К МОДЕЛЯМ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ ОТ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА

А.В. Павлова, Н.В. Савченко, Д.А. Хрипков

Кубанский государственный университет, г. Краснодар,
pavlova@math.kubsu.ru, kmm@fpm.kubsu.ru, vestnik@kubsu.ru

Аннотация. – В работе рассмотрен процесс распространения ЗВ от поверхностного источника, который изменяет интенсивность и площадь вследствие конвекционно-диффузионных процессов. Возможны случаи, когда миграция загрязнителя на уровне источника приводит к изменению его характеристик во времени. В качестве примера можно привести процесс распространения по поверхности воды нефтяной плёнки, который можно условно представить в виде суперпозиции независимых друг от друга процессов: дрейф плёнки и ее растекание по спокойной воде, – приводящих с течением времени к увеличению площади загрязнения. Тогда на каждом элементарном временном промежутке решения основной задачи необходимо рассматривать вспомогательную задачу нахождения функции источника загрязнения.

В работе в качестве первичного выброса рассматривается сосредоточенный источник постоянной мощности. Для ускорения реализации численного алгоритма решения основной задачи на каждом шаге использована стационарная модель.

Ключевые слова: поверхностный источник загрязнения, метод целой функции, интегральной преобразование, метод расщепления

Введение

Немаловажную роль среди задач экологии играют исследования пространственно-временного распределения атмосферных примесей, закономерностей и особенностей их распространения. В рамках программы ООН стоит задача создания «Глобальной системы мониторинга окружающей среды» (ГСМОС). Пример реализации такой системы в России – «Единая государственная система экологического мониторинга Российской Федерации» (ЕГСЭМ), а также региональные подсистемы частности, использовавшиеся в РФ в начале 2000-х. На сегодняшний день в России существуют различные ведомственные системы, целый ряд компаний осуществляет разработку мониторинговых систем для предприятий и регионов: «СЭМОС» ОАО «Лига», системы «НПФ «ДИЭМ» и др. Однако экологический мониторинг, используемый в качестве инструмента контроля интенсивности нагрузки, позволяет лишь регистрировать изменения экологической обстановки, в то время как результаты математического моделирования на основе данных мониторинга позволяют не только дать оценку текущему состоянию, но и определить тенденции изменения характеристик процессов в окружающей среде.

Для прогнозирования состояния экосистем требуется как теоретическая разработка методик выполнения измерений, так и совершенствование моделей природных процессов и явлений, создание новых методов анализа состояния объектов окружающей среды, которые позволят разработать

возможные мероприятия по обеспечению качества атмосферного воздуха и чистоты водных акваторий.

В настоящее время эффективно используются различные модели кинетики и динамики аэрозолей и газообразных примесей в атмосфере. Ведущими разработчиками таких моделей являются ИВМ РАН и ИВМ СО РАН. Весьма широкий круг моделей миграции загрязняющих веществ с учетом фазовых переходов и химических реакций в региональном и континентальном масштабах рассмотрен в работах Марчука Г.И., Дымникова В.П., Пененко В.В., Саркисяна А.С., Алояна А.Е., Лыкосова В.Н., Толстых М.А. и др. [1–5 и др.]. Однако область применения многих разработок существенно ограничена, так как требует, как правило, значительных вычислительных мощностей.

Решение проблем экологической безопасности и рационального природопользования включает мониторинг загрязнения водной и воздушной среды. Использование математических моделей позволяет успешно решать проблемы оценки экологического состояния территорий, блокирования рассеяния загрязнителей и прогнозирования локальных последствий антропогенных воздействий в региональных масштабах.

Важнейшие физические процессы, определяющие характер распространения загрязнений – миграция за счет конвекции и диффузия. Использование различных подходов к моделированию процесса распространения загрязняющих веществ (ЗВ) позволяет реализовать методы, применимые для оценки состояния экологической системы региона. В настоящей

работе рассмотрен процесс распространения ЗВ от поверхностного источника, который изменяет интенсивность и площадь вследствие конвекционно-диффузионных процессов.

