АГРЕГИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ БАНКА: СТРУКТУРА БАЛАНСА, ДОХОДНОСТЬ, РИСКИ

В.В. Селютин

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
vvs1812@gmail.com

Аннотация. Центральным вопросом управления банками является достижение максимальной доходности при обеспечении всех требований пруденциального надзора к надёжности и устойчивости. Особого внимания заслуживают риски ликвидности, полноценный анализ и управление которыми требуют рассмотрения банка как динамической системы. В статье разрабатывается агрегированная математическая модель банка как динамической системы с сосредоточенными параметрами. Модель включает три компонента активов (кредиты; вложения в ценные бумаги; счета, резервы, касса) и две составляющие пассивов (собственный и заёмный капитал). Данный подход позволяет наглядно описать механизм трансформации основных денежных потоков и формализовать различные правила управления активами и пассивами. Компьютерная реализация данной модели может быть использована для численного исследования динамики элементов баланса и эффективности различных алгоритмов принятия решений по размещению активов. Найдены аналитические выражения для исследования влияния основных структурных ограничений на доходность банка.

Ключевые слова: модель банка, управление активами и пассивами, анализ доходности, риски.

Банки как элементы финансовой системы выполняют целый ряд функций, в том числе операторов по ведению и обслуживанию счетов клиентов (расчётно-кассовых центров), осуществлению переводов денежных средств, операций с ценными бумагами, обмену валют и пр. Однако нас в первую очередь будет интересовать главная функция банков как финансовых посредников, обеспечивающих трансформацию привлечённых (заёмных) средств в необходимые реальному сектору кредиты.

В условиях экономической нестабильности особенно возрастает роль банковского риск-менеджмента. Согласно GARP, основные пять категорий банковских рисков составляют кредитный риск, рыночный риск, риск ликвидности, операционный и событийный риск.

Наибольшее внимание в литературе, посвящённой банковским рискам, уделяется кредитным рискам. Имеется целый ряд ставших коммерческими продуктами моделей кредитных рисков (*CreditMetrics*TM, *EDFCalc*, *CreditRisk+*, *CreditPortfolioView*TM), однако вопросы анализа и управления кредитным риском продолжают активно обсуждаться.

Моделирование рыночных рисков имеет довольно давнюю историю, начиная с работ Марковица (*Markowitz*, 1952) и Роя (*Roy*, 1952), и связано с оптимизацией портфелей активов в координатах «риск-доходность», при этом в качестве мер риска чаще всего выбираются различные показатели, генерируемые нижними частными моментами (*Lower Partial Moments*, $LPM_k(\tau)$) порядка k относительно τ при различных сочетаниях k и τ .

Операционные риски преимущественно относятся к менеджменту банка, сфере организации управления персоналом и информационно-технологическими процессами, а событийные – к внешним шокам, которые могут рассматриваться как экзогенные сценарии в рамках стресс-тестирования.

Особого внимания заслуживают риски ликвидности, полноценный анализ и управление которыми требуют рассмотрения банка как динамической системы. В то же время, существующие подходы к вопросам анализа и обеспечения ликвидности банков опираются преимущественно на статичные однопериодные модели. Многопериодные модели являются редким исключением [1].

Для того, чтобы представить логику функционирования банковской организации, рассмотрим простейшую укрупнённую модель динамики основных финансовых потоков, которая, тем не менее, описывает ключевые аспекты её функционирования. В наиболее компактном и удобном для математического исследования виде эта модель далее формулируется в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При выборе вектора состояния ограничимся пятью агрегированными статьями баланса, из которых только четыре, согласно принципу равенства активов и пассивов, являются независимыми (Табл. 1). В качестве балансирующей переменной обычно фигурирует собственный (акционерный) капитал.

Источником средств банка и исходным пунктом модели служит экзогенная переменная – заёмные и привлечённые средства (срочные вклады и депо-

зиты до востребования физических и юридических лиц, остатки на счетах клиентов), динамика которой в простейшем случае описывается как

$$dy/dt = v(t) - y/D_y(t) + \rho_y y \quad (1)$$

где $v(t)$ – чистый приток средств на депозитные счета, $D_y(t)$ – дюрация пассивов (среднее время пребывания средств на депозитных счетах), ρ_y – проценты, начисляемые по депозитам. Здесь предполагается, что проценты снимаются вместе с основной суммой депозита в конце срока, хотя в модели может быть использована и другая схема, когда проценты снимаются со счетов по мере их начисления.

