НОВЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНОЙ МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ХОЛОДНОГНУТЫХ ПРОФИЛЕЙ

NEW PROVISIONS IN THE ENGINEERING CALCULATION PROCEDURE ON THE STABILITY OF STEEL BAR ELEMENTS OF STRUCTURES MADE OF COLD-FORMED PROFILES

Приведено теоретическое обоснование построения новой инженерной методики расчета стальных стержневых элементов из тонкостенных холодногнутох профилей на общую устойчивость по изгибной, изгибно-крутильной и пространственной формам. В обосновании используются аналитические решения задач деформационного расчета и положения Еврокода в части определения редуцированного сечения. При многофакторном нагружении несимметричное редуцированное сечение заменяется нередуцированным с догрузением стержневого элемента фиктивной силой, компенсирующей редукцию. Приведены формулы предельных напряженных состояний, по которым определяется редуцированное сечение и соответствующие коэффициенты устойчивости.

Ключевые слова: тонкостенные холодногнутые профили, внецентренное сжатие, общая устойчивость, редукция сечения.

The article presents a theoretical substantiation for the new engineering method of calculating the stability of thin-walled cold formed steel bar elements in order to assess the overall stability according to the flexural, flexural-torsional, and spatial forms. The calculation substantiation uses analytical second-order solutions and Eurocode provisions for the evaluation of the reduced section. At multifactor loading, the asymmetric reduced section is replaced with a non-reduced symmetric one with an additional loading of the rod element with a fictitious force compensating the reduction. The limit stress state formulas, which are used for determining the reduced section and the corresponding stability coefficients, are presented.

Keywords: thin-walled cold-formed elements, eccentric compression, overall stability, section reduction.

Теоретические основы построения инженерной методики расчета на общую устойчивость стальных стержневых элементов из тонкостенных холодногнутох профилей были изложены в работе [1]. Там же показаны способы определения редукции сечения, которая при многофакторном нагружении нарушает его симметрию. Прямое решение таких задач аналитическим методом, который позволяют получать результаты на несколько порядков быстрее, чем численными, становится весьма затруднительным.

В настоящей статье в развитие работы [1] приведен способ решения указанных задач

в безразмерных параметрах с определением коэффициентов устойчивости.

1. Решение задачи устойчивости по изгибной форме

В соответствии с отечественными нормами проектирования [2] в работе [1] рассмотрена задача устойчивости по изгибной форме выделенного из конструкции стержневого элемента с расчетной длиной l_{efx} . Стержень с нередуцированным сечением подвержен действию продольной силы с равными концевыми эксцентриситетами e_y в плоскости симметрии (см. рис. 1, а при $l_{efx} = l, e_{xc} = 0$).

В соответствии с [1] коэффициент устойчивости $\varphi_{ex} = N/AR_y$ (A — площадь сечения; R_y — рас-

четное сопротивление стали) определяется по формуле

$$\varphi_{ex} = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{a}}, \quad (1)$$

где $a = \frac{\lambda_x^2}{\pi^2} (1 + m_x) - 0,125 m_x \lambda_x^2$; $b = 1 + m_x + \frac{\lambda_x^2}{\pi^2}$;

$\lambda_x = \frac{l_{ef,x}}{i_x} \cdot \sqrt{\frac{R_y}{E}}$ — условная гибкость;

$m_x = \frac{e_y A}{w_x}$ — относительный эксцентриситет.

Следует заметить, что при упругой работе материала задачи устойчивости фактически являются задачами деформационного расчета на прочность по фибровой текучести. Поэтому коэффициент устойчивости φ_{ex} по (1) определен упругой «деформационной» прочностью.

Для определения редукции сечения по [3] в [1] приведено также выражение предельного напряженного состояния в среднем сечении при потере устойчивости стержня:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{R_y} = \varphi_{ex} \left[1 + m_x \frac{y}{y_b} \left(1 + \frac{0,125 \varphi_{ex} \lambda_x^2}{1 - \varphi_{ex} \lambda_x^2 / \pi^2} \right) \right], \quad (2)$$

где y_b — координата наиболее нагруженного сжатого волокна.

Как видно из (2), при двухпараметрическом нагружении редукция сохраняет симметрию

сечения, поэтому коэффициент устойчивости может быть определен по той же формуле (1), но с учетом соответствующих редукции радиуса инерции $i_{x,eff} = \sqrt{J_{x,eff} / A_{eff}}$ и эксцентриситета продольной силы $e_{y,eff} = e_y + y_c$ (y_c — смещение центра тяжести редуцированного сечения).

