РАВНОВЕСИЕ ШТАКЕЛЬБЕРГА С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО УПРАВЛЕНИЮ В СИСТЕМАХ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА РЕЧНЫХ ВОД

Н.О. Поповян, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
popovian2011@mail.ru; usov@sfedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается двухуровневая иерархически организованная модель системы контроля качества речных вод. Субъектом верхнего уровня является государственный орган, а в роли субъекта нижнего уровня выступает промышленное предприятие, загрязняющее речные воды в ходе своей производственной деятельности. Все субъекты стремятся к максимизации своих целевых функций, отражающих количество средств, имеющихся в их распоряжении. Задача рассматривается в статической постановке. Для нахождения оптимального поведения субъекта, которое вводится как равновесие Штакельберга, используются теоретико-игровой подход и двухуровневая иерархическая система управления. В качестве метода иерархического управления используются методы принуждения и побуждения. Указаны алгоритмы построения равновесия Штакельберга без обратной связи по управлению. Приведены характерные примеры проведенных расчетов, сделан ряд содержательных выводов относительно оптимального поведения субъектов.

Ключевые слова: водоток, управление, иерархия, побуждение, принуждение, равновесие, Штакельберг с обратной связью.

В работе изучается взаимодействие субъектов внутри иерархической системы. Рассматривается деятельность предприятия, целью которого является получение прибыли, а также государственного органа, стремящегося к улучшению состояния речных вод и поступлению средств в его фонды. Подобные модели описаны в [1, 2].

Исследование моделей основано на теоретико-игровом и иерархическом подходах. Простейшими иерархически организованными системами являются двухуровневые системы. Исследование таких систем чаще всего основано на использовании информационного регламента игр Штакельберга [1, 2].

1. Побуждение

Промышленное предприятие сбрасывает в реку загрязняющие вещества вместе со сточными водами. Государственный орган, призванный следить за уровнем загрязнений в речной воде, назначает размер платы за единицу сброшенных загрязнений.

Рассмотрим двухуровневую систему контроля качества сточных вод. В данной модели в роли субъекта верхнего уровня (Ведущего) выступает государственный природоохранный орган, а в роли субъекта нижнего уровня (Ведомого) – промышленное предприятие. Каждый из них старается достичь максимума своей целевой функции.

Ведущий стремится к максимизации полученных от предприятия средств в экологическом фонде. Его целевая функция принимает вид:

$$Y_0(T, p) = (A_1 T + A_2)(1-p)^2 \frac{w^2 c}{B_{\max}} - \frac{C(1-p)}{p} \rightarrow \max \quad (1)$$

Ведомый преследует свои личные цели, стремясь максимизировать свою прибыль. В данной модели мы рассмотрим в качестве целевой функции Ведомого минимизацию расходов на водо-охранные мероприятия:

$$Y(T, p) = ZW - (A_1 T + A_2)(1-p)^2 \frac{w^2 c}{B_{\max}} - \frac{Dp}{(1-p)} W \rightarrow \max \quad (2)$$

Переменная p является степенью очистки сточных вод на предприятии. Так как полная очистка сточных вод не возможна, то необходимо наложить ограничение

$$0 \leq p \leq 1 - \varepsilon$$

Значение переменной T , обозначающей плату за единицу сброшенных загрязняющих веществ, определяется Ведущим. Вводится следующее ограничение на управление Ведущего

$$0 \leq T \leq T_{\max}$$

Равновесие будем искать по следующему алгоритму:

1. Ведущий вводит стратегию наказания Ведомого – T , которая рассчитывается как максимальный выигрыш Ведомого, если Ведущий играет против него:

$$2. \quad Y_{\text{нак}} = \max_p \min_T Y(T, p) \quad (3)$$

В данной модели функция Ведомого (2) убывает по T на всем промежутке $0 \leq T \leq T_{\max}$, из чего следует, что $T_{\text{нак}} = T_{\max}$, а значение p находится с помощью метода множителей Лагранжа.

Величина (3) является величиной гарантированного выигрыша Ведомого в случае отказа сотрудничать с Ведущим.

3. Решается задача оптимального управления Ведущего:

$$Y_0^{\text{опт}} = \max_{T,p} Y_0(T, p) \quad (4)$$

Обозначим решение (4) через T_0, p_0 . Решение находится с дополнительным условием $Y(T_0, p_0) > Y_{\text{нак}}$.

