К ИССЛЕДОВАНИЮ ВИБРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ

И.С. Телятников¹, А.В. Павлова²

¹ Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону,
ilux@list.ru

² Кубанский государственный университет, Краснодар
pavlova@math.kubsu.ru

Аннотация. При математическом моделировании геофизических полей в реальной среде в качестве модели последней нередко используется пакет слоев, поскольку первичное залегание слоев и пластов обычно является горизонтальным. В работе предложены факторизационные методы исследования и решения смешанных задач механики сплошных сред, моделирующих воздействие виброисточника на грунтовые массивы. В качестве моделей геоматериалов рассмотрены деформируемые структуры с покрытиями. Моделью покрытия служит пластина Кирхгофа с осредненными по толщине свойствами. Основания могут моделироваться как кусочно-однородными упругими материалами, в том числе содержащими дефекты типа трещин и включений, так и гетерогенными пористыми средами (модели обводненных грунтов, прибрежных осадочных пород и пр.).

В плоскостях сопряжения упругих слоев пакета предполагается наличие включений. Занимаемые ими области считаются односвязными, а их границы – кусочно-гладкими. Так как в интерфейсных плоскостях пакета упругих слоев заданы смешанные граничные условия, для совокупности включений приходим к системе интегральных уравнений (СИУ) относительно контактных напряжений на поверхности и скачков напряжений в областях расположения дефектов. Для некоторых частных случаев областей включений решения подобных СИУ строятся в конечном виде с помощью интегральных факторизационных методов.

Рассмотренные модели могут быть использованы при исследовании особенностей взаимодействия вибрационных источников с геофизической средой, моделируемой многослойным основанием с покрытием, определении мест развития геологических аномалий, зарождения и развития дилатантных зон.

Ключевые слова: вибрационное воздействие, модели геоматериалов, пластина-покрытие, слоистое основание, факторизационный метод

Введение

Многokратное увеличение техногенных воздействий на окружающую среду требует развития теоретических и экспериментальных методов изучения закономерностей протекания физических и механических процессов в геоматериалах в целях прогноза и предотвращения геофизических, а также сопутствующих им технических катастроф. Результаты подобных исследований широко востребованы в сейсмологии, механике разрушений, строительной механике и других областях. На сегодняшний день остро стоит проблема повышения вероятности прогнозистических оценок возникновения катастрофических ситуаций, определяя необходимость развития математических моделей и методов экспериментальной геофизики. Методы активного виброакустического мониторинга успешно развиваются, начиная с 70-х годов прошлого века, получив название методов активной сейсмологии в работах [1, 2].

Активное использование вибраторов как средства изучения тонкой структуры коры Земли объясняется возможностью выбора времени включения и координат источника, интервалов его работы и спек-

тральных характеристик излучения. Генерируемые с помощью вибратора сигналы, проходят внутри геологической структуры, при этом обработанные данные об отраженных и зарегистрированных сейсмических приемниками волнах дают информацию об особенностях строения геологической среды.

Исследование сопровождающих подготовку и реализацию сейсмических явлений физических процессов, проведение районирования участков для строительства экологически опасных сооружений (трубопроводов, атомных электростанций, плотин и т.д.) невозможны без знания структуры геологических сред.

Управляемые вибрационные воздействия используются также для стимуляции растворенных рудных и нефтяных месторождений. Направленные сотрясения могут изменить фильтрационные потоки в пористых средах, вызвать гидрогеологические эффекты в неглубоко залегающих водоносных горизонтах [3 и др.].

В работе предложены факторизационные методы исследования и решения смешанных задач механики сплошных сред, моделирующих воздействие вибро-

источника на грунтовые массивы. В качестве моделей геоматериалов рассмотрены деформируемые структуры с покрытиями. Основания в свою очередь могут моделироваться как кусочно-однородными упругими материалами, в том числе содержащими дефекты типа трещин и включений, так и гетерогенными пористыми средами (модели обводненных грунтов, прибрежных осадочных пород и пр.).

1. Описание задачи

Важное место при изучении вопросов взаимодействия источника вибрации с деформируемым основанием занимают задачи исследования возникающих в последнем волновых и деформационных полей.

При математическом моделировании геофизических полей в реальной среде в качестве модели последней нередко используется пакет слоев, поскольку первичное залегание слоев и пластов обычно является горизонтальным.

