К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТКАХ

М.А. Домасевич, А.В. Павлова, С.Е. Рубцов

Кубанский государственный университет, Краснодар,
kmm@fpm.kubsu.ru, pavlova@math.kubsu.ru, rub_serg@mail.ru

Аннотация. Использование триангуляционных сеток в качестве дискретного пространства для построения клеточно-автоматных моделей является весьма перспективным. Аппроксимация поверхности ландшафта и использование на полученной триангуляционной сетке клеточного автомата, моделирующего различные физические процессы, такие как: паводки, пожары, оползни и др., – позволит проводить более точное моделирование в связи с возможностью использовать особенности ландшафта.

Продемонстрирован подход к построению триангуляционных решеток, аппроксимирующих реальные фрагменты рельефа местности. Разработаны алгоритмы генерации сеток на основе карт высот. Это позволяет моделировать и тестировать работу клеточных автоматов на произвольных поверхностях ландшафтного типа. Для построения уникальных клеточных автоматов в рамках конкретных моделей для заданных условий и расчетных областей созданы программные средства генерации триангуляционных сеток по картам высот, в качестве основного формата которых выбран формат PNG в градациях серого. Сетка может аппроксимировать выбранную поверхность с необходимой точностью, тем самым позволяя использовать особенности геометрии моделируемого объекта в математической модели, реализацией которой выступает клеточный автомат с заданными правилами перехода.

Авторами создан клеточный автомат, имитирующий процесс разлива жидкости на заданной поверхности ландшафтного типа. Средства визуализации работы КА и сбора статистики позволяют проводить оценку результатов работы модели.

Ключевые слова: карта высот, триангуляционная сетка, клеточный автомат, моделирование разлива жидкости

Введение

Математическое моделирование различных физических процессов как самостоятельных явлений или протекающих в контексте с какими-либо объектами – без сомнений важный процесс для любой современной отрасли.

Клеточные автоматы (КА) имеют достаточно широкое применение, но главной областью их использования было и остается моделирование физических процессов [1–7]. При этом клеточными автоматами считаются не только автоматы, построенные на прямоугольном клеточном поле, но и построенные на более сложных структурах. Применение клеточных автоматов на триангуляционных сетках – это новая область исследования в мире клеточных автоматов, которая обещает ряд преимуществ, как, например, более точное моделирование поверхностей.

Аппроксимация поверхности ландшафта и использование на полученной триангуляционной сетке клеточного автомата, моделирующего различные физические процессы, такие как: паводки, пожары, оползни и др., – позволит проводить более точное моделирование в связи с возможностью использовать особенности ландшафта.

На сегодняшний день многие исследователи занимаются развитием КА-моделей, предпринимая

попытки имитации различных физико-химических процессов с применением клеточных автоматов. Применение клеточных автоматов на триангуляционных решетках для моделирования физических процессов является, несомненно, актуальной областью исследования, учитывая относительно небольшое количество подобных работ [6,7].

1. Построение триангуляционных сеток ландшафтов

Как альтернатива непрерывным математическим моделям, как правило, описываемым дифференциальными уравнениями, при моделировании нелинейных процессов, используется дискретное моделирование. КА, имитирующий динамический процесс в дискретном пространстве и времени, представляет собой совокупность клеток, функционирующих как элементарный конечный автомат.

Если моделирование процесса требует учета формы поверхности, предпочтительным является применение триангуляционных сеток (систем непересекающихся треугольников с вершинами в опорных точках поверхности). Преимуществом использования триангуляционных сеток в качестве дискретного пространства для построения клеточно-автоматной модели является возможность

использования геометрических свойств их элементов при задании правил перехода автомата. Важным является и тот факт, что современные графические вычислительные устройства существенно оптимизированы для работы с триангуляционными сетками, что позволяет поднять скорость их обработки. Удобство использования триангуляционных сеток состоит также в том, что для них существует много форматов хранения.

Триангуляционная сетка должна описывать моделируемую поверхность с необходимой точностью [8]. Под этим требованием также подразумевается необходимость корректного задания максимального размера элементов в целях обеспечения экономии расчетных мощностей при вычислениях.

Очевидными считаются такие ошибки при построении триангуляционных решеток как: пересечение треугольников между собой, их наложение друг на друга или присутствие в триангуляционных решетках вырожденных треугольников. Все это негативно сказывается на проведении вычислений при моделировании. Также, очевидно, что наличие дыр в триангуляционных решетках, если того не предусматривает геометрия, является серьезной ошибкой при построении. Это наносит существенный урон точности моделирования по причине того, что имеются серьезные расхождения модели трехмерного объекта с реальными данными.