1. Математическая модель

Дифференциальная формулировка модели процесса миграции в атмосфере загрязняющей примеси может быть представлена следующим образом;

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + \text{div}(\varphi_k \mathbf{a} - m \text{grad}()) + (\mathbf{B}\varphi)_k = f_k, \quad (1)$$

где $\varphi(\mathbf{x}, t) = \{\varphi_k\}$, $k = \overline{1, n}$ – вектор концентраций составляющих примеси, $\mathbf{a} = (u, v, w - w_{gi})$ – скорость движения воздушных масс, w_{gi} – величина скорости оседания i -й компоненты примеси под действием гравитации. Тензор коэффициентов диффузии обозначен через $\mu = \|\mu_{mn}\|$, $m, n = \overline{1, 3}$. В модели учтены только диагональные элементы ($\mu_{mn} = 0$, $m \neq n$). В (1) $\mathbf{B}\varphi$ – оператор, описывающий трансформации составляющих примеси. Для консервативных компонентов матрица элементы диагональной матрицы $\mathbf{B} = \|\sigma_{mn}\|$, ($\sigma_{mn} = 0$, $m \neq n$) характеризуют скорости разложения компонентов ЗВ на составляющие атмосферы. В таком случае задача распадается на n несвязных начально-граничных задач для элементов примеси $\varphi_k(\mathbf{x}, t)$, $k = \overline{1, n}$. Функция $\varphi_k(\mathbf{x}, t)$ описывает распределение и мощность источника i -го компонента φ_i загрязнителя, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Система (1) решается в области $\Omega = \{\Omega \times [0, T]\}$, где $\Omega = \{-L_1 < x_1 < L_1, -L_2 < x_2 < L_2, 0 < x_3 < H\}$, начальные условия задаются в виде $\varphi_k|_{t=0} = \varphi_{0k}$. На верхней грани и боковых поверхностях Ω могут быть заданы условия выхода концентрации ЗВ на ее фоновые значения или условия непроницаемости, соотношения на нижней границе задаются с учетом способности рассматриваемой территории аккумулировать загрязняющие вещества и наличия поверхностных источников загрязнения.

Возможны случаи, когда миграция загрязнителя на уровне источника, занимающего некоторую площадь подстилающей поверхности, приводит к изменению его характеристик во времени. В качестве примера можно привести процесс распространения по поверхности воды нефтяной пленки, который можно условно представить в виде суперпозиции независимых друг от друга процессов: дрейф пленки и ее растекание по спокойной воде, – приводящих с течением времени к увеличению площади загрязнения [6]. Тогда на каждом элементарном временном промежутке решения основной задачи необходимо рассматривать вспомогательную задачу нахождения функции источника загрязнения.

В работе в качестве источника первичного выброса рассматривается сосредоточенный постоянной мощности. Для ускорения реализации численного

алгоритма решения основной задачи на каждом шаге использована стационарная модель.

2. Метод решения

Декартова система координат вводится в плоскости источника. Предполагая, что мигрирующая примесь не достигает некоторой прямой и вводя допущение об отсутствии вдоль прямой потока примеси от источника, вспомогательная задача, решаемая на каждом шаге основного алгоритма, формулируется в следующем виде:

$$\mathbf{a}_1 \text{grad}(q_k) - \left(\eta_1 \frac{\partial^2 q_k}{\partial x_1^2} + \eta_2 \frac{\partial^2 q_k}{\partial x_2^2} \right) + \varsigma q_k = C \delta(x_1^0, x_2^0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_k(x_1, 0)}{\partial x_2} = 0, \quad q_k(x_1, l_1) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{a}_1 = \{u_1, v_1\}$ – скорость перемещения среды на уровне источника; η_j , $j = 1, 2$ – характеристики диффузии выбрасываемой примеси, ς – коэффициент ее распада, C – первичная мощность выброса ЗВ источником.

Задача (2), (3) может быть решена с помощью применения интегрального преобразования, а также основанного на факторизации относительно области метода целой функции [7].

Применяя к уравнению (2) интегральное преобразование Фурье по обоим переменным, положим $q_k = (x_1, x_2)$ при $x_2 < 0$ и $x_2 > l_1$. Далее для интегральных характеристик использованы обозначения

$$V_1(\alpha_1) q_k = \bar{q}_k(\alpha_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} q_k(x_1, x_2) \exp(i\alpha_1 x_1) dx_1, \\ V_2 q_k = Q_k(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{l_1} q_k(x_1, x_2) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2.$$

