 1), нормальные и тангенциальные перемещения при $N = 84$ и $N = 140$ практически совпадают, что свидетельствует о сходимости метода.

Из результатов, приведенных в табл. 1, можно заметить, что имеет место сходимость тангенциальных напряжений во всех точках, кроме точек угловой зоны. Угловая точка (см. рис. 3) является

точкой разрыва функций $\sin \gamma$, $\cos \gamma$, и поэтому ее нельзя представить как обычный узел. Результаты в табл. 1 показывают, что при приближении к угловой точке, где $L = 19$, $M = 11$, резко возрастают значения тангенциальных напряжений, что свидетельствует об особенностях прямого узла, где σ_S стремится к бесконечности [2].

В табл. 2 представлены результаты при наличии округления угловых зон квадратного отверстия (рис. 4) с последовательным увеличением радиуса округления до конечного своего зна-

Таблица 2

Тангенциальные напряжения при различных радиусах округления

№ точек	σ_s							
	Савин	$R = 0,0$	$R = 0,2$	$R = 0,4$	$R = 0,6$	$R = 1,2$	$R = 1,8$	$R = 2,09$
1–1	–0,871	–0,890	–0,868	–0,853	–0,839	–0,808	–0,825	–0,982
2–4	–0,901	–0,880	–0,853	–0,835	–0,817	–0,781	–0,857	–0,831
3–7	–0,702	–0,837	–0,786	–0,747	–0,707	–0,612	–0,318	–0,286
4–10	0,265	–0,644	–0,552	–0,071	0,396	0,623	0,593	0,542
5–13	4,230	2,029	3,013	3,537	3,261	2,145	1,616	1,469
6–16	1,932	1,790	1,865	1,949	2,089	2,888	2,456	2,295
7–19	1,802	1,689	1,726	1,762	1,809	2,081	2,788	2,833
8–22	1,616	1,662	1,693	1,722	1,758	1,927	2,332	2,967

Рис. 4. Распределение тангенциальных напряжений в контурах выработки

чения при одноосном растяжении. Результаты представлены для контрольных точек четверти контура отверстия (см. рис. 3). Значение $k = 22$ соответствует разбивке всего контура отверстия на 84 элемента нулевого порядка. Из результатов, приведенных в табл. 2, следует, что при последовательном уменьшении радиуса округления тангенциальные напряжения практически совпадают с результатами аналитического решения [2], что свидетельствует о сходимости метода.

На рис. 4 представлены графики распределения тангенциальных напряжений на контурах незакрепленного отверстия при одноосном растяжении. Сравнение показывает, что с уменьшением радиуса закругления максимальная концентрация напряжений имеет место вблизи углов квадрата. При приближении радиуса к размерам квадрата получаем результаты, сходные с результатами решения задачи Кирша, что свидетельствует о точности и сходимости метода [1].

Таким образом, разработан алгоритм расчета концентрации напряжений в подземных сооружениях в виде незамкнутой крепи. На основе численных экспериментов исследованы вопросы точности и сходимости метода граничных уравнений. Алгоритм метода универсален и хорошо подходит для перевода в программный код.

Выводы

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние контуров незакрепленной

выработки квадратного очертания без учета и с учетом округления угловых зон. На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что напряжения на контурах выработки возрастают в угловых зонах.

Библиографический список

1. Низомов Д. Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М.: АСВ, 2000. 282 с.
2. Хасанов Н. М., Зарифов С. С. Application of boundary equations for calculation of stress state // International Conference of Industrial Technologies and Engineering, Shymkent, Kazakhstan, ICITE, 30–31 октября 2014 года.
3. Хасанов Н. М., Абдужабаров А. Х. Расчет напряженно-деформированного состояния дорожного покрытия при сейсмических воздействиях // Междун. науч.-практ. конф. «Энергосбережение и инновационные технологии в топливно-энергетическом комплексе». Тюмень: ТИУ, 2016. С. 267.
4. Алейников С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований. М.: АСВ, 2000. 754 с.
5. Низомов Д. Н., Хочибаев А. А., Зарифов С. С. Концентрация напряжений на контуре незамкнутой крепи // Изв. АН РТ. 2012. № 2. Вып. 147. С. 58–63.
6. Зарифов С. С. Исследование напряженно-деформированного состояния незамкнутой крепи методом граничных уравнений // Материалы конф. «Перспективы развития науки и образования». Душанбе: ТТУ, 2016. С. 196–200.