Основная проблема моделирования пассивов заключается в том, что $v(t)$ – случайный процесс. При возникновении кризисных явлений приток $v(t)$ снижается, а $D_y(t)$ уменьшается в результате оттока средств с клиентских счетов и отзыва срочных вкладов (если последнее допустимо по условиям договора).

Можно указать три подхода к прогнозированию и моделированию $v(t)$.

- Сценарный подход. Задаётся набор возможных (предполагаемых) экзогенных функций времени $v(t)$ и др. (сценариев).
- Статистический подход. Для построения $v(t)$ используется один из методов прогнозирования (моделирования) временных рядов.
- Байесовский подход. Основан на комбинировании сценарного подхода с одной или несколькими случайными величинами. В зависимости от значения, принимаемого этой случайной величиной, на определённом временном промежутке реализуется тот или иной сценарий притока и оттока средств.

Таблица 1
Типичный агрегированный баланс
коммерческого банка

Активы		Пассивы	
Кредиты, выданные юридическим и физическим лицам $x(0)$	60	Собственный капитал $c(0)$	10
Ценные бумаги $b(0)$	15	Депозиты (срочные и до востребования, счета клиентов), заёмные средства $y(0)$	90
Корсчета, касса, резервы $s(0)$	25		
Всего активов	100	Всего пассивов	100

С использованием привлечённых (заёмных) средств формируется ссудный портфель банка

$$dx/dt = u(t) - x/D_x(t) - \varepsilon x \quad (2)$$

где $u(t)$ – чистый отток денежных средств в виде выданных ссуд, $D_x(t)$ – дюрация активов (средневзвешенный срок кредитования), ε – коэффициент амортизации кредитов (скорость погашения ссуд).

Обычно при выдаче ссуды одновременно в пассивах открывается депозитный счёт (кредитная линия), с которого заёмщиком средства снимаются по частям по мере необходимости, однако для простоты в модели учитываются только результирующие потоки.

Спрос на кредиты $g(t)$ может как превышать располагаемые ресурсы банка $h(t)$, так и быть недостаточным. Поэтому

$$u(t) = \min\{g(t), h(t)\} \quad (3)$$

где $g(t)$ – спрос на кредиты, $h(t)$ – ресурсы банка, планируемые к выдаче в качестве ссуд.

Подходы к моделированию спроса на кредиты $g(t)$ аналогичны описанным выше для моделирования притока депозитов $v(t)$.

Согласно политике ограничения рисков банковской деятельности, на кредитование направляется только часть $\gamma_x < 1$ располагаемых ресурсов

$$h(t) = \gamma_x(t)q(t), \quad (4)$$

где $q(t)$ – прогнозируемые располагаемые ресурсы банка (приток минус отток средств).

Остальные ресурсы расходуются на приобретение других активов, а также могут идти на увеличение денежных средств на счетах $s(t)$, включая резервы, с целью снижения рисков ликвидности.

Значительная часть свободных ресурсов банка, включая невостребованные кредитные ресурсы $\max\{0, h(t) - g(t)\}$, размещается банком в портфельные активы – инвестиционные ценные бумаги, преимущественно в облигации с фиксированным сроком погашения, а также в торгуемые рискованные активы (акции). Одновременно происходит погашение или продажа уже имеющихся ценных бумаг. Этот механизм можно описать следующим уравнением

$$db/dt = w(t) + \max\{0, h(t) - g(t)\} - b/D_b(t), \quad (5)$$

где $b(t)$ – вложения в ценные бумаги, $w(t)$ – ресурсы банка, планируемые для приобретения портфельных активов

$$w(t) = \gamma_b(t)q(t) \quad (6)$$

где γ_b – часть ресурсов, направляемая на приобретение ценных бумаг, $D_b(t)$ – дюрация ценных бумаг.

Ключевым вопросом управления активами является алгоритм распределения по каналам использования ресурсов банка, который при рациональном менеджменте должен зависеть от прогнозируемого чистого притока $q(t)$.

Данный алгоритм может выглядеть следующим образом. Располагаемый инвестиционный ресурс банка $q(t)$ рассчитывается как

$$q(t) = dy/dt - dr/dt + (1 - \xi)x/D_x(t) + b/D_b(t) + \varepsilon x + \rho_x x + \rho_y y - \rho_b b - \rho_y y - z(t) \quad (7)$$

где ρ_x , ρ_y , ρ_b – ставки доходности, соответственно, по кредитам, депозитам и ценным бумагам (купонный доход), $r(t)$ – резервы, $z(t)$ – планируемые операци-

онные расходы и другие платежи банка, $0 < \xi(t) \leq 1$ – случайный процесс, характеризующий потери банка вследствие невозврата ссуд.

