ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА РЕЧНОЙ ВОДЫ

В.А. Магдесян, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
vmagdesyan@yandex.ru; usov@sfedu.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается моделирование системы управления качеством речных вод. При моделировании этой системы рассматриваются двухуровневые иерархически организованные системы управления. Задача исследуется в динамической постановке. Вдоль реки находится коммерческое предприятие (КП), которое сбрасывает загрязняющие углеродосодержащие вещества (ЗВ) в реку вместе со сточными водами. Деятельность предприятия контролируется правительственным органом (Центром).

Ключевые слова: иерархия, двухуровневая система, Штакельберг, равновесие.

В современном мире системы управления – это многоуровневые иерархические системы. Система состоит из нескольких субъектов: субъект управления верхнего уровня (начальник) и один или несколько субъектов нижнего уровня (подчиненных), где все субъекты хотят достичь своих индивидуальных эгоистических целей, которые чаще всего не помогают поддерживать систему в заданном состоянии [1–4].

Поддержание динамических систем в заданном состоянии понимается как координация целей и интересов на небольшой период времени различных групп и отдельных субъектов в составе системы с целями, необходимыми для ее внутреннего развития в долгосрочной перспективе. Такое иерархическое управление стабильным развитием нужно для решения многих проблем: экологических (глобального, регионального и локального уровня), проблем управления предприятиями и организациями, состоящих в различных секторах экономики и форм собственности, проблем государственного устройства и других [5, 6].

1. Математическая постановка задачи

При моделировании системы управления качеством поверхностных вод рассмотрим двухуровневые иерархически организованные системы управления.

Пусть вдоль реки находится коммерческое предприятие (КП), которое сбрасывает загрязняющие углеродосодержащие вещества (ЗВ) в реку вместе со сточными водами. Деятельность предприятия контролируется правительственным органом (Центром).

Центр стремится к максимизации размера средств в централизованном фонде. Из этого фонда средства выделяются на проведение очистных мероприятий по улучшению качества поверхностных вод. Целевая функция Центра имеет вид

$$J_0 = \int_0^{\Delta} \{-C_A(y) + F(T) \cdot (1-P) \cdot W(t)\} dt \rightarrow \max \quad (1)$$

где Δ – общее количество сброшенных в воду ЗВ; $-C_A(y)$ – материальные потери общества из-за загрязнения воды; $F(T)$ – размер и функция платы за единицу сброшенных ЗВ; $(1-P)$ – доля ЗВ, удаляемых на предприятии в процессе очистки сточных вод; $W(t)$ – количество ЗВ, сбрасываемых в реку предприятием до очистки сточных вод. Причем, $F(T)$ – возрастающие функции своих аргументов и. Управлением центра является величина P – размер платы за единицу сброшенных ЗВ.

Цель КП состоит в максимизации прибыли, полученной в ходе своей хозяйственной деятельности, за вычетом разного рода природоохранных расходов (затраты на очистку сточных вод, плата за сброс ЗВ). Его целевая функция имеет вид

$$J_0 = \int_0^{\Delta} \{z \cdot R(\Phi) - C_p(P) \cdot W(t) - F(T) \cdot (1-P) \cdot W(t)\} dt \rightarrow \max \quad (2)$$

где $C_p(P)$ – функция затрат КП на очистку единицу сбрасываемых загрязнений; Φ – производственные фонды; $R(\Phi)$ – производственная функция КП; z – прибыль КП от реализации единицы произведенной продукции. Причем $C_p(P)$, $R(\Phi)$ – возрастающие функции своих аргументов и $C_p(0)=1$; $C_p(1)=\infty$. Управлением КП является доля очистки сточных вод на предприятии – величина P .

Динамика изменения производственных фондов КП описывается уравнением вида:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -k \cdot \Phi + Y; \quad (3)$$

где k – коэффициент амортизации производственных фондов; Y – инвестиции.

Причем

$$Y = \alpha \cdot R(\Phi) - C_p(P) \cdot W(t) - F(T) \cdot (1-P) \cdot W(t).$$

Задача рассматривается при следующих ограничениях на управления центра и КП

$$P_{\min} \leq P \leq 1 - \varepsilon \quad (4)$$

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max} \quad (5)$$

Значение $T_{\max}$ задано; величина ε определяется технологическими возможностями очистки сточных вод на КП.

Требуется не превышение предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ в сточных водах

$$\frac{W(1-P)}{Q^0} \leq Q_{\max} \quad (6)$$

где Q^0 – расход воды на КП; значение $Q_{\max}$ – задано.

Динамика роста загрязняющих веществ описывается уравнением вида:

$$\frac{dB}{dt} = h \cdot (k_2 \cdot B - C_3 \cdot \beta \cdot \Phi \cdot (1-P)); \quad (7)$$

Предполагается, что выполнение условий (7) позволяет поддерживать экологическую систему в заданном состоянии.