При автоматизированном построении сеток, как правило, используются специальные алгоритмы, позволяющие преобразовать различные исходные представления объекта в триангуляционную сетку [9–11]. В качестве исходных данных для такого построения могут быть выбраны как аналитические описания поверхностей с помощью различных параметризующих функций, так и их изображения. Например, используя изображение карты высот некоторого ландшафта можно построить трехмер-

ную модель этого ландшафта, представленную триангуляционной решеткой. Как правило, карты высот некоторых регионов представляют собой картинки, в которых каждая точка представлена градацией серого цвета, обозначающей относительную высоту рельефа в этой точке.

В простейшем случае триангуляционная решетка строится таким образом, что точки ее находятся в соответствии с точками карты высот. Один из алгоритмов триангуляции в таком случае состоит в разбиении множества точек на подмножества мощности четыре таким образом, что каждое подмножество образует квадрат, не содержащий внутри других точек. После чего каждый квадрат разбивается на два треугольника с помощью добавления ребра, как правило, единым образом для всех элементов решетки. Результатом работы такого алгоритма является триангуляционная решетка, соответствующая ландшафту, описанному с помощью карты высот. Для полученной таким образом триангуляционной сетки можно сгенерировать и прикрепить различные метаданные на основе соответствующих карт, совпадающих по масштабу с картой высот, либо соотносимых с ней. Например, можно использовать карты осадков, лесов или различные температурные карты, чтобы задать соответствующие метаданные, необходимые при моделировании того или иного процесса.

Для генерации триангуляционных сеток реальных ландшафтов авторами реализован механизм импорта карт высот, где в качестве основного формата был выбран формат.PNG, представляющий картинку, сохраненную в градациях серого. Каждая точка соответствует пункту в плоской системе координат на реальной карте высот, яркость градации цвета этой точки является интерпретируемой информацией о высоте ландшафта в этой точке. Пример такой карты представлен на рис. 1.

Рис. 1. Карта высот в формате .PNG для генерации сетки

На каждом шаге работы алгоритма выбирают по четыре пикселя, стоящие в форме квадрата по соседству. Для каждого пикселя коэффициент яркости умножается на его модификатор высоты, строятся четыре вершины, между которыми прокладывается ребро, что в итоге дает два треугольника с общим ребром. Прodelывая эти операции для всех четверок пикселей, получаем триангуляционную

сетку. После чего используется алгоритм определения и установки индексов соседей для каждого треугольника, тем самым получаем удобный способ навигации по триангуляционной сетке.

Пример исходных данных (произвольной карты высот) приведен на рис. 1. Пример результата работы алгоритма триангуляции для этих данных можно увидеть на рис. 2.

Рис. 2. Триангуляционная сетка ландшафта

Сетка может аппроксимировать выбранную поверхность с необходимой точностью, тем самым позволяя использовать особенности геометрии моделируемого объекта в математической модели, реализацией которой выступает клеточный автомат с заданными правилами перехода.

2. КА-моделирование на триангуляционной сетке

Для определения клеточного автомата на триангуляционной сетке вводятся: алфавит состояний A ; M – множество имен клеток $M = \{m_i; i = 1, \dots, N\}$. Пара (a, m) , где $a \in A$, $m \in M$, называется состоянием клетки и обозначается $a(m)$. Клеточный массив – множество клеток $\Omega = \{a(m), m: m \in M\}$.

Каждому треугольнику из триангуляционной сетки соответствует клетка. Таким образом, всей триангуляционной клетке соответствует клеточный массив. Шаблон соседства для клетки (a, m) задается некоторым множеством имен клеток, которые являются соседними с данной клеткой. Так, для триангуляционной сетки две клетки будут считаться соседними, если они имеют общее ребро. Таким образом, у каждого треугольника может быть не более трех соседей.

Правилom перехода является некоторая функция, которая определяет новое состояние элементарного автомата в зависимости от состояний ее соседей.

Приведенное определение клеточного автомата можно модифицировать в зависимости от потребностей при моделировании того или иного процесса. Так алфавит состояний можно расширить, изменить или определить ему композитную структуру. Можно также задать каждой клетке дополнительные метаданные, такие как геометрические особенности треугольника, которому соответствует данная клетка либо различные дополнительные нагрузочные метаданные, о которых говорилось ранее.

