ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЭША ПРИ УЧЕТЕ ОПОРТУНИСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СУБЪЕКТОВ

М.А. Решитко, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
burer2012@yandex.ru, usov@sfedu.ru

Аннотация. В статье рассмотрена динамическая одноуровневая задача контроля качества поверхностных вод. Задача контроля качества речной воды имеет важное значение для экономики и экологии. Рассматриваемая система состоит из нескольких предприятий (агентов) и управляемой системы (поверхностные воды). Агенты действуют в собственных интересах, однако способны объединяться в коалиции, для максимизации своей прибыли. Задача рассматривается в динамической постановке. В качестве переменных состояния используются концентрация загрязняющих веществ в речной системе и величины производственных фондов предприятий. Учитывается возможность оппортунистического поведения субъектов управления. При наличии коалиций вводится характеристическая функция. Для кооперативного случая представлен алгоритм нахождения равновесия динамической системы. Алгоритм основан на принципе максимума Понтрягина и нахождении максимума функции Гамильтона. Указан численный алгоритм нахождения решения, основанный на методе стрельбы.

Ключевые слова: оптимальное управление, равновесие Нэша, контроль качества, динамическая система.

Современные иерархические системы состоят из субъектов, которые, как правило, преследуют свои эгоистические цели. При этом зачастую субъекты зависят друг от друга, например используют некоторый общий ограниченный ресурс. В таком случае субъектам при выборе своих стратегий приходится учитывать действия других субъектов. Это проявляется в том числе в создании коалиций субъектов, когда субъекты одной коалиции вырабатывают общую стратегию поведения. Однако, каждый субъект должен доверять другим субъектам коалиции. Поскольку субъекты руководствуются соображениями личной выгоды, разумным условием участия субъекта в коалиции является увеличение его выигрыша по сравнению с индивидуальными действиями.

В статье рассмотрена модификация одноуровневой задачи контроля качества поверхностных вод, которая учитывает возможность образования коалиций между агентами. Описан алгоритм построения равновесия Нэша [1–3] для произвольного количества агентов и коалиций.

Постановка задачи

Рассматривается задача контроля качества поверхностных вод. Дано предприятий (агентов), которые в ходе своей деятельности сбрасывают загрязняющие вещества (ЗВ) в систему поверхностных вод. Концентрация ЗВ описывается уравнением (3). Предприятия характеризуются своими производственными возможностями, которые описываются уравнением (2). За сброс ЗВ предприятия выплачивают штраф, зависящий от объема сброшенных ЗВ. Для сокращения затрат предприятия

могут очищать сбрасываемые ЗВ, выбирая степень очистки, исходя из своих возможностей.

Предполагается, что агенты объединены в $M \leq N$ коалиций, то есть предприятия, входящие в одну коалицию, максимизируют общую целевую функцию. Обозначим множество A_j – номера агентов, входящих в j -ю коалицию. Тогда целевая функция коалиции имеет вид (1).

$$J_j \left(P_{i \in A_j}(t), \varphi_{i \in A_j}(t), B(t), t \right) = \int_0^T \sum_{i \in A_j} z_i R_i(\varphi_i) - W_i(\varphi_i) D_i(P_i) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F_i(t) W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\beta_i \varphi_i + \eta_i \left(z_i R_i(\varphi_i) - W_i(\varphi_i) D_i(P_i) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F_i(t) W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \right); \quad \varphi_i(0) = \varphi_{0i}; \quad i = 1..N \quad (2)$$

$$\frac{dB}{dt} = -kB + \sum_{i=1}^N W_i(\varphi_i) (1 - P_i); \quad B(0) = b_0 \quad (3)$$

В выражениях (1) – (3) t – время, T – момент, до которого ведется рассмотрение, $P_i(t)$ – степень очистки на i -м предприятии, $F_i(t)$ – функция платы i -го предприятия за сброс отходов в водоток. W_i – количество сброшенных отходов. $D_i P_i$ – расходы предприятия на очистку сточных вод. $R_i \varphi_i$ – производственная функция, φ_i – производственные фонды. z_i – прибыль предприятия за реализацию единицы продукции. B_i – концентрация ЗВ, $B_{\max}$ – предельно допустимая концентрация ЗВ, β_i – износ производственных фондов, η_i – часть прибыли, которая вкладывается в производство, k – коэффициент распада ЗВ.

