ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД С УЧЕТОМ КОРРУПЦИИ

М.А. Решитько, А.Б. Усов

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
burer2012@yandex.ru, usov@sfedu.ru

Аннотация. Статья посвящена задаче контроля качества поверхностных вод, которая играет важную роль в экономике и экологии. Рассматривается иерархическая система управления, состоящая из контролирующего органа, предприятия и управляемой системы (водотока). Исследование подобных задач удобно проводить с помощью теории игр. Для описания взаимодействий между контролирующим органом и предприятием используется информационный регламент игры Штакельберга. Контролирующий орган является ведущим и устанавливает плату за загрязнение поверхностных вод для предприятия. Предприятие является ведомым и устанавливает степень очистки своих сточных вод. Ведущий делает свой ход первым, назначает размер платы за сброс загрязнений. Такой метод управления называется методом побуждения. Основной целью контролирующего органа является поддержание допустимого уровня загрязнения поверхностных вод, а целью предприятия – минимизация своих расходов на плату за сброс загрязнений и на очистку. В модели предусмотрена возможность коррупционного поведения субъектов управления. В статье описана статическая модель, описывающая систему контроля качества поверхностных вод. Предложены алгоритмы для решения задачи. Проведены эксперименты для ряда наборов входных данных. Сделан вывод, что рассмотрение статической модели позволяет ответить на ряд важных вопросов, выработать управленческие рекомендации для лиц, принимающих решения управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, равновесие Штакельберга, контроль качества, иерархическая система, речная система.

Современная производственная и экономическая деятельность протекает в условиях конкуренции и требует принятия эффективных управленческих решений. Современные системы управления являются сложными многоуровневыми системами. Принятие управленческих решений в таких системах представляет известные сложности. Поэтому для таких систем разрабатываются математические модели, исследование которых способно своевременно предоставлять рекомендации по управлению лицам, принимающим решения. Модель контроля качества поверхностных вод состоит из субъектов управления разных уровней – одного Ведущего, супервайзера и нескольких Ведомых, агентов, а также самой управляемой системы. Важную роль при исследовании подобных систем играет выбранный в системе регламент взаимодействия экономических субъектов. Каждому субъекту ставится в соответствие целевая функция, к максимизации или минимизации которой он стремится. Для каждого субъекта вводится регламент принятия решений. Модель, в которой агенты принимают решение в начале рассматриваемого временного промежутка, называется статической. Примеры использования иерархических систем управления разной структуры приведены в [1, 2].

1. Постановка задачи

Рассматривается промышленное предприятие, которое в ходе своей деятельности сбрасывает отходы своего производства в водоток. Контролирующим органом предприятию назначается плата за сброс единицы загрязнений. Предприятие устанавливает степень очистки своих сточных вод. Задачей предприятия является минимизация своих расходов на плату за сброс загрязнений и на очистку сточных вод. Контролирующий орган стремится к уменьшению загрязнения поверхностных вод. В подобной постановке задача описана в [3, 4].

При моделировании используем простейшую иерархически организованную систему управления, именно, двухуровневую систему управления. В статической двухуровневой модели рассматриваются предприятие и контролирующий орган, которые стремятся к максимизации своих целевых функций:

$$J_0 = F(T)w_1(1-p) - C_a(p)w_2 \rightarrow \max_T \quad (1)$$

$$J_1 = R(\varphi) - F(T)w_1(1-p) - C_p(p)w_3 \rightarrow \max_p, \quad (2)$$

где функция (1) – целевая функция контролирующего органа, функция (2) – целевая функция предприятия, T – величина платы за загрязнение, p – степень очистки стока предприятием, причем считается, что полностью очищать сток невозможно, $F(T)$ – функция платы за загрязнение с учетом возможной кор-

рупции, $C_a(p)$ – расходы контролирующего органа на очистку водоема, $C_p(p)$ – расходы предприятия на очистку стока, $R(\varphi)$ – функция фондов предприятия, w_1, w_2, w_3 – положительные числовые коэффициенты.