После применения интегрального преобразования (2) с учетом (3) примет вид,

$$K(\alpha_1, \alpha_2) Q_k(\alpha_1, \alpha_2) = \omega, \quad (4)$$

$$\text{где } K(\alpha_1, \alpha_2) = \eta_1 \alpha_1^2 + \eta_2 \alpha_2^2 + \varsigma - i(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1), \\ \omega = (i\eta_2 \alpha_2 + v_1) \bar{q}_k(\alpha_1, 0) + \eta_2 \exp(i\alpha_2 l_1) \frac{\partial \bar{q}_k(\alpha_1, l_1)}{\partial x_2} + \\ + C \exp(i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)).$$

Соотношение (4) в разрешенном относительно виде запишется,

$$Q_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{C \exp(i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)) + C_1 \exp(i\alpha_2 l_1) + C_2 (i\eta_2 \alpha_2 + v_1)}{\eta_2 (\alpha_2 - i\zeta_1)(\alpha_2 - i\zeta_2)},$$

где

$$C_1 = \eta_2 \frac{\partial \bar{q}_k(\alpha_1, l_1)}{\partial x_2}, \quad C_2 = \bar{q}_k(\alpha_1, 0), \quad \zeta_{1,2} = \\ = \frac{v_1 \pm \sqrt{4\eta_2 (\eta_1 \alpha_1^2 - i\alpha_1 u_1 + \varsigma) + v_1^2}}{2\eta_2}.$$

Функция $q_k = (x_1, x_2)$ финитная, ее трансформанта Фурье $Q_k(\alpha_1, \alpha_2)$ является целой функцией. Таким образом, особенностей при $\alpha_2 = \zeta$ она не имеет. Сле-

довательно, из представления, приведенного выше, следует

$$C \exp(i(\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0)) + C_1 \exp(i\zeta_j l) + (i\eta_2 \zeta_j l + \nu_1) C_2 = 0, j=1,2. \quad (5)$$

Применив обратное преобразование Фурье по параметру α_2 к решению системы (5), получим

$$\begin{aligned} \bar{q}_k(\alpha_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_k(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\alpha_2 x_2) d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\alpha_2 x_2)}{\eta_2(\alpha_2 - i\zeta_1)(\alpha_2 - i\zeta_2)\Delta(\zeta_1, \zeta_2)} \{ \eta_2 \exp(i\alpha_2 l) (\zeta_2 \exp(-\zeta_2 x_1^0) - \\ &- \zeta_1 \exp(-\zeta_1 x_2^0)) + C(i\eta_2 \alpha_2 + \nu_1) \exp(i\alpha_1 x_1^0) (\exp(-\zeta_1 x_2^0 - \zeta_2 l) - \\ &- \exp(-\zeta_2 x_2^0 - \zeta_1 l)) - C\eta_2 \exp(i\alpha_2 x_2^0) (\zeta_2 \exp(-\zeta_2 l) - \\ &- \zeta_1 \exp(-\zeta_1 l)) \} d\alpha_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= -\zeta_1 \zeta_2 (\exp(\zeta_1 x_2^0) - \exp(\zeta_2 x_2^0)) (\exp(\zeta_1 (x_2^0 - l)) - \exp(\zeta_2 (x_2^0 - l))) + \\ &+ (\zeta_2 \exp(\zeta_1 x_2^0) - \zeta_1 \exp(\zeta_2 x_2^0)) (\zeta_2 \exp(\zeta_1 (x_2^0 - l)) - \zeta_1 \exp(\zeta_2 (x_2^0 - l))). \end{aligned}$$

Аналитическое представление преобразования Фурье по переменной x_1 концентрации примеси на уровне подстилающей поверхности, полученное с помощью теории вычетов [8], примет вид

$$\begin{aligned} \bar{q}_k &= C \exp(i\alpha_1 x_0 + \gamma_1 (x_2 - x_2^0)) (\xi_1 \operatorname{sh} \xi_2 x_2 - \xi_2 \operatorname{ch} \xi_2 x_2) \times \\ &\times \operatorname{sh} \xi_2 (l_1 - x_2^0) \Delta_1^{-1}, \quad x_2 \leq x_2^0; \\ \bar{q}_k &= C \exp(i\alpha_1 x_0 + \gamma_1 (x_2 - x_2^0)) (\xi_1 \operatorname{sh} \xi_2 x_2^0 - \xi_2 \operatorname{ch} \xi_2 x_2^0) \times \\ &\times \operatorname{sh} \xi_2 (l_1 - x_2) \Delta_1^{-1}, \quad x_2 > x_2^0, \\ \text{где } \Delta_1 &= \eta_2 \xi_2 (\xi_1 \operatorname{sh} \xi_2 l_1 - \xi_2 \operatorname{ch} \xi_2 l_1), \quad \xi_1 = \frac{\nu_1}{2\eta_2}, \\ \xi_2 &= \frac{\sqrt{\nu_1^2 + 4\eta_2 (\zeta + \eta_1 \alpha_1^2 - i\alpha_1 u_1)}}{2\eta_2}. \end{aligned}$$