Рассматривается задача нахождения оптимальных управлений агентов P_i^* :

$$\{P_i^*\}_{i \in A_j} = \arg \max_{\{P_i\}_{i \in A_j}} J_j(\cdot) \quad (4)$$

$$W_i(\varphi_i) = \chi_i R_i(\varphi_i); \chi_i > 0 \quad (5)$$

$$0 \leq F_i \leq F_{\max} \quad (6)$$

$$0 \leq P_i(t) \leq 1 - \gamma_i; \gamma_i < 1 \quad (7)$$

Здесь $i = 1..N$, $i = 1..M$ динамика системы описана уравнениями (2) и (3). Она представляет собой дифференциальную игру [2] M коалиций агентов.

Алгоритм решения задачи

Рассматривается задача (2) – (7). Для ее решения используется принцип максимума Понтрягина. С его помощью переходим к эквивалентной задаче:

$$\{P_i^*\}_{i \in A_j} = \arg \max_{\{P_i\}_{i \in A_j}} H_j(\cdot) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial H_j}{\partial \varphi_i} = -\beta_i \lambda_i + \mu_j (1 - P_i) \frac{dW_i}{d\varphi_i}(\varphi_i) + \\ + (1 + \eta_i \lambda_i) \left(z_i \frac{dR_i}{d\varphi_i}(\varphi_i) - \frac{dW_i}{d\varphi_i}(\varphi_i) D_i(P_i) \right) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{B(t)}{B_{\max}} F_i(t) \frac{dW_i}{d\varphi_i}(\varphi_i) (1 - P_i); \lambda_i(T) = 0; i \in A_j \\ \frac{d\mu_j}{dt} = \frac{\partial H_j}{\partial B} = -k\mu_j - \sum_{i \in A_j} (1 + \eta_i \lambda_i) \times \\ \times \left(\frac{1}{B_{\max}} F_i(t) W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \right); \mu_j(T) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь – функция Гамильтона j -й коалиции

$$\begin{aligned} H_j(P_{i \in A_j}(t), \varphi_{i \in A_j}(t), B(t), \lambda_{i \in A_j}(t), \mu_j(t)) = \\ = \sum_{i \in A_j} \left(z_i R_i(\varphi_i) - W_i(\varphi_i) D_i(P_i) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F_i(t) W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \right) \\ + \lambda_i \left(-\beta_i \varphi_i \right. \\ \left. + \eta_i \left(z_i R_i(\varphi_i) - W_i(\varphi_i) D_i(P_i) - \frac{B(t)}{B_{\max}} F_i(t) W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \right) \right) \\ + \mu_j \left(-kB + \sum_{i=1}^N W_i(\varphi_i) (1 - P_i) \right) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем задачу нахождения N управлений, которые максимизируют M функций Гамильтона для динамической системы, которая описывается N уравнениями (2), уравнением (3), N уравнениями (9) и M уравнениями (10). Рассматривается задача (2,3,5–10) с учетом $D_i(P_i) = \frac{a_i P_i}{1 - P_i}$.

Задача (2),(3),(5)-(10) решается в два этапа, первый состоит в максимизации функций Гамильтона (8), второй – в решении двухточечной краевой задачи (2), (3), (9), (10). Результатов первого этапа является нахождение всех $P_i^*(t)$. Рассмотрим максимизацию функции Гамильтона j -й коалиции H_j . Будем считать, что в момент времени t агентам коалиции доступно только состояние системы, решения всех коалиций принимаются одновременно и независимо. Также заметим, что задача (2), (3), (9), (10) решается численно методом стрельбы, поэтому при вычислении $P_i^*(t)$ можно считать, что состояние системы в момент нам известно. Это вытекает из методики численного решения, когда методом стрельбы подбирается начальные условия для (2), (3), (9), (10). а дальнейшие состояния системы получаются из предыдущих одним из численных методов решения ДУ.

Найдем частные производные H_j по P_i , $i \in A_j$ первого и второго порядков. Каждая производная зависит только от одного, соответствующего управления.

Зная частную производную $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}$ легко убедиться, что при заданных функциях производная $D_i(P_i)$ имеет 2 нуля (11),

$$1 \pm \frac{\sqrt{\alpha_i B F B_{\max} (1 + 2\eta_i \lambda_i + \eta_i^2 \lambda_i^2) - (1 + \eta_i \lambda_i) B_{\max}^2 \mu_j}}{B F (1 + \eta_i \lambda_i) - B_{\max} \mu_j} \quad (11)$$

причем в интервал допустимых управлений (7) входит максимум один из нулей. Заметим, что Гессиян функции H_j в данном случае является диагональной матрицей, поэтому достаточное условие максимума сводится к отрицательности всех вторых производных в точке экстремума. Таким образом возможно вычислить P в заданный момент времени. Однако следует учитывать случаи, когда P не существует (выражение (11) не вычислимо) или не удовлетворяет (7).