2. Решение задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме

Выделение того же стержневого элемента из конструкции для проверки устойчивости по изгибно-крутильной форме выполняется по соответствующей расчетной длине $l_{ef,y}$ (из плоскости симметрии). В этом случае стержень с нередуцированным сечением подвержен действию продольной силы с равными концевыми двухосными эксцентриситетами e_y и $e_{x,c}$ — в плоскости и из плоскости симметрии соответственно (см. рис. 1 при $l_{ef,x} = l$). Последний представляет собой случайный эксцентриситет $e_{x,c} = l_{ef,y} / 750 + i_y / 20$.

В соответствии с [1] коэффициент устойчивости φ_{yc} определяется из решения уравнения:

$$\varphi_{y,c}^3 a_2 - \varphi_{y,c}^2 b_2 + \varphi_{y,c} c_2 - d_2 = 0, \quad (3)$$

где $a_2 = 1 + m_x + m_{y,c}$; $d_2 = \varphi_{cr,1} \varphi_{cr,2}$;

$$b_2 = 1 + (\varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2}) a_2 - m_{y,c} \lambda_y^2 \varphi_{cr,1} \varphi_{cr,2} \times \\ \times \left(0,125 + \frac{k_\omega I_y}{(kl)^2 I_\omega} (e_y - a_y)^2 \right);$$

Рис. 1. Расчетная модель стержневого элемента: а — схема нагружения; б — схема деформирования

$$c_2 = (\Phi_{cr,1} + \Phi_{cr,2}) + \Phi_{cr,1}\Phi_{cr,2}a_2;$$

$m_{y,c} = \frac{e_{x,c}A}{w_y}$ — относительный случайный эксцентриситет из плоскости симметрии;

$$k_\omega = 1 - \operatorname{ch}\left(\frac{kl}{2}\right) + \frac{\operatorname{ch}(kl) - 1}{\operatorname{sh}(kl)} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{kl}{2}\right);$$

$\Phi_{cr,1} = \frac{N_{cr,1}}{R_{yA}}$; $\Phi_{cr,2} = \frac{N_{cr,2}}{R_{yA}}$ — коэффициенты критических сил $N_{cr,1}$ и $N_{cr,2}$;

- при $(e_y - a_y)^2 \leq i_A^2 - 2\beta_y e_y$ первая из них преимущественно характеризует изгибную форму потери устойчивости, а вторая — крутильную;

- при $(e_y - a_y)^2 > i_A^2 - 2\beta_y e_y$ первая соответствует заданному направлению силы, вторая — обратному.

Коэффициенты $\Phi_{cr,1}$ и $\Phi_{cr,2}$ определяются по формуле [1]

$$\Phi_{cr,1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + c}, \quad (4)$$

где

$$b_1 = \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} + \frac{I_y}{I_\omega} (i_A^2 + 2\beta_y e_y) \right) / a_1;$$

$$a_1 = \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \frac{I_y}{I_\omega} \left[(e_y - a_y)^2 - (i_A^2 + 2\beta_y e_y) \right];$$

$$c = \left(1 + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \right) / \left(a_1 \frac{\bar{\lambda}_y^2}{\pi^2} \right);$$

$k = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}}$ — изгибно-крутильная характеристика; I_y , I_ω — осевой и секториальный моменты инерции сечения; I_k — момент инерции чистого кручения; a_y — координата центра изгиба;

$i_A = \sqrt{i_p^2 + a_y^2}$; $\beta_y = \frac{1}{2I_y} \int_A (x^2 + y^2) y dA - a_y$ — геометрические характеристики сечения; i_p — полярный радиус инерции.

Редукция сечения с помощью [3] определяется по предельному напряженному состоянию в среднем сечении при потере устойчивости стержня [1]:

$$\bar{\sigma} = \Phi_{y,c} \times$$

$$\times \left\{ 1 + m_x \frac{y}{y_B} + m_{y,c} \frac{x}{x_B} \times \left[\frac{\Phi_{y,c} \bar{\lambda}_y^2 \left(0,125 + \frac{k_\omega I_y (e_y - a_y)^2}{(kl)^2 I_\omega} \right)}{1 + \frac{\left(1 - \frac{\Phi_{y,c}}{\Phi_{cr,1}} \right) \left(1 - \frac{\Phi_{y,c}}{\Phi_{cr,2}} \right)}{\left(1 - \frac{\Phi_{y,c}}{\Phi_{cr,1}} \right) \left(1 - \frac{\Phi_{y,c}}{\Phi_{cr,2}} \right)}} \right] \right\}, \quad (5)$$

где x_B , y_B — координаты наиболее нагруженного волокна.