7. Зарифов С. С., Хочибаев А. А., Фаттоев Б. Д. Исследование точности и сходимости метода граничных уравнений на примерах незамкнутой крепи // Современные тенденции в архитектуре, строительстве и образовании в республике Таджикистан. Душанбе: ТТУ, 2014. С. 216–220.

8. Абаполова Е. А., Солдатов А. П. Система Ламе теории упругости в плоской ортотропной среде // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6. Вып. 56. С. 260–268.

9. Хасанов Н. М., Рузиев А. Р. Напряженное состояние конструкции свода тоннелей при воздействии динамических нагрузок // VII МНПК «Перспективы развития науки и образования». Душанбе, 2014. С. 89–91.

10. Михайлов Б. К., Кипиани Г. О. Деформативность и устойчивость пространственных пластичных систем с разрывными параметрами. СПб.: Стройиздат, 1996. 434 с.

References

1. Nizomov D. N. *Metod granichnykh uravneniy v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach stroitel'noy mekhaniki* [The method of boundary equations in solving static and dynamic problems of structural mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2000, 282 p.

2. Khasanov N. M., Zarifov S. S. *Application of boundary equations for calculation of stress state*. Proc. of the International Conference of Industrial Technologies and Engineering, Shymkent, ICITE, October 30–31, 2014.

3. Khasanov N. M., Abduzhabarov A. Kh. *Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dorozhnogo pokrytiya pri seysmicheskikh vozdeystviyakh* [Analysis of the stress-strain state of the road surface under seismic loading]. *Trudy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. «Ehnergoberezhenie i innovatsionnye tekhnologii v toplivno-energeticheskom komplekse»* [Proc. of the International sci. – pract. conf. "Energy saving and innovative technologies in the fuel and energy complex"]. Tyumen, TIU Publ., 2016, p. 267.

4. Aleynikov S. M. *Metod granichnykh ehlementov v kontaktnykh zadachakh dlya uprugikh prostranstvenno*

neodnorodnykh osnovaniy [The boundary elements method in contact problems for elastic spatial heterogeneous bases]. Moscow, ASV Publ., 2000, 754 p.

5. Nizomov D. N., Khochiboev A. A., Zarifov S. S. *Kontsentratsiya napryazheniy na konture nezamknutoy krepki* [Stress concentration on the contour of the open-loop support]. *Bulletin of the RAN*, 2012, no. 2, iss. 147, pp. 58–63.

6. Zarifov S. S. *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya nezamknutoy krepki metodom granichnykh uravneniy* [Investigation of the stress-strain state of the open-loop support by the method of boundary equations]. *Trudy konf. «Perspektivy razvitiya nauki i obrazovaniya»* [Proc. of the conf. "Prospects for the development of science and education"]. Dushanbe, TTU Publ., 2016, pp. 196–200.

7. Zarifov S. S., Khochiboev A. A., Fattoev B. D. *Issledovanie tochnosti i skhodimosti metoda granichnykh uravneniy na primerakh nezamknutoy krepki* [Study of the accuracy and convergence of the method of boundary equations on the examples of open-loop support]. *Sovremennye tendentsii v arkhitekture, stroitel'stve i obrazovanii v respublike Tadjikistan* [Modern trends in architecture, construction and education in the Republic of Tajikistan]. Dushanbe, TTU Publ., 2014, pp. 216–220.

8. Abapolova E. A., Soldatov A. P. *Sistema Lamé teorii uprugosti v ploskoy ortotropnoy srede* [The Lamé System of elasticity theory in flat orthotropic medium]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya – Bulletin of Samara State University. Natural Science series*, 2007, no. 6, iss. 56, pp. 260–268.

9. Khasanov N. M., Ruziev A. R. *Napryazhennoe sostoyanie konstruksii svoda tonneley pri vozdeystvii dinamicheskikh nagruzok* [Stressed state of the structure of the arc of tunnels under dynamic loads]. *Trudy VII MNPK «Perspektivy razvitiya nauki i obrazovaniya»* [Proc. of the VII international sci. – pract. conf. "Prospects of science and education development"]. Dushanbe, 2014, pp. 89–91.

10. Mikhaylov B. K., Kipiani G. O. *Deformativnost' i ustoychivost' prostranstvennykh plastichnykh sistem s razryvnymi parametrami* [Deformability and stability of spatial plastic systems with tearing parameters]. St. Petersburg, Stroyizdat Publ., 1996, 434 p.