РАВНОВЕСИЕ ШТАКЕЛЬБЕРГА ПРИ СОГЛАСОВАНИИ ИНТЕРЕСОВ СУБЪЕКТА

Э.В. Кораблина, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
ellakorablina1998@gmail.com; abusov@sfedu.ru

Аннотация. В статье описывается модель сочетания интересов при взаимодействии субъектов в условиях распределения некоторого ограниченного ресурса. Исследуется случай иерархического взаимодействия субъектов управления. Рассматривается система, состоящая из N агентов, каждый из которых в своём распоряжении имеет некоторое количество ресурса, и одного супервайзера. Система устроена таким образом, что агенты расходуют часть ресурса на общесистемные цели, а часть оставляют на частные нужды. Задачей супервайзера является максимизация собственного дохода, при уменьшении доли вознаграждения. В свою очередь агенты тоже нацелены на максимизацию прибыли, но при минимальных затратах ресурса. Супервайзер устанавливает вознаграждение первым, зная целевую функцию агента, затем агент выбирает количество ресурса, которое может пустить в расход. Такой регламент принятия решений в игре соответствует модели Штакельберга. Равновесие модели находится в два этапа: решается задача оптимизации нижнего и верхнего уровня. В случае степенных функций частного и общесистемного дохода равновесие Штакельберга находится аналитически. Проведен анализ полученных результатов. Сделан ряд выводов о поведении супервайзера и агентов в данной системе управления.

Ключевые слова: супервайзер, агент, двухуровневая система управления, иерархия, распределение ресурса, равновесие Штакельберга.

В современном мире в любой системе управления в той или иной форме возникает задача согласования частных и общественных интересов. Каждая система управления является иерархической, т.е. состоит из субъектов управления разных уровней (один ведущий-лидер-супервайзер и несколько ведомых-агентов) [1]. Отношения между супервайзером и агентами строятся на основе иерархии.

Интересы разных субъектов управления различны, а зачастую и противоположны, что влечёт за собой целый ряд проблем [2, 3]. В связи с этим возникает необходимость в согласовании частных и общественных интересов. Рассматриваемая модель является логическим продолжением работ [4–6], в которых рассмотрены разные аспекты моделирования иерархически организованных систем управления и моделей согласования частных и общественных интересов. Одной из наиболее распространённых проблем подобного типа является проблема согласования интересов при распределении ресурсов между ведущим и ведомыми участниками [5].

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим двухуровневую систему управления. Целевые функции субъектов управления имеют вид
– супервайзера

$$Y_0 = \sum_{i \in N} (1 - \alpha_i) c(p_i) \rightarrow \max_{\alpha_i} \quad (1)$$

– i -го агента

$$Y_i = \alpha_i c(p_i) + Q(r_i - p_i) \rightarrow \max_{p_i} \quad (1)$$

Здесь $i \in N$ – конечное множество участников игры;

r_i – количество ресурсов, в распоряжении i -ого участника игры;

$c(p_i)$ – функция общественного интереса;

$Q(z_i)$ – функция частного дохода i -ого участника игры;

Y_i – функция прибыли (выигрыша) i -ого участника игры;

Y_0 – функция, отображающая общественное благосостояние;

α_i – долю, которую агенты получают в виде вознаграждения из общественного блага.

Обе функции c и Q являются монотонно возрастающими.

Целевые функции (1), (2) рассматриваются при следующих ограничениях на управления

$$0 \leq p_i \leq r_i \quad (3)$$

Рассматривать данную модель будем в случае степенных функций частного и общего дохода, т.е.

$$Y_0 = (1 - \alpha_i) p_i^{\beta_i} \rightarrow \max_{\alpha_i}; \quad Y_i = \alpha_i \sum_{i \in N} p_i^{\beta_i} + (r_i - p_i)^{\beta_i} \rightarrow \max_{p_i} \quad (1)$$

где $0 < \beta_i < 1$.

2. Равновесие по Штакельбергу

Исследуем иерархическую модель. Рассмотрим двухуровневую систему управления, состоящую из супервайзера и N агентов, находящегося у него в подчинении. При этом, все, $N+1$ субъект, стремятся к оптимизации собственного дохода, выражаемого соответствующими функциями выигрыша $Y_0, Y_2, \dots, Y_N$.

Известно, что супервайзер в своём распоряжении имеет некоторый объем ресурса (R). Прибыль, получаемая супервайзером, при активном ($p_i > 0$) или пассивном ($p_i = 0$) участии каждого агента в увеличении общественного блага $c(q)$ зависит только от величины $c(q)$ и выражается его целевой функцией Y_0 . Здесь есть часть ресурса, которую i -й агент тратит на увеличение общественного блага: $q = \sum_{i \in N} p_i$. И супервайзер, и агенты получают доход в виде вознаграждения из общественного блага. Супервайзер определяет, какая часть общественного блага (величины $\alpha_j, j = \overline{1, N}$) поступает к i -у агенту в виде вознаграждения. Агенты решают, какая часть полученного ресурса идет на увеличение общественного блага (величины $p_j, j = \overline{1, N}$), а какая расходуется на личные цели (величины $r_j - p_j, j = \overline{1, N}$).