Как видно из (5), при трехпараметрическом нагружении (N , M_x , M_y) редукция сечения всегда будет несимметричной. На рис. 2, а показано редуцированное сечение как сечение с несимметричным ослаблением площадью A_0 , имеющим координаты центра тяжести x_0 , y_0 .

Для удобства решения этой задачи устойчивости используем прием, в котором несимметричное редуцированное сечение заменим исходным нередуцированным с дополнительным нагружением стержня фиктивной силой $N_\Phi = \sigma_0 A_0$ (см. рис. 2, б), компенсирующей отсутствие ослабления.

Таким образом, стержневой элемент следует рассматривать нагруженным на его концах силами N и N_Φ , действующими с двухосными эксцен-

Рис. 2. Схема нагружения стержневого элемента: а — с редуцированным сечением; б — без редукции сечения

триситетами $e_{x,c}$, e_y и x_0 , y_0 (см. рис. 2, б) соответственно. Тогда с помощью (5) можно получить выражение для определения напряжений в центре тяжести ослабления $\overline{\sigma}_0 = \sigma_0/R_y$:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_0 = & \varphi_{y,c} + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0 + m_x (\varphi_{y,c} + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0) \frac{y_0}{e_y} \frac{y_0}{y_B} + \\ & + m_y (\varphi_{y,c} + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0) \frac{x_0}{e_x} \frac{x_0}{x_B} \times \\ & \times \left[1 + \frac{\varphi_{y,c} \overline{\lambda}_y^2 \left(0,125 + \frac{k_\omega I_y (e_y - a_y)^2}{(kl)^2 I_\omega} \right) + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0 \frac{x_0}{e_x} \overline{\lambda}_y \left(0,125 + \frac{k_\omega I_y (y_0 - a_y)^2}{(kl)^2 I_\omega (e_y - a_y)^2} \right)}{\left(1 - \frac{\varphi_{y,c} + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0}{\Phi_{cr,1}} \right) \left(1 - \frac{\varphi_{y,c} + \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0}{\Phi_{cr,2}} \right)} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Используя (6), получим кубическое уравнение относительно $\overline{N}_\Phi = \overline{\sigma}_0 \overline{A}_0$ ($\overline{A}_0 = A_0/A$):

$$-\overline{N}_\Phi^3 a_3 + \overline{N}_\Phi^2 b_3 - \overline{N}_\Phi c_3 + d_3 = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } a_3 = \frac{1}{\overline{A}_0} - 1 - m_x \frac{y_0}{y_B} \frac{y_0}{e_y} - m_y \frac{x_0}{x_B} \frac{x_0}{e_x};$$

$$b_3 = \varphi_{c,y} K_1 + a_3 K_3 + K_4 \left(\frac{x_0}{e_x} \right)^2 K_7;$$

$$c_3 = \varphi_{c,y} K_3 K_1 + a_3 K_2 - K_4 \left(\frac{x_0}{e_x} \right) \varphi_{c,y} (K_6 + K_7);$$

$$d_3 = \varphi_{c,y} K_2 K_1 + K_4 \varphi_{c,y}^2 K_6;$$

$$K_1 = 1 + m_x \frac{y_0}{y_B} + m_y \frac{x_0}{x_B};$$

$$K_2 = \varphi_{cr,1} \varphi_{cr,2} - \varphi_{c,y} (\varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2}) + \varphi_{y,c}^2;$$

$$K_3 = \varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2} - 2\varphi_{y,c};$$

$$K_4 = m_y \frac{x_0}{x_B} \overline{\lambda}_y^2 \varphi_{cr,1} \varphi_{cr,2};$$

$$K_5 = \frac{k_\omega}{(kl)^2} \frac{I_y}{I_\omega} (e_y - a_y)^2; k_6 = 0,125 + K_5;$$

$$K_7 = 0,125 + K_5 \frac{(y_0 - a_y)^2}{(e_y - a_y)^2}.$$

Значение $\overline{N}_\Phi$, полученное по (6), является первым приближением, поскольку $\varphi_{cr,1}$ и $\varphi_{cr,2}$ определены по (4) при действии только заданной силы N .