Удобно записать вычисление оптимальных P в виде алгоритма:

1. Введем список искоемых оптимальных управлений, который заполняется по ходу алгоритма $P^* = \{P_i^*\}_{i=1}^N$

2. Для каждого $j \in 1..M$

2.1. $K = \{\emptyset\}$

2.2. Для каждого $i \in A_j$

2.2.1. Если $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}(0) > 0$ и $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}(1 - \gamma_i) > 0$, то $P_i^* = 1 - \gamma_i$

2.2.2. Иначе если $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}(0) < 0$ и $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}(1 - \gamma_i) < 0$, то $P_i^* = 0$

2.2.3. Иначе численно найти на отрезке $[0, 1 - \gamma_i]$ нуль функции $\frac{\partial H_j}{\partial P_i}$, обозначим его P^0 . Если $\frac{\partial^2 H_j}{\partial P_i^2}(P^0) < 0$, то $P_i^* = P^0$

2.2.4. Иначе $K = K \cup i$

2.3. Если $K \neq \emptyset$

2.3.1. Подставить известные управления в $H_j(P_{i \in A_j}(t), \varphi_{i \in A_j}(t), B(t), \lambda_{i \in A_j}(t), \mu_j(t))$, обозначим $H_j^{A \setminus K}(P_{i \in K}(t), \varphi_{i \in A_j}(t), B(t), \lambda_{i \in A_j}(t), \mu_j(t))$

2.3.2. Оставшиеся неизвестные $P_{i \in K}^*(t) \in \{0, 1 - \gamma_i\}$. Они находятся из решения $P_{i \in K}^*(t) = \arg \max_{\{P_{i \in K}^*\}} H_j^{Aj \setminus K}(\cdot)$ перебором все возможных значений.

3. Оптимальные управления $P_i^* = \{P_{i,j}^*\}_{j=1}^N$ найдены. Двухточечная задача (2),(3),(9),(10) решается методом стрельбы.

Теперь, когда описан алгоритм нахождения $P(t)$, решается двухточечная задача (2,3,9,10). Для ее решения используется метод стрельбы [4]. На каждом шаге вычисляются значения оптимальных управлений $\{P_{i,j}^*\}_{i=1}^N$.

Заключение

Предложенный алгоритм позволяет решать задачу контроля качества поверхностных вод, более того, он позволяет учитывать более сложную структуру системы, при которой отдельные агенты действуют совместно. В модели предусмотрена возможность манипуляции информацией со стороны агентов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00053.

Список литературы

1. Basar T., Olsder G.J Dynamic Noncooperative Game Theory. – SIAM: Philadelphia, 1999.
2. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. – Cambridge University Press, 2000.
3. Ugolnitskii G., Usov A. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. – NY: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106.
4. Rao A. V. A Survey of Numerical Methods for Optimal Control // Advances in the Astronautical Sciences. – 2009. – Vol. 135. – P. 497–528.

NUMERICAL METHOD OF FINDING THE NASH EQUILIBRIUM WITH REGARD TO THE OPPORTUNISTIC BEHAVIOR OF SUBJECTS

M.A. Reshitko, A.B. Usov

Southern Federal University, Rostov-on-Don
burer2012@yandex.ru, usov@sfedu.ru

Abstract. The article considers the dynamic single-level problem of quality control of surface waters. The task of controlling the quality of river water is important for the economy and ecology. The system under consideration consists of several enterprises (agents) and a managed system (surface waters). Agents act in their own interests, but are able to unite in coalitions in order to maximize their profits. The task is considered in the dynamic formulation. As state variables, the concentration of pollutants in the river system and the values of the production assets of enterprises are used. The possibility of opportunistic behavior of the subjects of management is taken into account. In the presence of coalitions, a characteristic function for any coalition composition is introduced. For the cooperative case, an algorithm for finding the equilibrium of a dynamic system is presented. It provides the opportunity to predict if it is possible for certain agents to form a coalition (we check if coalition profit is larger than sum of its agents profits). The algorithm is based on the Pontryagin maximum principle and finding the maximum of the Hamilton function. A numerical algorithm for finding a solution of multi-point boundary value problem based on the shooting method is indicated.

Keywords. Optimal control, Nash equilibrium, water quality control, dynamic hierarchical system

References

1. Basar T., Olsder G.J Dynamic Noncooperative Game Theory. – SIAM: Philadelphia, 1999. (In English)
2. Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. – Cambridge University Press, 2000. (In English)
3. Ugolnitskii G., Usov A. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games //Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E.Bachmaier. – NY: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106. (In English)
4. Rao A.V. A Survey of Numerical Methods for Optimal Control // Advances in the Astronautical Sciences. – 2009. – Vol. 135. – P. 497–528. (In English)