К МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ДИНАМИКИ ПРИБРЕЖНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

С.Е. Рубцов¹, И.С. Телятников²

¹ Кубанский государственный университет, г. Краснодар,

² Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону,

ilux@list.ru, kmm@fpm.kubsu.ru

Аннотация. – В работе рассмотрена задача об акустических колебаниях жидкого клина. Использовали приближенные полуаналитические методы, основанные на применении интегральных преобразований и позволяющие выделить качественные особенности исследуемой задачи, а также предложен алгоритм построения интегральной характеристики потенциала скоростей в точках неограниченного клина, занятого идеальной сжимаемой жидкостью, подверженного нестационарной нагрузке.

Представленная модель может рассматриваться как этап для построения более сложных моделей, описывающих поведение прибрежных геологических структур, моделируемых контактирующими жидкой и упругой средами, в результате нестационарных воздействий. Реализованный алгоритм позволит в дальнейшем провести исследование динамических эффектов в контактирующих жидкой и упругой средах.

Ключевые слова: акустические колебания, идеальная сжимаемая жидкость, интегральное преобразование, разделение переменных, потенциал скоростей

Введение

Проблемы реализации моделей нестационарных процессов сейсмического и техногенного характера [1–5 и др.] в упругих и жидких средах, обладающих различными свойствами, в настоящее время весьма актуальны. На сегодняшний день, когда количество расположенных в прибрежных районах объектов ответственного назначения увеличивается, задачи геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии, так или иначе связанные с вопросами строительства сооружений, стимулируют построения математических моделей для сред неоднородной структуры, особую актуальность приобретает исследование задач, моделирующих динамические режимы функционирования сооружений с учетом геологического строения их местоположения. Среди требующих решения вопросов следует выделить следующие: определение особенностей, в том числе резонансных режимов взаимодействия сооружений с основанием и жидкой средой; расчет характеристик распространения волн в основании, сооружении и жидкости. Данная работа посвящена исследованию последнего.

Проблемы распространения акустических волн в жидкости затрагиваются в большом количестве работ, среди которых [1–4]. В качестве инструмента в ряде из этих работ, например, [2] использовался лучевой метод, который имеет ряд существенных ограничений, накладываемых на параметры задачи. Нестационарные волновые поля в жидкой среде изучались в [5, 6]. Монография [7] В.М. Сеймова, А.Н. Трофимчука, О.А. Савицкого содержит подробное изложение подходов к исследованию различных

типов гидроупругих задач, нацеленных на выявление характеристик волновых процессов.

Предложенный в настоящей работе алгоритм позволяет построить представление потенциала скоростей в точках неограниченного клина, занятого идеальной сжимаемой жидкостью, подверженного нестационарной нагрузке. Представленная задача позволит в дальнейшем провести исследование динамических эффектов в контактирующих жидкой и упругой средах.

Рассмотрена задача об акустических колебаниях жидкого клина. Используя методы интегральных преобразований и разделения переменных, получено аналитическое представление интегральной характеристики потенциала скоростей точек жидкости. Представленная задача может рассматриваться как этап для построения более сложных моделей, описывающих поведение прибрежных геологических структур, моделируемых контактирующими жидкой и упругой средами, в результате нестационарных воздействий.

1. Математическая модель

Исследуется задача об акустических колебаниях неограниченной области D клиновидной формы, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью, под воздействием нестационарной внешней нагрузки.

Граница рассматриваемой области D представляет собой двугранный угол, ребро которого совпадает с осью Oy введенной декартовой системы координат, грань a лежит в плоскости xOy ($x>0$), а грань b составляет с ней угол b ($x>0, z>0$). Локализованный

источник колебаний расположен на грани b в области W (рисунок 1).

Движение среды, занимающей область D , описывается потенциалом скоростей точек жидкости, удовлетворяющим волновому уравнению

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \Delta u.$$

Здесь c – скорость звука в жидкости, Δ – оператор Лапласа.