Приняты следующие ограничения на управления контролирующего органа и предприятия

$$0 \leq T \leq T_{\max}; 0 \leq p \leq 1 - \varepsilon \quad (3)$$

Контролирующий орган устанавливает плату первым, зная целевую функцию предприятия, затем предприятие устанавливает степень очистки. Такой регламент принятия решений соответствует модели Штакельберга [5].

2. Алгоритмы построения равновесий

Для модели предложены два алгоритма построения равновесий – аналитический и с помощью имитации. Аналитический метод дает точное решение задачи, однако метод имитации легко реализовать на компьютере.

Аналитический метод основан на максимизации целевых функций:

1. Найти максимум целевой функции предприятия по управлению

$$J_1(p, T) \rightarrow \max_p$$

Получим $p^*(T)$ – ответ предприятия на назначенную плату за загрязнение.

2. Найти максимум целевой функции контролирующего органа по плате

$$J_0(p^*(T), T) \rightarrow \max_T$$

Получим T^* – оптимальная плата.

3. $T^*, p^*(T^*)$ – равновесие системы (1) – (3).

При методе имитации осуществляется перебор допустимых управлений субъектов с некоторым шагом и алгоритм состоит в следующем:

1. Возьмем

$$T_i = i h_T, p_j = j h_p, h_T = \frac{T_{\max}}{N}, h_p = \frac{1 - \varepsilon}{M}, \\ i = 0..N, j = 0..M$$

2. Для каждого T_i перебором p_j найдем $p_j^*(T_i)$, которое максимизирует $J_1(T_i, p_j)$.

3. Перебором T_i найдем, T_i^* которое максимизирует $J_0(T_i, p_j^*(T_i))$.

4. Пара $T_i^*, p_j^*(T_i^*)$ есть равновесие системы (1) – (3).

3. Результаты расчетов

При проведении расчетов конкретный вид целевых функций выбирался исходя из анализа задачи контроля качества поверхностных вод. Сумма, которую платит предприятие за загрязнение, зависит от установленной платы T и степени очистки p .

Пусть плата убывает с ростом степени очистки, это достигается множителем $(1-p)$. Контролирующий орган самостоятельно устанавливает плату за загрязнение, поэтому будем считать, что функция платы линейно зависит от T , значит

$$F(T) = aT, a > 0.$$

Расходы на очистку поверхностных вод тем меньше, чем больше степень очистки стока, то есть обратно пропорциональны p , значит

$$C_a(p) = 1 - p.$$

Расходы предприятия на очистку стока растут с ростом степени очистки:

$$C_p(p) = \frac{p}{1-p}.$$

Функция фондов предприятия $R(\varphi)$ используется для приведения величины фондов предприятия к системе величин, используемых в конкретной задаче. В данном случае возьмем

$$R(\varphi) = \varphi.$$

Пример 1. Возьмем $w_2 = w_3 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $T_{\max} = 1$, $\varphi = 5$. Исследуем поведение системы при изменении коэффициента при плате.

Таблица 1
Результаты счета для примера 1

w_1	J_0	J_1	p
1	0	4.0	0
2	0.71	3.16	0.3
3	1.15	2.53	0.43
4	1.50	2.0	0.5
5	1.78	1.53	0.55
6	2.03	1.10	0.59
7	2.27	0.71	0.62
8	2.47	0.36	0.64

Из таблицы 1 видно, что при увеличении коэффициента при плате степень очистки сточных вод возрастает. При этом целевая функция предприятия убывает, а целевая функция контролирующего органа возрастает. Получаем, что ужесточением платы можно добиться лучшей очистки стока и улучшить качество поверхностных вод.

Пример 2. Возьмем $w_1 = 1$, $w_3 = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $T_{\max} = 1$, $\varphi = 5$. Исследуем поведение системы при изменении коэффициентов при затратах на очистку.

Таблица 2
Результаты счета для примера 2

w_1	J_0	J_1	p
0	0.1	4.9	0.9
0.2	0.36	4.31	0.55
0.4	0.38	4.13	0.36
0.6	0.31	4.05	0.23
0.8	0.18	4.01	0.10
1.0	0	4.0	0

Из таблицы 2 видно, что степень очистки уменьшается с ростом затрат на очистку воды. При этом значение целевой функции предприятия стремится к постоянной величине, а функция контролирующе-

го органа неограниченно убывает. Следовательно, увеличение стоимости очистки приводит к загрязнению поверхностных вод.