В прямоугольной декартовой системе координат, где плоскость x_1Ox_2 связана со срединной поверхностью покрытия, рассматривается многослойное основание из N параллельных слоев ($-h_1 \leq x_3 \leq 0$) с коэффициентами Ляме λ_k, μ_k , плотностями ρ_k и толщиной H_k для каждого слоя $-h_k \leq x_3 \leq h_{k+1}$, нижняя грань основания жестко закреплена. Слои нумеруются снизу вверх. На верхнюю границу покрытия в заданной области $(x_1, x_2) \in \Omega$ действует установившаяся (с частотой ω) возбуждающая нагрузка $\bar{\mathbf{t}}(x_1, x_2, H_{N+1}, t) = \mathbf{t}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)$. Дальнейшее изложение проводится относительно амплитудных значений соответствующих функций, так как рассматривается установившийся процесс.

Амплитуды смещений покрытия, моделируемого пластиной Кирхгофа, в условиях установившихся колебаний удовлетворяют системе уравнений [4, 5]

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}(x_1, x_2) - \mathbf{E} \mathbf{g}(x_1, x_2) = \mathbf{b}(x_1, x_2),$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_4, \quad R_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_4,$$

$$R_{12} = R_{21} = \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{33} = \varepsilon_3 \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_4, \quad R_{13} = R_{23} = R_{31} = R_{32} = 0,$$

где $\varepsilon_1 = 0,5(1-\nu)$, $\varepsilon_2 = 0,5(1+\nu)$, $\varepsilon_3 = h^2/12$, $\varepsilon_4 = \omega^2 \rho(1-\nu^2)E^{-1}$, $\varepsilon_5 = (1-\nu^2)E^{-1}h^{-1}$; ρ – плотность, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга; h – толщина покрытия; $\mathbf{u} = \{u_j(x_1, x_2)\}$, $j = \overline{1,3}$ – вектор амплитуд смещений срединной поверхности, $\mathbf{g} = \{g_j\}$ амплитуда напряжений на нижней грани покрытия как результат воздействия основания; $\mathbf{E} = \text{diag}\{-\varepsilon_5, -\varepsilon_5, \varepsilon_5\}$; $\mathbf{b} = \varepsilon_5 \mathbf{t}$.

Для каждого слоя основания справедливы уравнения Ляме [6].

При построении соотношений, связывающих перемещения и напряжения в интерфейсных плоскостях многослойного основания будем считать, что на поверхности слоев $x_3 = -h_k$ действуют напряжения с амплитудами $\tau_k^{\pm} = \tau(x_1, x_2, -h_k \pm 0) = \{\tau_{kj}^{\pm}\}$, амплитуды перемещений описываются векторами $\mathbf{u}_k^{\pm} = \mathbf{u}(x_1, x_2, -h_k \pm 0) = \{u_{kj}^{\pm}\}$, $j = \overline{1,3}$, $h_{N+1} = 0$. Функционально-матричные соотношения для интегральных характеристик напряжений и перемещений в межслойных плоскостях [7] для N -слойного пакета с заземленной нижней гранью принимают вид:

$$\mathbf{L}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_{k-1}^{\pm} - \mathbf{L}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_k^{\pm} = \mathbf{D}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_{k-1}^{\pm} - \mathbf{D}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_k^{\pm}, \quad k = \overline{3, N+1},$$

$$-\mathbf{L}_{2,1}^{\pm} \mathbf{U}_2^{\pm} = \mathbf{D}_{1,1}^{\pm} \mathbf{T}_1^{\pm} - \mathbf{D}_{2,1}^{\pm} \mathbf{T}_2^{\pm}.$$

где $\mathbf{U}_k^{\pm} = V_2 \mathbf{u}_k^{\pm}$, $\mathbf{T}_k^{\pm} = V_2 \mathbf{\tau}_k^{\pm}$, $j = \overline{1,3}$, V_2 – двумерный оператор интегрального преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 . Матрицы $\mathbf{L}_{l,k-1}^{\pm}$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^{\pm}$, $l = k-1, k$, описывают вклад в общее волновое поле пакета волн, распространяющихся в слое вверх, а $\mathbf{L}_{l,k-1}^{-}$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^{-}$ – соответственно вниз. Здесь введены обозначения из [7, 8], второй индекс $\mathbf{L}_{l,k-1}^{\pm}$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^{\pm}$ введен для указания на номер слоя, который совпадает с номером его нижней границы. Если нарушений сплошности контакта нет, то $\mathbf{T}_k^{+} = \mathbf{T}_k^{-} = \mathbf{T}_k$, $\mathbf{U}_k^{+} = \mathbf{U}_k^{-} = \mathbf{U}_k$. При наличии интерфейсных трещин в их областях напряжения считаются заданными и непрерывными, на жестких включениях задается равенство перемещений. Вне областей дефектов слои сопрягаются идеально.