В свою очередь, интенсивность загрязнителя на уровне источника как обращение Фурье $\bar{q}_k$ по α_2 определяется численно посредством вычисления интеграла

$$q_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}_k(\alpha_1, x_2) \exp(-i\alpha_1 x_1) d\alpha_1,$$

что позволяет вычислить распределение концентрации ЗВ на подстилающей поверхности на заданном расстоянии от источника.

Затем для решения уравнений системы (1) с граничными условиями на нижней границе для каждой составляющей примеси $\varphi_k(\mathbf{x}, t)$ $\varphi_k(x_1, x_2, 0, t) = q_k(x_1, x_2, t)$, используется метод расщепления по физическим процессам [5, 9] и с помощью схемы Кранка–Николсона строится численное решение динамической задачи рассеяния многокомпонентного ЗВ в атмосфере.

Первый этап реализует перенос примеси с использование разностной схемы вида

$$\left(E + \frac{\Delta t}{4} \Lambda_p\right) \varphi^{j-\frac{4-p}{4}} = \left(E - \frac{\Delta t}{4} \Lambda_p\right) \varphi^{j-\frac{5-p}{4}}, \quad p = \overline{1, 3},$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{4} \Lambda_{s-p}\right) \varphi^{j+\frac{p}{4}} = \left(E - \frac{\Delta t}{4} \Lambda_{s-p}\right) \varphi^{j+\frac{p-1}{4}}, \quad p = \overline{2, 4},$$

где

$$(\Lambda_1 \varphi)_{j,l,m} = [u_{j+1/2,l,m} \varphi_{j+1,l,m} - u_{j-1/2,l,m} \varphi_{j-1,l,m}] (2h_1)^{-1},$$

$$(\Lambda_2 \varphi)_{j,l,m} = [v_{j,l+1/2,m} \varphi_{j,l+1,m} - v_{j,l-1/2,m} \varphi_{j,l-1,m}] (2h_2)^{-1},$$

$$(\Lambda_3 \varphi)_{j,l,m} = [(w - w_{g,j,l,m+1/2}) \varphi_{k,l,m+1} - (w - w_{g,j,l,m-1/2}) \varphi_{j,l,m-1}] (2h_3)^{-1},$$

через E обозначен единичный оператор, величины шагов сетки по соответствующим осям $-h_i$ ($i=\overline{1,3}$).

На втором этапе с помощью аналогичной схемы аппроксимируется дифференциальный оператор диффузии

$$\varphi^{j+1} = \varphi^j - \frac{\Delta t}{2} (\sigma \varphi^j + \sigma (\varphi^j - \Delta t \sigma \varphi^j)).$$

Третий этап реализует процесс деградации ЗВ.

Здесь индекс k , соответствующий номеру компонента загрязнителя, опущен.

3. Заключение

Таким образом, реализована модель распространения ЗВ для случая, когда миграция загрязнителя на уровне поверхностного источника приводит к изменению его характеристик во времени. Тогда на каждом элементарном временном промежутке решения основной задачи рассматривается вспомогательная задача нахождения функции источника загрязнения. В качестве источника первичного выброса рассматривается сосредоточенный постоянной мощности, для ускорения реализации численного алгоритма основной задачи принята вспомогательная стационарная модель.

Для решения динамической задачи использован метод расщепления по процессам, применена схема второго порядка аппроксимации по пространственным и временной переменным.

Рассмотренные задачи могут найти практическое приложение при определении загрязненных зон и территорий в результате плановых и аварийных выбросов в атмосферу или водное пространство. Кроме того, сходные формулировки моделей могут быть использованы при исследовании поведения внутримантийных неоднородностей. С их помощью могут быть получены условия на границе контакта литосферных плит с верхней мантией, определяющие формирующиеся напряжения в верхней и средней коре.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (16-41-230175).