Часть привлечённых банком ресурсов подлежит обязательному резервированию. Помимо того, банк может дополнительно резервировать средства на потери по кредитам и на текущие платежи. Резервы, в сочетании с ценными бумагами, создают необходимый запас ликвидности, обеспечивающий устойчивость банка к неблагоприятным изменениям внешней среды. Далее будем предполагать, что резервы рассчитываются как процент от привлечённых средств, причём этот процент (сверх обязательного минимума) может регулироваться самим банком

$$r = ay \quad (8)$$

где a – коэффициент резервирования.

С учётом возможности гибкого изменения банком процента резервирования

$$dr/dt = ay/dt + yda/dt \quad (9)$$

Формула (7) позволяет сконструировать критерий и оценить запас финансовой устойчивости банка. О снижении устойчивости сигнализирует снижение ресурса $q(t)$. Это может происходить в том случае, когда отток депозитов начинает превышать их приток, то есть dy/dt становится отрицательной, растёт величина невозврата кредитов ξ и увеличиваются операционные расходы $z(t)$. Если $q(t)$ становится отрицательной, то это означает, что банк начинает дрейфовать в сторону снижения ликвидности, что в конечном итоге может привести к неплатёжеспособности и банкротству, когда собственный капитал становится отрицательным. Из (7) с учётом (8) получаем необходимое условие (нижнюю границу) финансовой устойчивости

$$(1 - \xi)x/D_x(t) + b/Db(t) + \varepsilon x + \rho_{xx} + \rho_{bb} > z(t) + \rho_{yy} - (1-a)dy/dt \quad (10)$$

Запас финансовой устойчивости банка определяется отношением χ , которое можно использовать в качестве критерия и градации по степеням устойчивости

$$\chi(t) = [(1 - \xi)x/D_x(t) + b/Db(t) + \varepsilon x + \rho_{xx} + \rho_{bb}] / [z(t) + \rho_{yy} - (1-a)dy/dt] \quad (11)$$

В качестве экспертной оценки, можно предложить следующую градацию: $1 < \chi < 1,5$ – низкая устойчивость, $1,5 < \chi < 3$ – средняя устойчивость, $\chi > 3$ – высокая устойчивость. Очевидно, что в процессе функционирования банка данный показатель постоянно изменяется, снижаясь в периоды экономической нестабильности.

Для осуществления текущих платежей банку необходимо иметь свободные денежные средства на счетах и в кассе. Эти наиболее ликвидные составляющие активов, включая резервы, объединены в переменную $s(t)$.

Как отмечено выше, в стрессовой ситуации, при наличии экономических шоков, а также при рискованной кредитной политике банка величина $q(t)$ может оказаться отрицательной, что влечёт прекращение ссудных операций, приобретение других активов и снижение $s(t)$. При улучшении финансовой ситуации, в том числе в результате санации и докапитализации банка, поток ресурсов меняет знак и необходимый для обеспечения ликвидности уровень $s(t)$ должен быть восстановлен.

С учётом этого, потоки $u(t)$ и $w(t)$ следует скорректировать следующим образом

$$h(t) = \gamma_x(t) \max\{0; \operatorname{sgn}(0, s-r)\} \max\{0, q(t)\}, \quad (12)$$

$$w(t) = \gamma_b(t) \max\{0; \operatorname{sgn}(0, s-r)\} \max\{0, q(t)\}, \quad (13)$$

а в уравнении динамики денежных средств, включая резервы, предусмотреть возможность переключения режимов расходования и наполнения $s(t)$

$$ds/dt = \operatorname{sgn}(0, r-s) \max[0, q(t)] + \min[0, q(t)] + dr/dt \quad (14)$$

Как уже упоминалось выше, капитал банка является балансирующей переменной, то есть

$$c = x + s + b - y \quad (15)$$

$$dc/dt = ds/dt + dx/dt + db/dt - dy/dt = \rho_x x - \rho_y y + \rho_b b - z(t) - \xi x/D_x(t) + \min[0, q(t)] \quad (16)$$

Прирост собственного капитала банка происходит за счёт прибыли (за вычетом налога на прибыль и дивидендов, выплаченных акционерам). Для простоты, налоги в рамках данной модели не учитываются. Считается также, что дивиденды не выплачиваются, а вся прибыль направляется на увеличение стоимости акционерного капитала.