1.1. Аналитическое исследование

Исследуем задачу Ведомого согласно алгоритму для следующих входных функций:

$$C_A(y) = C_1 \cdot \ln y$$

$$F(T) = \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T}$$

$$R(\Phi) = C_4 \cdot \Phi$$

$$C_p(P) = -\ln(1-P) \cdot C_5$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 - const; C_i > 0; i = \overline{1,5}$$

$$J_1 = \int_0^{\Delta} \{z \cdot C_4 \cdot \Phi + C_5 \cdot \ln(1-P) \cdot W - \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} \cdot (1-P) \cdot W\} dt$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -k \cdot \Phi + a \cdot (z \cdot C_4 \cdot \Phi + C_5 \cdot \ln(1-P) \cdot W - \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} \cdot (1-P) \cdot W);$$

Выпишем функцию Гамильтона:

$$H = z \cdot C_4 \cdot \Phi + C_5 \cdot \ln(1-P) \cdot W - \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} \cdot (1-P) \cdot W + \lambda \cdot (-k \cdot \Phi + a \cdot (z \cdot C_4 \cdot \Phi + C_5 \cdot \ln(1-P) \cdot W - \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} \cdot (1-P) \cdot W))$$

Решим уравнение:

$$\frac{dH}{dP} = 0$$

Получим:

$$\frac{dH}{dP} = -\frac{C_5 \cdot w}{1-P} + \frac{C_2 \cdot T \cdot w}{C_3 + T} - \frac{C_5 \cdot \lambda \cdot a \cdot w}{1-P} + \lambda \cdot a \cdot w \cdot \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} = 0.$$

Отсюда найдем:

$$P = \frac{T(C_2 - C_3) - C_3 \cdot C_5}{C_2 \cdot T}.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = C_4 \cdot z \cdot (1 + \alpha \cdot \lambda) - k \cdot \lambda \\ \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

Обозначим:

$$G = C_4 \cdot \alpha \cdot z$$

Отсюда получим:

$$\lambda = \frac{e^{t(G-k)} - C_4 \cdot z}{G-k}.$$

Отсюда получим:

$$\Phi = \frac{e^{t(G-k)} - \alpha \cdot C_5 \cdot \ln(1-P) \cdot w + \alpha \cdot \frac{C_2 \cdot T}{C_3 + T} \cdot (1-P) \cdot w}{G-k}.$$

1.2. Имитация

Алгоритм построения равновесия в динамической игре состоит в следующем:

1. Задаются вид и значения всех входных функций и параметров исследуемой модели.

2. Задается текущая стратегия центра, то есть сеточная функция: $T_i(t_k)$, $i=\overline{0, N}$; $k=\overline{0, S-1}$.

3. Путем перебора возможных ответов предприятий с некоторым шагом, осуществляется выбор их оптимальных значений, то есть построение функций: $(P_i(t_k))^* = (P_i(t_k))^*(T_i(t_k))$; $i=\overline{0, N}$; $k=\overline{0, S-1}$ доставляющих максимум их целевой функции.

4. Определяется очередное приближение к решению, то есть пара сеточных функций:

$$\{T_i(t_k)^*, (P_i(t_k))^*\}_{k=0(i=0)}^{S-1(N)};$$

где $(P_i(t_k))^* = (P_i(t_k))^*((T_i(t_k))^*)$.

5. Если число итераций не исчерпано, то проводится выбор новой стратегии центра путем рассмотрения нового сценария или возмущения его текущей стратегии.

Таким образом, за конечное число итераций предложенный алгоритм имитационного моделирования позволяет построить приближенное решение модели (1) – (6).

2. Результаты счёта

При проведении численных экспериментов брались входные функции вида (9):

$$C_A(y) = y \cdot (1-P)^2 \cdot \beta \cdot \Phi$$

$$F(T) = C_1 \cdot \sqrt{T} \cdot \beta \cdot \Phi$$

$$R(\Phi) = \sigma \cdot \Phi^{0.4}$$

$$C_p(P) = C_2 \cdot D \cdot P^7 \cdot \beta \cdot \Phi$$

$$C_1, C_2, D, \beta, \sigma - const; C_1, C_2, D, \beta, \sigma > 0$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -k \cdot \Phi + a \cdot (z \cdot \sigma \cdot \Phi^{0.4} + \beta \cdot \Phi \cdot (C_2 \cdot D \cdot P^7 + C_1 \cdot \sqrt{T} \cdot (1-P)));$$

Пример 1. Для следующих входных данных: $\alpha=0.3$; $\beta=11.1$; $z=4$; $C_1=12.8$; $C_2=181.5$; $\sigma=13.5$; $B=0.6$; $k=20$; $k_2=22.2$ в таблице 1 указана зависимость доходов Центра и КП от количества сброшенных ЗВ в воду.

Таблица 1

Результаты счёта для входных данных примера 1

y	J_0	J_1
5	12326	13371
10	9328.73	13371
15	6331.4	13371

Таким образом, видно, что увеличение количества сброшенных ЗВ уменьшает доход Центра и не влияет на доход КП.