Список литературы

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Пененко В.В. Модели и методы для задач охраны окружающей среды / В.В. Пененко, А.Е. Алоян. Новосибирск: Наука, 1985. 245 с.
3. Алоян А.Е. Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. М.: Наука, 2008. 415 с.
4. Агошков В.И. Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях / В.И. Агошков, Н.А. Асеев, И.С. Новиков. М.: ИВМ РАН, 2015. 174 с.
5. Jacobson M.Z. Fundamentals of Atmospheric Modeling. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 828 p.
6. Монин А.С. Явления на поверхности океана / А.С. Монин, В.П. Красицкий. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 376 с.
7. Павлова А.В. Об одной модели распространения загрязняющей примеси от площадного источника / А.В. Павлова, В.В. Калайдин // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2012. № 2. С.18–22.
8. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. М.: Наука, 1987. 688 с.
9. Самарский А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. М.: Наука, 2001. 319 с.

TO MODELS OF THE SPREADING PROCESS OF IMPURITY FROM A SURFACE SOURCE

A.V. Pavlova, N.V. Savchenko, D.A. Khripkov

Kuban State University, Krasnodar, Russia

e-mail: pavlova@math.kubsu.ru, kmm@fpm.kubsu.ru, vestnik@kubsu.ru

Abstract. The aim of this research is the developing a theoretical apparatus, analytical and numerical methods for modeling of mechanisms for the transport, scattering and deposition of impurities for typical scenarios for the spread of pollutants within the region, using the equation of turbulent diffusion of impurities.

In this paper we have considered the process of pollutant propagation from a surface source, which changes the intensity and area due to convection-diffusion processes. There are cases when the migration of the pollutant at the source level leads to a change in its characteristics over time. As an example, we can cite the process of the oil film propagation along the water surface, which can be conditionally represented as a superposition of processes independent of each other: film drift and its spreading over calm water, – leading to an increase in the contamination area over time. Then, in each elementary time interval of the main problem solution, it is necessary to consider the auxiliary problem of finding the function of the source of contamination.

In the paper, a concentrated source of constant power is considered as the primary emission. A stationary model is used at each step to accelerate the implementation of the numerical algorithm for solving the main problem.

Keywords: surface source of contamination, entire function method, integral transformation, method of splitting

References

1. Marchuk G.I. 1982. Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhajushhej sredy. [Mathematical modeling in environmental problem]. Moscow: Nauka Publishers. 320 p. (In Russian).
2. Penenko V.V., Alojjan A.E. 1985. Modeli i metody dlja zadach ohrany okruzhajushhej sredy [Models and methods for environmental objectives]. Novosibirsk, «Nauka»: 245 p. (In Russian).
3. Alojjan A.E. 2008. Modelirovanie dinamiki i kinetiki gazovyh primesej i ajerozolej v atmosfere. [Modeling the dynamics and kinetics of gas pollutants and aerosols in the atmosphere]. Moscow: Nauka Publishers. 415 p. (In Russian).
4. Agoshkov V.I., Aseev N.A., Novikov I.S. 2015. Metody issledovanija i reshenija zadach o lokal'nyh istochnikah pri lokal'nyh ili integral'nyh nabljudenijah [Methods for investigating and solving local source problems for local or integral observations]. Moscow, INM RAS. 174 p. (In Russian).
5. Jacobson M.Z. 2005. Fundamentals of Atmospheric Modeling. Cambridge, Cambridge University Press: 828 p. (In English).
6. Monin A.S. YAvleniya na poverhnosti okeana [Phenomena on the ocean surface] / A.S. Monin, V.P. Krasickij. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1985. 376 p. (In Russian).
7. Pavlova A.V., Kalajdin V.V. 2012. Ob odnoj modeli rasprostraneniya zagrjaznjajushhej primesi ot ploschadnogo istochnika [On one propagation model contaminant from the area source]. Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse. (2). pp. 18–22. (In Russian).
8. Lavrent'ev M.A. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable] / M.A. Lavrent'ev, B.V. SHabat. Moscow: Nauka Publishers, 1987. 688 p. (In Russian)
9. Samarskij A.A. Additivnye skhemy dlya zadach matematicheskoj fiziki [Additive schemes for problems of mathematical physics] / A.A. Samarskij, P.N. Vabishchevich. Moscow: Nauka Publishers, 2001. 319 p. (In Russian)