В качестве основного структурного ограничения используется норматив достаточности капитала, который в рамках данной модели можно представить как

$$c(t)/[(1-f)A] = c(t)/\{(1-f)[c(t)+y(t)]\} \geq \theta \quad (17)$$

где f – доля безрисковых активов, θ – нормативный коэффициент достаточности капитала ($\theta=0,08$ в соответствии с рекомендациями Базельского комитета, $\theta=0,1$ для российских банков).

Отсюда

$$c(t) \geq \{(1-f)\theta/[1-(1-f)\theta]\}y(t) \quad (18)$$

Далее в качестве норматива будем использовать коэффициент k

$$k = (1-f)\theta/[1-(1-f)\theta] \quad (19)$$

Например, пусть $f=0,3$, $\theta=0,1$, тогда $k=0,075$.

Построенная модель описывает динамику основных переменных состояния банка, позволяет имитировать механизмы управления и трансформации денежных потоков и исследовать чувствительность элементов баланса, а также прибыли банка к управляющим воздействиям

и внешним факторам, в том числе, стрессам. Тем самым она может рассматриваться как опорная для теоретико-аналитического исследования. Вместе с тем, использование интегральных показателей оборачиваемости активов и пассивов, как и предположение о непрерывности и гладкости используемых функций, не позволяет отразить некоторые важные аспекты функционирования банка. Следующим шагом к повышению адекватности описания функционирования банка является использование моделей с распределёнными параметрами [2].

Влияние структурных ограничений на доходность банка

Предположим, что в течение некоторого периода времени банк находится в стационарном состоянии, то есть величина и структура активов и пассивов остаются неизменными, прибыль полностью распределяется и собственный капитал банка не растёт. В этом случае можно аналитически исследовать влияние различных параметров на финансовые показатели работы банка при условии, что выполняются ограничения, накладываемые на структуру баланса надзорным органом.

Тогда производные и ряд членов в уравнениях (1)-(2), (5), (14), (16) обнуляются и можно полностью определить составляющие баланса.

Заёмный капитал определяется произведением скорости притока денежных средств на время их оборота T_x

$$y^* = v/(1/D_y - \rho_y) = vT_x \quad (20)$$

а собственный капитал, согласно нормативу достаточности, должен составлять

$$c^* = ky^*, \quad (21)$$

где $k \geq (1-f)\theta/[1-(1-f)\theta]$.

В стационарном режиме, согласно (), неработающие активы минимальны и равны резервам

$$s^* = r^* = ay^* \quad (22)$$

Вложения в низкодоходные, но надёжные (малорисковые) активы, такие как государственные облигации, призваны обеспечить финансовую устойчивость банка и снизить риски. Размер этих вложений должен соотноситься с собственным капиталом банка.

Тогда данную составляющую активов можно определить как

$$b^* = nc^* \quad (23)$$

Далее, из условия баланса активов и пассивов, находим величину выданных кредитов

$$x^* = c^* + y^* - s^* - b^*, \quad (24)$$

В итоге, баланс банка можно выразить в аналитической форме:

Таблица 2

Баланс банка, выраженный через параметры модели

Активы $A=(1+k)vT_y$	Пассивы $L=(1+k)vT_y$
Кредиты, выданные юрлицам и физлицам $x^* = [1+k(1-n)-a]vT_y$	Собственный капитал $c^* = kvT_y$
Денежные средства (резервы, корсчета, касса) $s^* = avT_y$	Депозиты (срочные и до востребования), счета клиентов и заёмные средства $y^* = vT_y$
Ценные бумаги $b^* = nkvt_y$	

Процентный доход (маржа) банка m с учётом коэффициента ожидаемых кредитных потерь $E\xi$ рассчитывается как

$$m = \rho'_x x^* + \rho_b b^* - \rho_y y^* = (\rho'_x + \rho_b nk - \rho_y) y^* \quad (25)$$