Пример 2. Для входных данных примера 1 и в таблице указана зависимость доходов Центра и КП от затрат КП на очистку единицы сбрасываемых загрязнений.

Таблица 2

Результаты счета для входных данных примера 2

C_2	J_0	J_1
200	17413.12	19396.97
250	16926.88	18823.45
300	16462.06	18274.47

Таким образом, видно, что увеличение затрат КП на очистку единицы сбрасываемых загрязнений снижает доход обоих субъектов. Снижение доходов КП выглядит довольно логичным, тогда как Центр теряет доход из-за роста материальных потерь общества.

3. Заключение

В работе на основе теоретико-игрового и иерархического подходов построена двухуровневая, иерархически организованная, математическая динамическая модель контроля качества поверхностных вод, учитывающая интересы субъектов управления двух уровней. Использован метод побуждения в качестве метода иерархического управления. Предложен алгоритм построения равновесия при побуждении для рассматриваемой системы управления. Осуществлена реализация данного алгоритма для входных функций частного вида. Указан вид равновесий в случае входных данных разного вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-00432.

Список литературы

1. Угольников Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием. М.: Физматлит, 2010.
2. Угольников Г.А., Усов А.Б. Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т.5. Вып.2. С.82–104.
3. Угольников Г.А., Усов А.Б. Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // АиТ. 2013. №2. С.109–122.
4. Угольников Г.А., Усов А.Б. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // АиТ. 2014. №6. С.86–102. ц
5. Кононенко А.Ф. О многошаговых конфликтах с обменом информацией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1977. №4. С.922–931.
6. Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Динамические модели конфликтов. Иерархические игры // Автоматика и телемеханика. 2015. №2. С.89–106.

DYNAMIC MODEL OF CONTROL OF THE QUALITY OF RIVER WATER

V.A. Magdesyan, A.B. UsovSouthern Federal University, Rostov-on-Don
vmagdesyan@yandex.ru, tol151968@yandex.ru

Abstract. The problems of hierarchical management of stable advancement are incredibly timely issues. It's worth mentioning these three problematic areas as examples: firstly, the global, regional and local ecological problems; secondly, the businesses' and organizations' from various economic sectors management issues that can apply to private or public services; lastly, the problems of the government system. This article considers the ecological problem of quality control of surface waters. Along the river there is a commercial enterprise (CE), which discharges polluting carbonaceous substances (PS) into the river together with sewage. The activity of the enterprise is controlled by the government body (the Center). The interaction of the Center and a commercial enterprise in the field of quality control of surface waters is considered. Modeling uses game-theoretic and hierarchical approaches. The method of impulsions is used as a method of hierarchical control. The Center does motion the first. He chooses the strategy of management by the first. CE does the motions when the choice of center already known. The Nash equilibriums is built in the game between CE. Each of control subjects aspires to maximization of the income at certain limits on the managements. The Stackelberg's equilibrium is searched in the hierarchical game of two persons. The center is the anchorman (leader) and CE play role of slave. The algorithms for constructing the Stackelberg equilibrium in an analytic study are given. In case of sedate entrance functions an Stackelberg's equilibrium is built analytically. Results of analytical studies using the Pontryagin's maximum principle for a special type of input functions and modeling for general input functions. Analysis of the results obtained. The row of conclusions is done about behavior of management subjects.

Keywords: hierarchy, two-level control system, Stackelberg equilibrium.

References:

1. Ugolnizky G.A. Ierarhicheskoe upravlenie ustojchivym razvitiem [Hierarchical management of sustainable development]. Publisher physical and mathematical literature. 2010. 336 p. In Russian.
2. Ugolnizky G.A., Usov A.B. Dinamicheskie ierarhicheskie igry dvuh lic v programmnyh strategijah i ih prilozhenija // Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija [Dynamic hierarchical two-person game in program strategies and their applications // Mathematical Game Theory and its applications]. 2013 V.5. Issue 2. p.82–104. In Russian.
3. Ugolnizky G.A., Usov A.B. Issledovanie differencial'nyh modelej ierarhicheskikh sistem upravlenija putem ih diskretizacii [Investigation of differential patterns of hierarchical control systems by means of their sampling]. AIT. 2013. №2. p.109–122. In Russian.
4. Ugolnizky G.A., Usov A.B. Ravnovesija v modeljah ierarhicheski organizovannyh dinamicheskikh sistem s uchetom trebovanij ustojchivogo razvitiya [Equilibrium models of hierarchically organized dynamic systems with the requirements of sustainable development]. AIT. 2014. №6. p.86–102. In Russian.
5. Kononenko A.F. O mnogoshagovyh konfliktah s obmenom informaciej [About multistage conflicts with the exchange of information]. Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics. 1977. №4. p.922–931. In Russian.
6. Gorelov M.A., Kononenko A.F. Dinamicheskie modeli konfliktov. Ierarhicheskie igry [Dynamic models of conflict. Hierarchical games]. Automation and Remote Control. 2015. №2. p.89–106. In Russian.