В дальнейшем в плоскостях сопряжения упругих слоев пакета предполагается наличие включений. Занимаемые ими области Ω_{kn} ($n = \overline{1, M_k}$) считаются односвязными, а их границы – кусочно-гладкими. Математическая формулировка условий имеет вид:

$$x_3 = 0: \tau_{N+1}^{-} \equiv \tau_{N+1} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{u}_{N+1}^{-} \equiv \mathbf{u}_{N+1} = \mathbf{u};$$

$$x_3 = -h_1: \mathbf{u}_1^{+} \equiv \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty;$$

$$x_3 = -h_k: \mathbf{u}_{kn} = \mathbf{u}_{kn}^{-} = \mathbf{u}_{kn}^{+}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{kn};$$

$$\tau_{kn}^{*} = \tau_{kn}^{+} - \tau_{kn}^{-} = \mathbf{0}, \quad (x_1, x_2) \notin \bigcup_{n=1}^{M_k} \Omega_{kn}, \quad k = \overline{2, N}.$$

При наличии в рассматриваемом пакете пористых насыщенных жидкостью грунтовых слоев для них принимаются следующие допущения: слой состоит из скелета с сохраняющимися механическими свойствами и порового флюида (смесь жидкости и газа), причем изменения давления в поровой жидкости не оказывает влияния на деформацию скелета; фазовые переходы и температурные эффекты не учитываются; деформации и перемещения жидкой и твердой фаз являются малыми; размеры пор малы и не меняют кинематических характеристик движения; элементы тензора вязких напряжений и энергия пульсационного движения пренебрежимо малы; вязкость жидкости влияет только на силу межфазного взаимодействия.

Перемещения гетерогенного слоя описываются уравнениями Био – Френкеля [9, 10] в предположении линейности и изотропности твердого скелета. В плоскости контакта непроницаемого упругого ($m-1$ -го) и гетерогенного (m -го) слоя задаются условия неразрывности вида:

$$x_3 = -h_m : \mathbf{u}_m^+ = \mathbf{u}_m^-, \quad \mathbf{u}_{m3}^+ = \mathbf{v}_{m3}^+, \quad \tau_{jm}^{s,+} = \tau_{jm}^-(j=1,2), \\ \tau_{3m}^{s,+} + \tau_m^{f,+} = \tau_{3m}^-, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty.$$

Здесь $\mathbf{v}_m^+ = \mathbf{v}^+(x_1, x_2, -h_m + 0) = \{\mathbf{v}_{mj}^+\}$ – вектор амплитуд перемещений флюида в плоскости $x_3 = -h_m$, $\mathbf{u}_m^+$ соответствует смещению твердой фазы, $\tau_{jm}^{s,+}$, $\tau_m^{f,+}$ – описывают соответственно компоненты вектора амплитуд напряжений скелета и напряжения флюида.

2. Система интегральных уравнений смешанной задачи

Из условия идеального контакта покрытия, моделируемого пластиной Кирхгофа с осредненными по толщине свойствами, на границе покрытия и основания следуют условия (2). Для трансформант Фурье амплитуд перемещений и напряжений в области стыковки справедливы равенства

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0), \quad \mathbf{G}(x_1, x_2) = \mathbf{T}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0), \\ \text{где } \mathbf{U} = \mathbf{V}_2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}.$$

Интегральную характеристику смещения поверхности системы покрытие/подложка можно представить в виде

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0), \quad \mathbf{G}(x_1, x_2) = \mathbf{T}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0), \quad (3) \\ \mathbf{B} = -\varepsilon_5 \mathbf{T}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}.$$

Так как в интерфейсных плоскостях пакета упругих слоев заданы смешанные граничные условия, для совокупности включений приходим к системе интегральных уравнений относительно контактных напряжений $\tau_{N+1}^-, \tau_{N+1}^+(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2)$ на поверхности и скачков напряжений $\tau_{kn}^+ = \tau_{kn}^+(x_1, x_2) - \tau_{kn}^-(x_1, x_2)$ в областях расположения дефектов $\Omega_{kn}, k = \overline{2, N}, k \neq m$.