Причем $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1, \sum_{i \in N} r_i = R$. Величины r_i в рамках модели считаются известными и заданными.

В рассматриваемой иерархической игре ищется равновесие по Штакельбергу. В функциях выигрыша каждого из N агентов учитываются как доходы, получаемые ими от частной (нецелевой) деятельности (функция $Q(r_i - p_i)$), так и их доли в общественном благе.

Модель устроена таким образом, что доход супервайзера зависит только от размера общественного блага и получается, что от количества средств, направляемых агентами на общесистемные цели ($\sum_{i \in N} p_i$). Доходы агентов зависят от количества выделяемого супервайзером ресурса и от того, сколько средств выделяет им супервайзер (α_i) из общественного блага. Целевые функции субъектов имеют вид (1) и (2).

В случае иерархического взаимодействия субъектов первым совершает ход супервайзер. Он сообщает агентам свои управления α_j , где $j = \overline{1, N}$. Агенты, в свою очередь, выбирают величины p_j , где $j = \overline{1, N}$, с учётом известного им α_j .

Для каждого субъекта управления будем рассматривать выпуклые и монотонно возрастающие функции общего и частного дохода. Покажем, что в данном случае равновесие Штакельберга существует и оно единственно.

Докажем это в частом случае иерархической игры двух лиц: супервайзера и агента, находящегося у него в подчинении. При этом субъекты являются зави-

симыми друг от друга. Тогда целевые функции принимают вид:

$$Y_0 = (1 - \alpha_1)c(p_1) \rightarrow \max_{\alpha_i}$$

Далее рассмотрим случай

$$Y_1 = \alpha_1 c(p_1) + (r_1 - p_1)^\beta \rightarrow \max_{p_1}$$

где p_0, γ – некоторые постоянные.

Воспользуемся алгоритмом нахождения равновесия Штакельберга. В данном случае решим две задачи оптимизации. Начнём с решения задачи оптимизации дохода агента нижнего уровня. Найдём критические точки для агента:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial p_1} = \alpha_1(\gamma - 1)\gamma(p_0 + p_1)^{\gamma-2} + \beta(r_1 - p_1)^{\beta-1} = 0 \quad (4)$$

Данное уравнение разрешимо в случае, когда показатели степеней у обоих слагаемых равны, поэтому положим в (4) $\beta = \gamma - 1$:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial p_1} = \alpha_1(\gamma - 1)\gamma(p_0 + p_1)^{\gamma-2} + (\gamma - 1)(r_1 - p_1)^{\gamma-2} = 0$$

Отсюда получаем:

$$p_1 = \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}$$

Рассмотрим теперь вторую производную функции выигрыша агента:

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial p_1^2} = (\gamma - 2)(\gamma - 1)[\alpha_1 \gamma (p_0 + p_1)^{\gamma-3} + (r_1 - p_1)^{\gamma-3}]$$

Исследуем знак полученного выражения: в силу ограничений, наложенных на систему, получаем, что $\frac{\partial^2 Y_1}{\partial p_1^2} < 0$. Это означает, что полученное значение p_1 является точкой максимума функции Y_1 на отрезке. Откуда получаем решение задачи оптимизации агента нижнего уровня:

$$p_1 = \begin{cases} 0, & \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} < 0 \\ \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}, & 0 < \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} < 1 \\ 1, & \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} > 1 \end{cases}$$

Перейдем к решению задачи оптимизации верхнего уровня. Найдём оптимальные значения α_1 при каждом значении p_1 .

• $p_1 = 0$.

Тогда функция $Y_0 = (1 - \alpha_1)\gamma(p_0 + p_1)^{\gamma-1}$ принимает вид: $Y_0 = (1 - \alpha_1)\gamma p_0^{\gamma-1}$. Полученная функция является убывающей по параметру α_1 . Следовательно, оптимальная стратегия в данном случае $\alpha_1 = 0$. Исход игры $(0, 0)$ означает, что супервайзер не выделяет агенту средства из общественного блага, если ему известно, что

последний собирается потратить все свои ресурсы на личные цели.

$$\bullet p_1 = \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}.$$

В этом случае функция $Y_0 = (1 - \alpha_1) \gamma (p_0 + p_1)^{\gamma-1}$ принимает вид:

$$Y_0 = (1 - \alpha_1) \gamma \left(p_0 + \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} \right)^{\gamma-1}$$