Решение бифуркационной задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме при совместном действии N и N_Φ следует провести с уточнением последней в соответствии с рассматриваемыми в этой задаче условиями загрузки, т. е. при $x_0 = 0$.

$$\overline{N}_{\Phi k} = \overline{\sigma}_{0k} \overline{A}_0,$$

$$\text{где } \overline{\sigma}_{0k} = \frac{N}{A \cdot R_y} (1 + m_x \frac{y_0}{e_y}), \overline{I}_{x,0} = \frac{I_{x,0}}{I_x};$$

I_{x0} — момент инерции ослабления.

Тогда коэффициенты критических сил $\varphi_{cr,1}^*$ и $\varphi_{cr,2}^*$ могут быть получены по (4) с заменой e_y на

$$e_y^* = \left(e_y + \frac{\overline{N}_{\Phi k}}{\overline{N}} y_0 \right) / \left(1 + \frac{\overline{N}_{\Phi k}}{\overline{N}} \right), \text{ где } \overline{N} = \frac{N}{R_y A}.$$

Подставляя $\varphi_{cr,1}^*$, $\varphi_{cr,2}^*$ и e_y^* в уравнение (3) вместо аналогичных без «звездочки» членов, уточним также значения коэффициента устойчивости $\varphi_{y,c}^*$. Затем, используя последнее, по (5) и (7) во втором приближении получим площадь ослабления $\overline{A}_0^*$ и фиктивную силу $\overline{N}_\Phi^*$.

Таким образом, повторяя итерационный процесс, можно получить окончательное значение $\varphi_{y,c}^*$, $\overline{A}_0^*$ и $\overline{N}_\Phi^*$. Количество итераций зависит от отношений $\overline{N}_\Phi^*/\overline{N}$ и y_0/e_y .

Следует напомнить, что значение фиктивной силы $\overline{N}_\Phi^*$ было получено по напряжениям в центре тяжести ослабления, поэтому соответствующий ей коэффициент устойчивости можно представить в виде

$$\varphi_{y,c,\Phi}^* = \frac{\overline{N}_\Phi^*}{1 + m_x \frac{y_0}{e_y} + m_y \frac{x_0}{e_x}}. \quad (8)$$

Тогда коэффициент устойчивости стержневого элемента с редуцированным сечением при действии только силы N определяется по формуле

$$\varphi_{y,c,N} = \varphi_{y,c}^* - \varphi_{y,c,\Phi}^*. \quad (9)$$

Проверка устойчивости в этом случае приобретает «инженерный» вид:

$$\frac{N}{\varphi_{y,c,N} \cdot A \cdot \gamma_c \cdot R_y} \leq 1. \quad (10)$$

Влияние редукции сечения может быть определено коэффициентом $\varphi_{y,c,loc}$ при сравнении $\varphi_{y,c,N}$ и $\varphi_{y,c}$, полученных по (3):

$$\varphi_{y,c,loc} = \frac{\varphi_{y,c,N}}{\varphi_{y,c}}. \quad (11)$$

При этом проверка устойчивости приобретает более наглядный вид

$$\frac{N}{\varphi_{yc} \cdot \varphi_{yc,loc} \cdot A \cdot \gamma_c \cdot R_y} \leq 1. \quad (12)$$

Следует отметить, что изложенная методика может быть распространена на случай, когда вместо случайного эксцентриситета e_{xc} может быть изначально задан e_x (сжатие с двухосным эксцентриситетом e_x, e_y).

3. Решение задачи устойчивости по пространственной схеме

Используя решения задач по изгибной (2) и изгибно-крутильной (5) формам при заданном e_x , можно получить выражения по определению напряжений в наиболее нагруженном среднем нередуцированном сечении стержня при пространственной форме потери устойчивости:

$$\sigma = \varphi_{exy} \times \left\{ \begin{aligned} &1 + m_x \frac{y}{y_B} \left[1 + \frac{0,125 \varphi_{exy} \bar{\lambda}_x^2}{1 - \frac{\varphi_{exy} \bar{\lambda}_x^2}{\pi^2}} \right] + \\ &+ m_y \frac{x}{x_B} \left[1 + \frac{\varphi_{exy} \bar{\lambda}_y^2 \left[0,125 + \frac{k_\omega I_y (e_y - a_y)^2}{(kl)^2 I_\omega} \right]}{\left(1 - \frac{\varphi_{exy}}{\varphi_{cr,1}} \right) \left(1 - \frac{\varphi_{exy}}{\varphi_{cr,2}} \right)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