Для расположенных этажно плоских включений в интерфейсных плоскостях и протяженного покрытия система интегральных уравнений (СИУ) с учетом (3) запишется

$$\sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_l} K_{n+N-1, l+N-1}(\Omega_{jl+1}) \tau_{j, l+1}^* + K_{n+N-1, 2N-1}(\mathbb{R}^2) \tau_{N+1} = \tau_{n+1}, \\ x_3 = -h_{n+1}, (x_1, x_2) \in \Omega_{m, n+1}, \quad m = \overline{1, M_n}, \quad n = \overline{1, N-1}; \\ \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_l} \tilde{K}_{2N-1, l+N-1}(\Omega_{jl+1}) \tau_{j, l+1}^* + \tilde{K}_{2N-1, 2N-1}(\mathbb{R}^2) \tau_{N+1} = \mathbf{b}, \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_3 = h_{N+1}.$$

$$K(\Omega) \tau = \iint_{\Omega} \mathbf{k}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \tau(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\mathbf{k}(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Контур интегрирования $\Gamma_j, j = 1, 2$ выбираются с учетом принципов излучения волн на бесконечность [11]. Символы ядер СИУ для многослойной среды с дефектами могут быть построены с помощью рекуррентных формул [7, 12]. Для некоторых частных случаев областей включений решения подобных СИУ, могут быть получены в конечном виде с помощью интегральных факторизационных методов [11, 13].

В [11, 14] сформулированы энергетические принципы отбора единственного решения, а также условия корректности постановок рассмотренных краевых задач. При исследовании задач для систем штампов [15] установлено отсутствие единственности их решения для некоторых наборов значений параметров.

3. Заключение

Применительно к задачам активного мониторинга в работе рассмотрены математические модели геологических структур, подвергаемых вибрационному нагружению, позволяющие рассчитать характеристики напряженно-деформированного состояния породных массивов.

Рассмотренные модели могут быть использованы при исследовании особенностей взаимодействия вибрационных источников с геофизической средой, моделируемой многослойным основанием с покрытием, определении мест развития геологических аномалий, зарождения и развития дилатантных зон.

Широкомасштабный мониторинг Краснодарского края с применением методов активной сейсмологии в совокупности с комплексными теоретическими исследованиями, проводимыми в настоящее время, позволит расширить возможности изучения ключевых механизмов развития сейсмических явлений.

Отдельные фрагменты исследования выполнены в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 18-01-00124).

Список литературы:

1. Николаев А.В. Вибрационное просвечивание – метод исследования Земли // Проблемы вибрационного просвечивания. М.: Наука, 1977. 240 с.
2. Алексеев А.С. Современные обратные задачи геофизики в проблеме многодисциплинарного прогноза землетрясений // Развитие методов и средств экспериментальной геофизики: сборник научных трудов. Вып. 1. М.: ИФЗ РАН, 1993. С. 9–24.
3. Barabanov v.I., Nikolaev A. V., Sobisevich A.L. et. al. On effects of vibrations on water-saturated media // Seismicity and related processes in the environment. 1994. Vol. 1. P. 75–77.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Babeshko V.A., Evdokimova O. V., Babeshko O.M. On the problem of estimating the state of coated materials // Doklady Physics. 2006. Vol. 51, No. 8. P. 423–428.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
7. Павлова А.В., Рубцов С.Е. Исследование многослойных материалов при наличии нарушений сплошности соединений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 3. С. 19–22.
8. Babeshko V.A., Pavlova A. V., Ratner S. V., Williams R. T. Problems on the Vibration of an Elastic Half-Space Containing a System of Interior Cavities // Doklady Physics. 2002. Vol. 47, No. 9. P. 677–679.
9. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. М.: Научная думка, 1990. 224 с.
10. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 248 с.
11. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
12. Павлова А.В., Рубцов С.Е. Дифференциальный метод факторизации для слоисто-блочных сред с дефектами // Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4(5). С. 2410–2412.
13. Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. New York: Pergamon Press, 1958. P. 246. (In English)
14. Бабешко В.А. О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1330.

TO THE STUDY OF VIBRATION PROCESSES IN STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS GEOLOGICAL MATERIALS

I.S. Telyatnikov¹ A.V. Pavlova²

¹ Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, Russia,
ilux@list.ru

² Kuban State University, Krasnodar, Russia,
kmm@fpm.kubsu.ru

Abstract. In mathematical modeling of geophysical fields in real environments, researchers often use a package of layers as a model, since the initial occurrence of layers and layers is usually horizontal. In this paper, the authors proposed factorization methods for studying and solving mixed problems of continuum mechanics that simulate the effect of a vibration source on soil massifs. We considered deformable structures with coatings as models of geomaterials. The cover model is a Kirchhoff plate with averaged thickness properties. The bases can be modeled as piecewise-homogeneous elastic materials, including those containing defects such as cracks and inclusions, and heterogeneous porous media (models of watered soil, coastal sedimentary rocks, etc.).