4. Ведущий объявляет Ведомому стратегию вида

$$T^* = \begin{cases} T_0, & \text{если } p^* = p_0, \\ T_{\text{max}}, & \text{если } p^* \neq p_0 \end{cases}$$

5. При экономически разумном Ведомом равновесием будет являться пара (T_0, p_0) .

Расчеты в примерах выполнены на основе имитационного моделирования. Для более удобного анализа полученных результатов полученные значения функций и стратегии записаны в таблицу.

Зафиксируем значения некоторых констант:

$$w = 5, B_{\text{max}} = 10, c = 2, \varepsilon = 0.2, T_{\text{max}} = 1000.$$

В таблице 1 приведены расчеты для 5 различных систем с одним Ведомым. В таблице 1 указан номер примера, значение входных параметров, выигрыши Ведущего и Ведомого и полученное равновесие.

Таблица 1.

Результаты расчетов при побуждении для одного ведомого

№	A_1	A_2	C	Z	D	$Y_{\text{нак}}$	$Y(T_0, p_0)$	$Y_0(T_0, p_0)$	(T_0, p_0)
1	30	30	5000	50000	1000	225619	225660	9537	(287, 0.14)
2	20	30	5000	50000	3000	211619	211675	17754	(580, 0.17)
3	20	30	10000	50000	3000	211619	211660	10648	(688, 0.26)
4	20	30	6000	50000	10000	180885	180945	33191	(892, 0.19)
5	30	30	10000	50000	50000	101370	101459	42572	(854, 0.20)

Далее рассмотрим систему с одним Ведущим и 3 Ведомыми. Основное отличие примеров будет состоять в том, что для Ведущего из следующего примера окончательным выигрышем будет сумма выигрышей в играх с каждым из Ведомых.

Зафиксируем некоторые параметры:

$$A_2 = 20, c = 2, \varepsilon = 0.2, T_{\text{max}}$$

Результаты счета в этом случае приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Результаты расчетов при побуждении для трех ведомых

№	A_1	B_{max}	w	C	Z	D	$Y_{\text{нак}}$	$Y(T_0, p_0^i)$	(T_0, p_0^i)
1	20	5	5	10000	100000	30000	337882	337972	(959, 0.17)
2	25	10	10	20000	100000	10000	776724	776984	(618, 0.15)
3	30	10	5	10000	50000	5000	189122	189142	(645, 0.2)

Конечный выигрыш Ведущего равен 226135

2. Принуждение

Дадим Ведущему возможность дополнительного ограничения управления Ведомого снизу с помощью введения минимальной степени очистки. И соответственно введем дополнительные расходы на контроль выполнения заданной нормы Ведомым. Целевая функция Ведущего примет вид:

$$Y_0(T, p) = (A_1 T + A_2)(1-p)^2 \frac{w^2 c}{B_{\text{max}}} - \frac{C(1-p)}{p} \rightarrow \max \quad (5)$$

где T – константа, а переменная q – задает минимальный уровень очистки речных вод, на которое вводится ограничение $0 \leq q \leq 1 - \varepsilon$:

Целевая функция Ведомого сохраняет вид (2), однако теперь переменная p может принимать значения соответствующие требованиям ведущего, а именно:

$$q \leq p \leq 1 - \varepsilon \quad (6)$$

Поиск равновесия осуществляется по алгоритму схожему с рассмотренным в модели с побуждением:

1. Стратегия наказания Ведомого Ведущим, а так же гарантированный выигрыш Ведомого –, с учетом условия (6) рассчитываются как:

$$Y_{\text{нак}} = \max_p \min_q Y(p, q) \quad (7)$$

Решение (7) обозначим через a , а значение p находится так же как и в модели (1)-(2).

2. Решается задача оптимального управления Ведущего:

$$Y_0^{\text{опт}} = \max_{q,p} Y_0(q, p) \quad (8)$$

Обозначим решение (8) через b . Решение находится с дополнительным условием. При условии, что Ведомый соглашается сотрудничать с Ведущим, оптимальное значение переменной q будет равно 0.