При $\sigma_{\max} = 1$ ($x = x_B, y = y_B$) из (13) получим алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно коэффициента φ_{exy} :

$$-\varphi_{exy}^4 \cdot a_4 + \varphi_{exy}^3 \cdot b_4 - \varphi_{exy}^2 \cdot c_4 + \varphi_{exy} \cdot e_4 - d_2 = 0, \quad (14)$$

где $a_4 = \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} (a_2 - K_{10})$;

$$b_4 = K_8 \cdot a_2 + \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} (1 - K_{10} (\varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2}) - K_6);$$

$$c_4 = K_9 \cdot a_2 + K_8 - K_{10} \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} d_2 - K_6;$$

$$e_4 = d_2 \cdot a_2 + K_9; K_8 = 1 + \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} (\varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2});$$

$$K_9 = \varphi_{cr,1} + \varphi_{cr,2} + \frac{\bar{\lambda}_x^2}{\pi^2} d_2; K_{10} = 1,2337 m_x.$$

Методика определения редукции сечения, соответствующей ей фиктивной силы и коэффици-

циента устойчивости полностью соответствует методике, изложенной в п. 2.

Таким образом, аналитическое решение задачи об устойчивости стержневого элемента с несимметричным редуцированным сечением можно свести к задаче устойчивости стержня с изначальным или симметрично редуцированным сечением, догруженного фиктивной продольной силой, компенсирующей несимметричную редукцию. При этом коэффициенты устойчивости и редуцированные сечения с достаточной степенью точности можно получить при двух-трех итерациях.

Предложенная методика расчета на общую устойчивость, основанная на расчетных моделях, соответствующих действительной работе стержневых элементов из холодногнутых профилей, обладает достаточной точностью без введения дополнительных коэффициентов условий работы. Она отличается от изложенной в Еврокоде [3] по следующим очень важным параметрам:

- редукция сечения определяется по предельному напряженному состоянию при потере общей устойчивости стержня. Примеры расчета [4] показали, что редукция весьма существенно зависит от гибкости стержня, чего не обнаруживает методика Еврокода [3];

- коэффициенты устойчивости определяются при многопараметрическом нагружении стержневого элемента: по изгибной, изгибно-крутильной и пространственной формам. Методика Еврокода [3] основана на однопараметрических нагружениях, что в нелинейных задачах устойчивости при многопараметрическом нагружении является недопустимым. В целях компенсации этого недостатка в [3] введены коэффициенты взаимодействия силовых факторов, которые могут приводить к существенным неточностям в оценке общей устойчивости.

В заключение следует отметить, что разработанная методика представлена в безразмерных параметрах и обладает быстроедействием в определении коэффициентов устойчивости.

Библиографический список

1. Белый Г. И. К расчету на устойчивость элементов конструкций из тонкостенных холодногнутых профилей // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 3 (56). С. 46–51.

2. СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М., 2011. 171 с.

3. EN 1993-1-3-2004. Eurocode 3 — Design of steel structures — Part 1-3: General rules — Supplementary rules for cold-formed members and sheeting. European Committee for Standardization, 2004.

4. Белый Г. И., Кузнецов А. Ю. Влияние редукиции сечения на устойчивость стержневых элементов конструкций из спаренных холодногнутых тонкостенных профилей // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 4 (57). С. 57–63.

References

1. Belyy G. I. *K raschetu na ustoychivost' ehlementov konstruktsiy iz tonkostennykh kholodnogutykh profiley* [To the calculation of the rod element stability of structures made of thin-walled cold-formed profiles]. *Vestnik*

grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers, 2016, no. 3 (56), pp. 46–51.

2. SP 16.13330.2011. *Stal'nye konstruktsii. Aktualizirovannaya redaktsiya SNiP II 23 81** [SP 16.13330.2011. Steel structures. Revised issue of SNiP II 23 81*]. Moscow, 2011, 171 p.

3. EN 1993-1-3-2004. *Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1-3: General rules. Supplementary rules for cold-formed members and sheeting*. European Committee for Standardization, 2004.

4. Belyy G. I., Kuznetsov A. Yu. *Vliyanie reduktsii secheniya na ustoychivost' sterzhnevykh ehlementov konstruktsiy iz sparennykh kholodnogutykh tonkostennykh profiley* [The influence of the section reduction on the stability of bar structural elements of the design made of doubled cold-formed profiles]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*, 2016, no. 4 (57), pp. 57–63.