The mating planes of the elastic layers of the packet contain rigid inclusions. The areas they occupy are simply-connected, and their borders are piecewise smooth. Since mixed boundary conditions are specified in the interface planes of the package of elastic layers, for a set of inclusions we arrive at a system of integral equations (SIE) for the contact stresses on the surface and jumps of stresses in the areas of defects. For some particular cases of inclusive domains, solutions of similar SIE are constructed in the final form using integral factorization methods.

The considered models can be used to study the peculiarities of the interaction of vibration sources with the geophysical environment modeled by the multilayer base with the coating, determining the places of development of rheological anomalies, the origin and development of the dilatancy zones.

Keywords: vibration impact, geomaterial models, plate-coating, layered base, factorization method

References

1. Nikolaev A.V. Vibracionnoe prosvechivanie – metod issledovaniya Zemli [Vibrational scanning – a method of research of the Earth] // Problemy vibracionnogo prosvechivaniya [Problems of vibration scanning]. M.: Nauka Publishers, 1977. 240 p. (In Russian)
2. Alekseev A.S. Sovremennye obratnye zadachi geofiziki v probeme mnogodisciplinarnogo prognoza zemletrasenij [Modern inverse problems of geophysics in the problem of multidisciplinary earthquake prediction]. // Razvitie metodov i sredstv eksperimental'noj geofiziki: sbornik nauchnyh trudov [Development of methods and means of experimental geophysics: a collection of scientific papers]. Is. 1. M.: IPE RAS, 1993. P. 9–24. (In Russian)
3. Barabanov V.L., Nikolaev A.V., Sobisevich A.L. et. al. On effects of vibrations on water-saturated media // Seismicity and related processes in the environment. 1994. Vol. 1. P. 75–77. (In English)
4. Vol'mir A.S. Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. M.: Nauka Publishers, 1972. 432 p. (In Russian)
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the problem of estimating the state of coated materials // Doklady Physics. 2006. Vol. 51, No. 8. P. 423–428. (In English)
6. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruемого tvorodogo tela [Mechanics of a deformable solid body]. M.: Nauka Publishers, 1979. 744 p. (In Russian)
7. Pavlova A.V., Rubtsov S.E. Issledovanie mnogoslojnyh materialov pri nalichii narushenij sploshnosti soedinenij [Study of multilayer materials in the presence of discontinuities of compounds] // Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov CHernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation]. 2004. № 3. P. 19–22. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. Problems on the Vibration of an Elastic Half-Space Containing a System of Interior Cavities // Doklady Physics. 2002. Vol. 47, No. 9. P. 677–679. (In English)
9. Sejmov V.M., Trofimchuk A.N., Savickij O.A. Kolebaniya i volny v sloistyh sredah [Oscillations and waves in layered media]. M.: Naukova dumka Publishers, 1990. 224 p. (In Russian)
10. Molotkov L.A. Issledovanie rasprostraneniya voln v poristyh i treshchinovatyh sredah na osnove effektivnyh modelej Bio i sloistyh sred [Investigation of wave propagation in porous and fractured media based on effective Biot and layered media models]. Spb.: Nauka Publishers, 2001. 248 p. (In Russian)
11. Babeshko V.A. Obobshchennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskikh smeshannyh zadachah teorii uprugosti [The generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity]. M.: Nauka Publishers, 1984. 265 p. (In Russian)

12. *Pavlova A.V., Rubtsov S.E.* Differencial'nyy metod faktorizatsii dlya sloisto-blochnykh sred s defektami [Differential factorization method for layered-block media with defects] // *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Mechanics of a deformable solid. Bulletin of Nizhny Novgorod University. N.I. Lobachevsky]. 2011. № 4(5). S. 2410–2412. (In Russian).
13. *Noble B.* Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. New York: Pergamon Press, 1958. P. 246. (In English).
14. *Babeshko V.A.* O needinstvennosti reshenij dinamicheskikh smeshannykh zadach dlya sistem shtampov [On the non-uniqueness of the solutions of dynamic mixed problems for stamp systems] // *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 1990. T. 310. No. 6. P. 1327–1330. (In Russian).