4. Заключение

В работе предложена стационарная иерархически организованная модель для описания системы контроля качества поверхностных вод. В качестве метода иерархического управления использован метод побуждения. Предложены алгоритмы исследования

указанной модели при использовании информационного регламента игры Штакельберга. Проведены эксперименты для ряда наборов входных данных. Сделан вывод, что рассмотрение статической модели позволяет ответить на ряд важных вопросов, выработать управленческие рекомендации для лиц, принимающих решения управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-01-00053.

Список литературы

1. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря / А. В. Никитина [и др.] // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28, № 7. – С. 96–106.
2. Алексенцева О. Н. Оценка рисков промышленных предприятий на основе имитационного моделирования // Вестник Саратовского государственного социально-экономического университета. – 2007. – № 17. – С. 150–151.
3. Угольников Г. А., Усов А. Б. Управление сложными эколого-экономическими системами // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 5. – С. 169–179.
4. Угольников Г. А., Усов А. Б. Статические модели коррупции в системах контроля качества водных ресурсов // Проблемы управления. – 2012. – № 4. – С. 38–44.
5. Шагин В. Л. Теория игр с экономическими приложениями. Учебное пособие. – М.: ГУ-ВШЭ, 2003. – 210 с.

HIERARCHICAL STATIC MODEL OF SURFACE WATER QUALITY CONTROL TAKING INTO ACCOUNT A CORRUPTIONS

M.A. Reshitko, A.B. Usov

Southern Federal University, Rostov-on-Don
burer2012@yandex.ru, tol151968@yandex.ru

Abstract. This article covers the water quality control problem. This problem is important in many aspects of human life, for example, in economy and ecology. The hierarchical control system consisting of the controlling subjects, the enterprise and the controlled system (the river) is considered. The convenient way to describe such control problem is to use game theory. Consider a hierarchical system of water control department, facility and surface waters. Possibility of corruption behavior of management subjects is envisaged in a model. The authors use the Stackelberg leadership model to describe relations between the facility and the water control department. In this case water control department is a leader, which determines water pollution fee for the facility. Facility as a follower controls wastewater purification rate. The leader has an advantage to choose a pollution fee before facility's action. The enterprise is a slave and establishes the degree of purification of its waste water. Such method is called the method of impulsions. The main purpose of the Supervisory authority is to maintain the permissible level of pollution of surface water, and the purpose of the enterprise – to minimize their costs for the fee for the discharge of pollution and for cleaning. The article describes a static model describing the system of surface water quality control. Algorithms for solving the problem are proposed. Experiments for a number of input data sets are carried out. It is concluded that the consideration of the static model allows to answer a number of important questions, to develop management recommendations for decision makers of management.

Keywords. Optimal control, Stackelberg equilibrium, water quality control, hierarchical system.

References:

1. Optimal'noe upravlenie ustoychivym razvitiem pri biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [Optimal management of sustainable development in the biological rehabilitation of the Azov Sea]. A. V. Nikitina [et al]. Mathematical Models and Computer Simulations. – 2016. – Vol. 28, No 7. – P. 96–106.
2. Aleksentseva O.N. Otsenka riskov promyshlennykh predpriyatiy na osnove imitatsionnogo modelirovaniya [Risk assessment of industrial enterprises on the basis of simulation modeling]. Vestnik of Saratov State Socio-Economic University. – 2007. – No 17. – P. 150–151.
3. Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. Control of complex ecological-economic systems.
4. Automation and Remote Control – 2009. – Vol. 70, No 5. – P. 897–906.
5. Ugol'nitskiy G.A., Usov A.B. Staticheskie modeli korruptsii v sistemakh kontrolya kachestva vodnykh resursov [The static corruption models in the water resources quality control systems]. Control Sciences. – 2012. – No 4. – P. 38–44.
6. Shagin V.L. Teoriya igr s ekonomicheskimi prilozheniyami. Uchebnoe posobie. [Teoriya igr s ekonomicheskimi prilozheniyami. Uchebnoe posobie.] – M.: Gosudarstvennyy universitet "Vysshaya shkola ekonomiki", 2003. – 210 p.