Рис. 1. Геометрия задачи

Внешнее динамическое воздействие на грани a и b определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,y,z) \in a} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x,y,z) \in b} &= \begin{cases} q(x, y, z, t), & (x, y, z, t) \in \Omega, \\ 0, & (x, y, z, t) \notin \Omega, \end{cases} \end{aligned}$$

где ρ_0 – плотность жидкости. Функция $q(x, y, z, t)$ имеет размерность давления и считается заданной.

В начальный момент времени точки области D не возмущены, т.е.

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0.$$

Кроме того, считаем, что функция потенциала скоростей убывает на бесконечности и ограничена в вершине клина, т.е. выполнены условия,,

где C – константа.

2. Метод решения

При решении подобных задач в ряде случаев приближенные полуаналитические методы являются предпочтительными, так как в отличие от прямых численных дают возможность выделить качественные особенности исследуемой задачи.

Применим экспоненциальное интегральное преобразование Фурье по координате y и осуществим переход к полярным координатам в плоскости xOz ($x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$) $u(x, y, z, t) = \bar{u}(r, \varphi, z, t)$, $q(x, y, z, t) = \bar{q}(r, \beta, z, t)$. Кроме того, по времени произведем преобразование Лапласа. В результате получим следующую краевую задачу для интегральной характери-

стики неизвестной функции с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{p^2}{c^2} + \alpha^2 \right) U = 0,$$

$$U|_{\varphi=0} = 0, \quad U|_{\varphi=\beta} = \frac{1}{\rho_0 p} Q(r),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U = 0, \quad |U| < C < \infty, \quad r \rightarrow 0.$$

Здесь U и Q – преобразования Фурье – Лапласа функций u и q соответственно, p – параметр преобразования Лапласа, α – параметр преобразования Фурье

$$U(r, \varphi, \alpha, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{u}(r, \varphi, y, t) \exp(-i\alpha y - pt) dy dt,$$

$$Q(r, \alpha, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{q}(r, \beta, y, t) \exp(-i\alpha y - pt) dy dt.$$

Здесь и далее для краткости использованы обозначения $U(r, \varphi, \alpha, p) = U(r, \varphi)$, $Q(r, \alpha, p) = Q(r)$.

Одним из основных методов решения стационарных задач механики для клиновидных областей, описанных, например, в [8], является применение преобразования Меллина по переменной r . Однако при наличии явной зависимости искомой функции от времени этот подход неэффективен, так как приводит к дифференциально-разностным уравнениям, для которых не существует общих методов построения решений. В силу сказанного, воспользуемся методом разделения переменных [9].

Представим функцию $U(r, \varphi)$ в виде

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\varphi) \Psi_n(r) + \frac{\varphi}{r} Q(r).$$

Таким образом, для функции $\Phi_n(\varphi)$ получим задачу Штурма – Лиувилля:

$$\Phi_n'' + \lambda \Phi_n = 0,$$

$$\Phi_n(0) = 0, \quad \Phi_n(\beta) = 0.$$

В результате ее собственные значения и собственные функции соответственно примут вид $\lambda_n = \frac{\pi n}{\beta}$, $\Phi_n = \sin \lambda_n \varphi$.

Функция $\Psi_n(r)$ при этом является решением неоднородного модифицированного уравнения Бесселя

$$\Psi_n''(r) + \frac{1}{r} \Psi_n'(r) - \left(s^2 + \frac{\lambda_n^2}{r^2} \right) \Psi_n(r) =$$

$$= -\frac{\varphi_n}{\beta r} (r Q''(r) + Q'(r) + s^2 r Q(r)),$$

$$\text{где } s^2 = \frac{p^2}{c^2} - \alpha^2, \quad \varphi_n = \frac{2}{\beta} \int_0^{\beta} \varphi \sin(\lambda_n \varphi) d\varphi.$$

Используя стандартные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и свойства модифицированных функций Бесселя первого и второго рода [10] порядка, получим

$$\begin{aligned} \Psi_n(r) = & C_1 I_{\lambda_n}(sr) + C_2 K_{\lambda_n}(sr) + \frac{\varphi_n s^2}{\beta} I_{\lambda_n}(sr) \int K_{\lambda_n}(sr) Q(r) r^{-1} dr - \\ & - \frac{\varphi_n s^2}{\beta} K_{\lambda_n}(sr) \int I_{\lambda_n}(sr) Q(r) r^{-1} dr + \frac{\varphi_n}{\beta} Q(r), \end{aligned}$$

где C_1, C_2 – константы, подлежащие определению.