Решим аналитически задачу оптимизации для объекта верхнего уровня, откуда вычислим необходимое значение α_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha_1} = & -\gamma(1 - \alpha_1) \left(p_0 + \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} \right)^{\gamma-1} + \\ & + (1 - \alpha_1) \gamma (\gamma - 1) \left(p_0 + \frac{r_1 - p_0 \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}}{1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma}} \right)^{\gamma-2} \times \\ & \times \frac{(\gamma - 2)(p_0 - r_1 \gamma^{2-\gamma}) \alpha_1^{1-\gamma}}{(1 + \alpha_1^{2-\gamma} \gamma^{2-\gamma})^2} = 0 \end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$\alpha_1 = \left[\frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2)(p_0 - r_1 \gamma^{2-\gamma})}{p_0 + r_1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{2-\gamma}} \right) \right]^{\gamma-2}$$

Таким образом, получаем следующее оптимальное решение:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, & F < 0 \\ F, & 0 < F < 1 \\ 1, & F > 1 \end{cases}$$

$$\text{где } F = \left[\frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2)(p_0 - r_1 \gamma^{2-\gamma})}{p_0 + r_1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{2-\gamma}} \right) \right]^{\gamma-2}$$

$$\bullet p_1 = 0.$$

В этом случае функция $Y_1 = (1 - \alpha_1) \gamma (p_0 + p_1)^{\gamma-1}$ принимает вид $Y_1 = (1 - \alpha_1) \gamma (p_0 + 1)^{\gamma-1}$:

Как и в первом случае полученная функция является убывающей по параметру α_1 . Следовательно, оптимальная стратегия в данном случае $\alpha_1 = 0$. Исход игры (0,1) означает, что супервайзер не выделяет агенту средства из общественного блага, если ему известно, что последний собирается потратить все свои ресурсы на общесистемные цели.

Таким образом, получено 5 различных равновесных состояний данной иерархической системы, одно из которых является равновесием Штакельберга в зависимости от входных параметров модели. Изменяя свою стратегию поведения, супервайзер может сделать выгодным для агента выбор стратегии с точки зрения целевой функции.

Заключение

В результате проведённых исследований было получено аналитическое представление равновесия Нэша в случае равноправных игроков и равновесия Штакельберга при наличии иерархии в отношениях между игроками. Все выкладки были проделаны в случае степенных входных функций для произвольного количества игроков. В модели предусмотрена возможность коррупционного поведения субъектов, когда один или несколько ведомых игроков предлагают лидеру взятку. В обмен на взятку лидер завышает роль отдельных ведомых игроков в общественном благосостоянии.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 17-19-01038.

Список литературы

1. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations. Nova Science Publishers, 2016. 552p.
2. Кононенко А.Ф. О многошаговых конфликтах с обменом информацией // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. №4. С.922–931.
3. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Динамические модели конфликтов. Иерархические игры // Автоматика и телемеханика. 2015. №2. С.89–106.
4. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии корпорации // Компьютерные исследования и моделирование, 2016, №8(4), 673–684.
5. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика, 2014, №6, С.86–102.
6. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018, P.63–106.

THE EQUILIBRIUM OF STACKELBERG IN THE COORDINATION OF THE SUBJECT'S INTERESTS

E.V. Korablina, A.B. Usov

Southern Federal University

ellakorablina1998@gmail.com; uabusov@sfedu.ru

Abstract. The article describes a model of combining interests in the interaction of subjects in the distribution of a limited resource. The case of hierarchical interaction of subjects of management is investigated. We consider a system consisting of N agents, each of which has at its disposal a certain amount of resources, and one supervisor. The system is designed in such a way that agents spend part of the resource for system-wide purposes, and some are left for private needs. The task of the supervisor is to maximize their own income, while reducing the share of remuneration. In turn, agents are also aimed at maximizing profits, but at minimal resource costs. The supervisor sets the reward first, knowing the target function of the agent, then the agent chooses the amount of resource that can be spent. Such rules of decision-making in the game corresponds to the Stackelberg model. The equilibrium of the model is in two stages: the problem of optimization of the lower and upper levels is solved. In the case of power functions of private and system-wide income, Stackelberg's equilibrium is found analytically. The analysis of the obtained results is carried out. A number of conclusions about the behavior of the supervisor and agents in this control system are made.

Keywords: supervisor, agent, two-level management system, the hierarchy, the distribution of the resource, the equilibrium of Stackelberg.

References:

1. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations. Nova Science Publishers, 2016. 552 p. (In English).
2. Kononenko A.F. O mnogoshagovykh konfliktakh s obmenom informaciej [On multi-step conflicts with the exchange of information] // Journal of computational mathematics and mathematical physics. 1977. №4. P.922–931 (In Russia).
3. Gorelov M.A., Kononenko A.F. Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games// Automation and Remote Control, 2015, № 76:2, p. 264–277 (In English).
4. Ugol'nitskij G.A., Usov A.B. Teoretiko-igrovaya model' soglasovaniya interesov pri innovacionnom razvitii korporacii [Game-theoretic model of the coordination of interests in the innovative development of a corporation] // Computer Research and Modeling, 2016, №8 (4), P.673–684 (In Russia).
5. Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // Automation and Remote Control, 2014, № 75:6, p. 1055–1068 (In English).
6. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018, P.63–106. (In English).