В качестве примера моделируемого процесса рассматривался разлив жидкости на некоторой поверхности ландшафтного типа. Созданный клеточный автомат работает в синхронном режиме, при этом функции перехода реализована в два шага. На первом шаге итеративно выполняется функция перехода для элементарных автоматов (всех треугольников). На этом шаге производится вычисление уровня жидкости для текущего треугольника и его соседей. Затем балансирующие суммы объемов жидкости записываются в специальный буфер, который является общим для этого шага и представляет собой массив, по размеру соответствующий числу треугольников и имеющий с ним общую индексацию.

Остановимся подробнее на понятие балансирующих сумм на примере одного элементарного автомата, представленного треугольником, и его соседей. Под балансирующими суммами подраз-

умеваются значения объемов жидкости, где каждое значение соответствует своему треугольнику в рамках этого примера. Эти значения рассчитываются таким образом, что если их суммировать, то объем жидкости остается неизменным при расчете изменившегося уровня для каждого отдельного треугольника и его соседей. Так на каждой итерации вычисляются локальные балансирующие суммы, после чего они суммируются с другими, хранящимися в балансирующем буфере.

Таким образом, обеспечивается синхронная работа клеточного автомата: сначала вычисляется изменения элементарных клеточных автоматов, после

чего эти изменения применяются к ним. Использование балансирующего буфера является вторым шагом функции эволюции.

На рис. 3 можно увидеть начальное тестовое состояние клеточного автомата симуляции разлива жидкости. В качестве теста использовано равномерное распределение некоторого уровня жидкости по всей поверхности, заданной триангуляционной сеткой. Цвет, описывающий высоту жидкости для каждого треугольника, окрашивает всю поверхность равномерно.

На рис. 4 можно увидеть результат работы клеточного автомата после десяти тысяч итераций.

Рис. 3. Исходное тестовое состояние автомата, моделирующего разлив жидкости

Рис. 4. Состояние автомата после десяти тысяч эволюций

По яркости цвета определяется высота уровня жидкости. Очевидно, что симуляция работает реалистично.

Реализован функционал, позволяющий отследить самый высокий уровень воды на модели. В ходе эволюционных итераций автомат приходит к состоянию равновесия, и это число практически перестает изменяться спустя определенное количество

итераций. Так, после десяти тысяч итераций автомат находится в состоянии равновесия.

Заключение

Использование триангуляционных сеток в качестве дискретного пространства для построения клеточно-автоматных моделей является весьма перспективным. Авторами продемонстрирован подход

к построению триангуляционных решеток, аппроксимирующих реальные фрагменты рельефа местности. Разработаны алгоритмы генерации триангуляционных сеток на основе карт высот. Это позволяет моделировать и тестировать работу клеточных автоматов на произвольных поверхностях ландшафтного типа. Для построения уникальных клеточных автоматов в рамках конкретных моделей для заданных условий и расчетных областей созданы программные средства генерации триангуляционных сеток по картам высот, в качестве основного формата которых выбран формат .PNG в градациях серого.

С развитием нефтяной индустрии значительную угрозу представляют аварийные разливы

нефтепродуктов, которые могут создать пожароопасную ситуацию. Авторами реализован клеточный автомат, имитирующий процесс разлива жидкости на заданной поверхности ландшафтного типа. Средства визуализации работы КА и сбора статистики позволяют проводить оценку результатов работы модели. Среда разработки – Visual Studio Community, язык программирования – C#. В качестве основного инструмента для графической интерпретации использовался MonoGame.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (19-41-230005).

Список литературы:

1. Alexandridis A. et al. A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through Spetses Island in 1990 // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 204, № 1. P. 191–201.
2. Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana: University of Illinois Press, 1966. 302 p.
3. Toffoli T., Margolus N. *Cellular Automata Machines*. USA: MIT Press, 1987. 279 p.
4. Bandman O. Comparative Study of Cellular automata Diffusion Models // *Lecture Notes in Computer Science*. 1999. Vol. 1662. P. 395–399.
5. Bode M. Interaction of Dissipative Solitons: Particle-Like Behavior of Localized structures in a Three-Component Reaction-Diffusion System // *Physica D*. 2002. Vol. 161. P. 45–66.
6. Евсеев А.А., Нечаева О.И. Клеточно-автоматное моделирование диффузионных процессов на триангуляционных сетках // *Прикладная дискретная математика*. 2009. №4. С. 72–83.
7. Павлова А.В., Рубцов С.Е., Родионов П.Р. Использование клеточно-автоматных моделей в исследовании распространения пожара при разливе нефтепродуктов на поверхности почв // *Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе*. 2020. № 1. С. 54–59.
8. Dyn N., Lyche T., Schumaker L.L. Optimizing 3d triangulations using discrete curvature analysis / *Mathematical Methods in CAGD*: Oslo, 2000. Nashville, TN: Vanderbilt University Press. 2001. 258 p.
9. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // *Вычислительные методы и программирование*. 2002. №3. 189 с.
10. Joe B. Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations // *Computer Aided Geometric Design*. 1991. Vol. 8. P. 123–142.
11. Lohner R. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. In *Proceedings of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Nevada, 1988. 287 p.

TO MODELING OF SPATIAL PROCESSES ON TRIANGULATION GRIDS

M.A. Domasevich, A.V. Pavlova, S.E. Rubtsov

Kuban State University, Krasnodar, Russia

e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru, pavlova@math.kubsu.ru, vestnik@kubsu.ru

Abstract. Using of triangulation grids as a discrete space for constructing cellular automaton models is very promising. Approximation of the landscape surface and applying of cellular automata on the resulting triangulation grid simulating various physical processes, such as floods, fires, landslides, etc., will allow for more accurate modeling in connection with the ability to use landscape features.

The authors demonstrated an approach to the construction of triangulation gratings approximating for real fragments of the terrain. They developed mesh generation algorithms based on height maps. This allows us to simulate and test the operation of cellular automata on arbitrary surfaces of landscape type. For building unique cellular automata within specific models for given conditions and computational domains, we developed software to generate triangulation grids from height maps, the main format of which was selected. PNG format in grayscale. Such grid can approximate the selected surface with the necessary accuracy, thereby allowing the use of the geometry features of the modeled object in a mathematical model, the implementation of which is a cellular automata with specified transition rules.

The authors created a cellular automaton that simulates the process of liquid spill on a given surface of a landscape type. Means of visualizing the operation of the CA and collecting statistics allow us to evaluate the results of the model.

Keywords: height map, triangulation grid, cellular automata, fluid spill simulation

References

1. Alexandridis A. et al. A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through Spetses Island in 1990 // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 204, № 1. P. 191–201.
2. Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana: University of Illinois Press, 1966. 302 p.
3. Toffoli T., Margolus N. *Cellular Automata Machines*. USA: MIT Press, 1987. 279 p.
4. Bandman O. Comparative Study of Cellular automata Diffusion Models // *Lecture Notes in Computer Science*. 1999. Vol. 1662. P. 395–399.
5. Bode M. Interaction of Dissipative Solitons: Particle-Like Behavior of Localized structures in a Three-Component Reaction-Diffusion System // *Physica D*. 2002. Vol. 161. P. 45–66.
6. Evseev A.A., Nechaeva O.I. Kletочно-автоматное моделирование диффузионных процессов на триангуляционных сетках [Cellular automaton modeling of diffusion processes on triangulation grids] // *Prikladnaya diskretnaya matematika [Applied Discrete Mathematics]*. 2009. №4. P. 72–83. (In Russian).
7. Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Rodionov P.R. Ispol'zovanie kletочно-автоматных моделей в исследовании распространения пожара при разливе нефтепродуктов на поверхности почв [Using of cellular automata models in the study of fire spread during the spill of oil products on the surface of soils] // *Zashchita okruzhayushchej sredy v neftegazovom komplekse [Environmental Protection in the Oil and Gas Complex]*. 2020. № 1. P. 54–59. (In Russian).
8. Dyn N., Lyche T., Schumaker L.L. *Optimizing 3d triangulations using discrete curvature analysis / Mathematical Methods in CAGD*: Oslo, 2000. Nashville, TN: Vanderbilt University Press. 2001. 258 p.
9. Skvortsov A.V. Obzor algoritmov postroeniya triangulyacii Delone [A review of algorithms for constructing Delaunay triangulation] // *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye [Computational methods and programming]*. 2002. №3. 189 p. (In Russian).
10. Joe B. Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations // *Computer Aided Geometric Design*. 1991. Vol. 8. P. 123–142.
11. Lohner R. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. In *Proceedings of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Nevada, 1988. 287 p.