Исходя из характера поведения функции $U(r, \varphi)$ в окрестности точки $r=0$ и на бесконечности, а также учитывая, что $\lim_{r \rightarrow 0} I_\lambda(r) = \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} K_\lambda(r) = \infty$ [10], определяются константы C_1 , C_2 .

Таким образом, преобразование Фурье – Лапласа потенциала скоростей точек жидкости примет следующий вид:

$$U(r, \varphi) = \frac{\varphi}{r} Q(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n \varphi) \left(\frac{\varphi_n}{r} Q(r) + \frac{\varphi_n s^2}{\beta} I_{\lambda_n}(sr) \int_r^{\infty} K_{\lambda_n}(sr) Q(r) r^{-1} dr + \frac{\varphi_n s^2}{\beta} K_{\lambda_n}(sr) \int_0^r I_{\lambda_n}(sr) Q(r) r^{-1} dr \right).$$

Для нахождения оригинала функции, описывающей потенциал скоростей идеальной жидкости, необходимо произвести обратные преобразования Фурье и Лапласа.

Дальнейшее решение задачи было проведено для плоского случая, когда все искомые и заданные функции не зависели от переменной y . Обратное преобразование Лапласа выполнено с помощью асимптотического метода Фурье, где в качестве полной системы функций на промежутке $[0, \infty)$ выбраны функции.

3. Заключение

Изучение региональной сейсмичности требует построения моделей породных массивов, в том числе прибрежных зон. Исследование влияния на распространение волн в упругих средах масс жидкости занимает особое место. Представленная задача может рассматриваться как этап для построения более сложных моделей, описывающих поведение прибрежных геологических структур, моделируемых контактирующими жидкой и упругой средами, в результате нестационарных воздействий. При этом могут быть использованы подходы работ [11–13].

Такого рода исследования востребованы в геофизике, геологии, сейсмостойком строительстве в прибрежной зоне и т.д. Развитие экспериментальных методик и интерпретации их результатов позволит использовать региональную сейсмическую информацию при исследовании различных эффектов, приводящих порой к резонансным явлениям в системе жидкость – упругая среда.

Работа выполнена в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (16-41-230184).

Список литературы

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 369 с.
2. Бреховских Л.М., Житковский Ю.Ю. Акустика океана. М.: Знание, 1977. 64 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947, 928 с.
4. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Ленинград: Судостроение, 1972. 374 с.
5. Маркова И.Н., Шемякин Е.И. Распространение нестационарных возмущений в жидкости, находящихся в контакте с упругим полупространством // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 27, № 1. С. 57–66.
6. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Ленинград: Судостроение, 1980. 343 с.
7. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: наук. думка, 1990. 224 с.
8. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
11. Молотков Л.А., Крауклис П.В., Крауклис Л.А. О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 230–271.
12. Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С., Зарецкая М.В. Исследование напряженного состояния слоистой среды с жидким включением // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 1. С. 71–78.
13. Рубцов С.Е., Павлова А.В., Телятников И.С. К задаче о вибрации ограниченного объема жидкости на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 2. С. 65–73.

TO THE MATHEMATICAL MODELS OF THE COASTAL GEOLOGICAL STRUCTURES DYNAMICS

S.E. Rubtsov¹, I.S. Telyatnikov²

¹ Kuban State University, Krasnodar

² Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don

kmm@fpm.kubsu.ru, ilux@list.ru

Abstract. The authors considered the problem of acoustic vibrations of a liquid wedge. We used approximate semi-analytical methods based on the use of integral transforms and allowing us to distinguish the qualitative features of the studied problem and also proposed an algorithm for constructing an integral characteristic of the velocity potential at points of an unbounded wedge occupied by an ideal compressible liquid subjected to a nonstationary load.