где $\rho'_x = \rho_x - (E\xi)/D_x$

Операционные расходы z можно интерпретировать как некоторую условную ставку ρ_a по обслуживанию активов банка

$$z = \rho_a A, \quad (26)$$

тогда балансовая прибыль p составляет

$$p = m - z = [\rho'_x + \rho_b nk - \rho_y - \rho_a(1+k)] y^* \quad (27)$$

Доходность активов (return on assets)

$$ROA = p/A = [\rho'_x + \rho_b nk - \rho_y - \rho_a(1+k)]/(1+k) \quad (28)$$

Доходность собственного капитала (return on equity)

$$ROE = p/c^* = ROA(1+k)/k \quad (29)$$

Заключение

Агрегированная модель банка как динамической системы с сосредоточенными параметрами позволяет наглядно представить механизм трансформации основных денежных потоков и формализовать различные правила управления активами и пассивами. Компьютерная реализация данной модели может быть использована для численного исследования эффективности различных алгоритмов управления активами.

Основными параметрами управления балансом банка, обеспечивающими возможность выбора оптимального сочетания доходности и риска ликвидности являются D_x –дюрация кредитного портфеля, D_b –дюрация портфеля ценных бумаг, ρ_x –ставка по ссудам, ρ_y –ставка по депозитам, а $-\rho_a$ –коэффициент резервирования денежных средств.

В ситуации, близкой к стационарной, нетрудно вывести простые аналитические выражения, позволяющие исследовать влияние указанных параметров на доходность банка и риски ликвидности. Так, формулы (28)-(29) позволяют исследовать влияние управляющих параметров, включая различные нормативы, на доходность и соотнести её с рисками кредитного портфеля, характеризуемыми в данной

модели величиной $E\tilde{x}$. Риск ликвидности зависит от соотношения дюраций активов и пассивов D_x и D_y . Так как величина D_y не фигурирует в выражениях (28)-(29), то отношение D_x/D_y является независимым параметром, который может использоваться при анализе состояния банка на плоскости «риск-доходность». Заметим, что ставки доходности по кредитам и депозитам влияют на соответствующие потоки $v(t)$ и $g(t)$ и должны учитываться при моделировании этих случайных процессов.

Из (28)-(29) видно, что отношение k собственного капитала к объёму привлечённых и заёмных средств существенно влияет на доходность собственного капитала, но мало сказывается на доходности активов, которая зависит, преимущественно, от их струк-

туры и процентной маржи.

Предложенная модель легко может быть расширена путём детализации источников финансирования (депозиты до востребования, срочные и накопительные вклады и т.д.) и способов размещения активов. Радикальное повышение адекватности модели требует учёта временной структуры кредитов и срочных депозитов [2].

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ по теме: «Фундаментальные и прикладные задачи математического моделирования» № 1.5169.2017/8.9 и при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-06-00531а).

Список литературы

1. Liang G., Lütkebohmert E., Xiao Y. A Multiperiod Bank Run Model for Liquidity Risk. Review of Finance. Vol. 18, Issue 2, 2014. P. 803–842.
2. Селютин В.В., Харужная М.А. Математическое моделирование банка как динамической системы. Вестник Южного научного центра РАН. Том 11, № 3, 2015, С. 3–10.

AGGREGATED BANK MODEL: STRUCTURE OF BALANCE SHEET, PROFITABILITY, RISKS

V.V. Selyutin

Southern Federal University, Rostov-on-Don

vvs1812@gmail.com

Abstract – The central issue of bank management is to achieve maximum profitability while ensuring all prudential supervision requirements for reliability and sustainability. Liquidity risks deserve special attention, since its comprehensive analysis and management require the bank to be considered as a dynamic system. The article develops the aggregated mathematical model of the bank as a dynamic system with lumped variables. The model includes three components of assets (loans; securities; accounts, reserves and cash) and two components of liabilities (equity and borrowed capital). This approach allows us to graphically describe the mechanism of transforming the principal cash flows and formalize various rules for managing assets and liabilities. Computer implementation of this model can be used to numerically study the dynamics of the elements of the balance sheet and the performance of various decision making algorithms for assets allocation. Analytical expressions have been found to study the effect of the main structural restrictions on the bank's profitability.

Keywords: bank model, assets and liabilities management, profitability analysis, risks.

References

1. Liang G., Lütkebohmert E., Xiao Y. A Multiperiod Bank Run Model for Liquidity Risk. *Review of Finance*. Vol. 18, Issue 2, 2014. P. 803–842 (In English).
2. Selyutin V.V., Kharuzhnaya M.A. Mathematical modelling of a bank as a dynamical system. *The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences Vestnik*. Vol. 11, № 3, 2015, P. 3–10 (In Russian).