3. Ведущий объявляет Ведомому стратегию с обратной связью:

$$q^* = \begin{cases} 0, & \text{если } p^* = p_0, \\ q_{\text{нак}} & \text{если } p^* \neq p_0 \end{cases} \quad (9)$$

4. При экономически разумном Ведомом равновесием будет являться пара $(0, p_0)$

Расчеты в примерах выполнены на основе имитационного моделирования. Для более удобного анализа полученных результатов полученные значения функций и стратегии записаны в таблицу.

Пример 1. Возьмем $A_1=20, A_2=20, w=5, B_{\max}=10, c=2, C=1000, Z=100000, D=15000, \varepsilon=0.2, V=1000$.

В таблице 3 приведены расчеты для системы с одним Ведомым. В таблице указаны значение входного параметра T , выигрыши Ведущего и Ведомого и полученное равновесие.

Таблица 3.
Результаты расчетов при принуждении для примера 1

T	$Y_{\text{нак}}$	$(q_{\text{нак}})$	$Y(q_0, p_0)$	$Y_0(q_0, p_0)$	(q_0, p_0)
500	197996	0.8	430441	3049	(0, 0.41)
700	197196	0.8	431591	11164	(0, 0.33)
900	196396	0.8	424125	20993	(0, 0.28)
1100	195596	0.8	413068	31931	(0, 0.25)
1300	194796	0.8	399693	43698	(0, 0.22)

Пример 2. Возьмем $A_1=30, A_2=20, w=5, B_{\max}=10, c=2, C=10000, Z=100000, D=10000, \varepsilon=0.2, V=1000$

Таблица 4.
Результаты расчетов при принуждении для примера 2

T	$Y_{\text{нак}}$	$(q_{\text{нак}})$	$Y(q_0, p_0)$	$Y_0(q_0, p_0)$	(q_0, p_0)
500	296994	0.8	441757	13520	(0, 0.31)
700	295794	0.8	424186	29146	(0, 0.25)
900	294594	0.8	403672	46770	(0, 0.22)
1100	293394	0.8	379916	65723	(0, 0.19)
1300	292194	0.8	357805	85663	(0, 0.18)

Закключение

Предложены модели контроля качества поверхностных вод. В моделях учитываются субъекты управления двух иерархически связанных уровней. В качестве метода иерархического управления используются методы побуждения и принуждения, а в качестве информационного регламента – регламент игры Штакельберга с обратной связью. Предложен алгоритм построения равновесия Штакельберга для рассматриваемой системы управления. Осуществлена реализация данного алгоритма для входных функций частного вида. Приведены примеры нахождения равновесия Штакельберга в зависимости от входных параметров модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 17-19-01038.

Список литературы

1. Угольников Г.А., Усов А.Б. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика, 2014, №6, С.86–102.
2. Угольников Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем. Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ, 2016. 704 с

CONTROL OF THE QUALITY OF RIVER WATER

N.O. Popovyan, A.B. Usov

Southern Federal University

popovian2011@mail.ru, tol151968@yandex.ru

Abstract: Environmental problems cannot remain in the shadows for more than a century. That is why humanity is facing this problem. The main cause of pollution is industrial production. Therefore, the state should appoint a special state body to monitor the work of this industrial production. The paper studies the interaction of subjects within a hierarchical system. The article deals with the system of river water quality control. There is an object that discharges pollutants into the river. The state body ensures the prevention of exceeding the maximum permissible concentrations of pollutants in the river system. Game-theoretic approach and two-level hierarchical control system are used to find the optimal behavior of the subject, which is introduced as a Stackelberg equilibrium. The main purpose of the state body is to maximize the use of funds to control the quality of river water. The company tries to maximize revenues from production. As a method of hierarchical control methods of inducement and coercion are used, and as an information regulation – Stackelberg rules of play with feedback. An algorithm for constructing the Stackelberg equilibrium for the control system is proposed. The implementation of this algorithm for input functions of a particular type is carried out. Examples of finding Stackelberg equilibrium depending on the input parameters of the model are given.

Keywords: surface water, management, hierarchy, motivation, compulsion, equilibrium, Stackelberg with feedback.

References:

1. Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // Automation and Remote Control, 2014, № 75:6, p. 1055–1068 (In English).
2. Ugol'nitskii G.A. Upravlenie ustojchivy'm razvitiem aktivny'x system [Management of sustainable development of active systems]. Rostov-na-Donu: Southern Federal University, 2016, 704 p. (In Russian).