We went to the polar coordinate system and, using the exponential integral Fourier transform by the variable y and the Laplace transform by the time, obtained a boundary value problem for the integral characteristic of the velocity potential in a liquid. The problem for the ordinary differential equation was solved by the method of separation of variables. The authors carried out a further solution for the plane case by performing the inverse Laplace transform with the help of the asymptotic Fourier method.

The presented model can be considered as a stage for the construction of more complex models describing the behavior of coastal geological structures modeled by contacting liquid and elastic media as a result of non-stationary effects. The implemented algorithm will allow further research of dynamic effects in contacting liquid and elastic media.

Keywords: acoustic vibrations, ideal compressible liquid, integral transformation, separation of variables, velocity potential

References

1. Brekhovskih L.M., Lysanov YU.P. Teoreticheskie osnovy akustiki okeana [Theoretical basis of ocean acoustics]. Moscow: Nauka Publishers, 2007. 369 p. (In Russian)
2. Brekhovskih L.M., Zhitkovskij Yu. Yu. Akustika okeana [Acoustics of the ocean]. Moscow: «Znanie» Publishers, 1977. 64 p. (In Russian)
3. Lamb G. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow: «Gostekhizdat» Publishers, 1947, 928 p. (In Russian)
4. Slepyan L.I. Nestacionarnye uprugie volny [Nonstationary elastic waves]. Leningrad: «Sudostroenie» Publishers, 1972. 374 p. (In Russian)
5. Markova I.N., Shemyakin E.I. Rasprostranenie nestacionarnykh vozmushchenij v zhidkosti, nahodyashchisya v kontakte s uprugim poluprostranstvom [The propagation of nonstationary perturbations in a fluid in contact with an elastic half-space] // Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]. 1957. V. 27, № 1. pp. 57–66. (In Russian)
6. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. Integral'nye preobrazovaniya v nestacionarnykh zadachakh mekhaniki [Integral transformations in nonstationary problems of mechanics]. Leningrad: «Sudostroenie» Publishers, 1980. 343 p. (In Russian)
7. Sejmov V.M., Trofimchuk A.N., Savickij O.A. Kolebaniya i volny v sloistyh sredah [Vibrations and waves in layered media]. Kiev: Nauk. dumka, 1990. 224 p. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko ZH.F. Dinamika neodnorodnykh linejno-uprugih sred [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. Moscow: Nauka Publishers, 1989. 344 p. (In Russian)
9. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Moscow State University Publishers, 2004. 798 p. (In Russian)
10. Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po special'nykh funkciyam [Directory of special functions]. Moscow: Nauka Publishers, 1979. 830 p. (In Russian)
11. Molotkov L.A., Krauklis P.V., Krauklis L.A. O rasprostranении seismicheskikh voln v blochnykh uprugozhidkikh sredah [On the propagation of seismic waves in block elastic-liquid media] // Zapiski nauchnykh seminarov POMI [Notes of scientific seminars of PDMI]. 2003. V 297. pp. 230–271. (In Russian)
12. Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S., Zaretskaya M.V. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya sloistoy sredy s zhidkim vkluyucheniem [Investigation of the stressed state of a layered medium with a liquid inclusion] // EHkologicheskij vestnik nauchnykh centrov CHernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation]. 2016. № 1. pp. 71–78. (In Russian)
13. Rubtsov S.E., Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. K zadache o vibracii ogranichennoy ob'ema zhidkosti na uprugom osnovanii [To the problem of the vibration of a bounded volume of a liquid on an elastic base] // EHkologicheskij vestnik nauchnykh centrov CHernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation]. 2017. № 2. pp. 65–73. (In Russian)